

Zadání 5. série

Termín odeslání: 17. prosince 2018

Adresa submitka: www.iksks.org/submit

Úloha A5. Najděte všechny funkce $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, že pro všechna $x, y \in (0, 1)$ platí

$$(x - y)^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Úloha G5. V trojúhelníku ABC jsou body D, E a F paty výšek z vrcholů A, B a C . K stranám AB a BC připišeme zvenku podobné pravouhlé trojúhelníky ABK a CBL s pravým úhlem u vrcholu K , respektive L . Střed AF označíme M a střed CD jako N . Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům DEF, EKL a BMN leží na jedné přímce.

Úloha C5. Existuje nekonečný systém \mathcal{S} podmnožin přirozených čísel takový, že průnik libovolných 2018 množin $S_1, S_2, \dots, S_{2018} \in \mathcal{S}$ je neprázdný, zatímco průnik libovolných 2019 různých množin $S_1, S_2, \dots, S_{2019} \in \mathcal{S}$ je prázdný?

Úloha N5. Necht k je sudé přirozené číslo. Pavel si nejdříve vybere přirozené číslo N_0 větší než 1, napíše ho na tabuli a každou minutu opakuje následující krok: vezme si nějakého prvočíselného dělitele p čísla N zrovna napsaného na tabuli, smaže původní N a místo něj napíše $N \cdot (p^k - p^{-1})$. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho sudých přirozených čísel k takových, že číslo na tabuli bude v nějaké chvíli dělitelné 2018 bez ohledu na to, co Pavel dělá.