Zadanie 5. série

Termín odoslania: 8. decembra 2014

Adresa: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha G5. Patrik si kúpil nadupaný *3D* televízor a očakáva na ňom aj patričný *3D* obsah. Daný je štvorsten $ABCD$. Sféra s prechádzajúca bodom A, pretína hrany AB, AC, AD postupne v bodoch E, F, G. Prienik s a gule opísanej štvorstenu $ABCD$ je kružnica, ktorá leží v rovine rovnobežnej s rovinou BCD. Nech R, S, T sú obrazy bodov E, F, G v stredových súmernostiach podľa stredov hrán AB, AC, AD. Dokážte, že body B, C, D, R, S, T ležia na jednej sfére.

Úloha N5. Daných je n ($n \geq 2$) po dvoch nesúdelitelných prirodzených čísel, pričom súčin ľubovoľných $n-1$ z nich dáva po delení tým posledným vždy ten istý zvyšok r. Dokážte, že $r \leq n-2$.

Úloha C5. Máme 2 dostatočne dlhé pásy papiera. Na prvom je napísané písmeno A. Na druhom je písmeno B. V každom kroku si vyberieme jeden pás a to, čo je naňom napísané, napíšeme pred alebo za obsah druhého pásu. Dokážte, že po 2014 krokoch je možné rozdeliť obsah prvého pásu na 2 palindrómy.

Úloha A5. Do každého políčka tabuľky $n \times n$ napíšeme kladné reálne číslo tak, že súčet čísel v každom riadku je rovný 1 a platí, že kedykoľvek vyberieme n políčok tak, že z každého riadku i stĺpca vezmeme práve jedno, je súčin čísel týchto políčok menší alebo rovný súčinu čísel na diagonále. Dokážte, že súčet čísel na diagonále je aspoň 1.