TR iKS ko

Úloha 1. *Dokažte, že rovnice $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnymi parametry p, q má v oboru reálnych čísel čtyri reálná řešení právě tehdy, když platí $p + |q| + 2 < 0$.*

Řešení. https://skmo.sk/dokument.php?id=7 □

Úloha 2. *Přirozená čísla a, b, c splňují $a < b < c < 2a$. Dokažte, že platí*

$$(a, b) + (b, c) + (c, a) \leq a.$$

Pozn. (x, y) značí největší společný dělitel čísel x, y.

Řešení. Využijeme, že pro $x < y$ platí $(x, y) = (x, y - x) \leq y - x$. Platí proto $(a, b) + (b, c) \leq b - a + c - b = c - a$. Chceme tedy ukázat, že

$$(c, a) \leq 2a - c,$$

Což platí, jelikož levá strana dělí pravou a ta pravá je kladná. □

Úloha 3. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D, E, F po řadě paty výšek z vrcholů A, B, C a H průsečík výšek. Výška z B protíná úsečku DF v bodě P. Označme Q bod na přímce AB takový, že $PQ \perp BC$. Dokažte, že přímka EQ půlí úsečku AH.*

Řešení. Nejprve si všimněme, že z obvodových úhlů nad známými Thaletovými kružnicemi získáme

$$\angle FQP = \angle BAD = 90^\circ - \angle ABC = \angle FCB = \angle FEB = \angle FEP,$$

tedy body E, F, P a Q leží na jedné kružnici. Označme nyní S průsečík přímky EQ s úsečkou AH. Ukažeme, že S je jejím středem a to tak, že je to střed kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $AEFH$ (což ten střed je). Jelikož již S leží na průměru AH této kružnice, stačí ještě, že leží na některé ose strany. Ukážeme tedy, že $|SE| = |SH|$.

To už se doúhlí

$$\angle SEH = \angle QEP = 180^\circ - \angle QFP = 180^\circ - \angle AFD = \angle ACB.$$

Podobně, jelikož S leží na výšce

$$\angle SHE = \angle AHE = 180^\circ - \angle DHE = \angle ACB,$$

úhly jsou tedy shodné, tím pádem trojúhelník SHE je rovnoramenný, tedy S leží na průměru kružnice opsané $AEFH$ a ještě na ose jedné jiné strany, je to tedy střed kružnice opsané, což je střed úsečky AH.

□

Úloha 4. *Nechť* M *je množina šesti různých přirozených čísel, jejichž součet je* 60*. Všechna tato čísla napíšeme na stěny krychle, jedno na každou stěnu. V jednom kroku vybereme libovolné tři stěny krychle, které mají společný vrchol, a každé číslo na těchto třech stěnách zvýšíme o* 1*. Určete počet všech takových množin* M*, jejichž čísla lze zapsat na stěny krychle výše popsaným způsobem tak, že po konečném počtu vhodných kroků budou na všech stěnách stejná čísla.*

Řešení. https://skmo.sk/dokument.php?id=362 $\square$