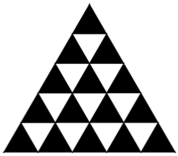
Řešení 3. série

Úloha C3. *Rovnostranný trojúhelník o straně délky n je vyplněný jednotkovou trojúhelníčkovou mřížkou. Uzavřená lomená čára vede podél této mřížky a každý vrchol mřížky potká právě jednou. Dokažte, že tato čára alespoň $(n+1)$-krát zahne do ostrého úhlu.*

Řešení. Nejdříve si uvědomíme, že pro $n = 1$ úloha platí triviálně, dále budeme předpokládat $n \geq 2$. Obarvěme si na černo trojúhelníčky, které jsou otočené špičkou nahoru (tak jako na obrázku).



Všimněme si, že každý úsek čáry vede podél právě jednoho z těchto trojúhelníčků. Žádný z našich trojúhelníčků nebude sousedit všemi třemi stranami s naší čárou, protože pak by byla čára uzavřená jen kolem tohoto malého trojúhelníčku. Označme si počet černých trojúhelníčků, které mají s čárou společnou jen jednu (resp. dvě) strany a_1 (resp. a_2). Pak si můžeme délku čáry vyjádřit jako $a_1 + 2a_2$. Navíc víme, že $a_1 + a_2$ je maximálně tolik, kolik je černých trojúhelníčků. Těch je $1 + 2 + \cdots + n$ (počítáme je po řádcích). Víme tedy $a_1 + a_2 \leq 1 + 2 + \cdots + n$. Navíc čára je tak dlouhá, jaký je počet bodů, které obsahuje. Opět je spočítáme po řádcích a je jich $1 + 2 + \cdots + (n+1)$. Víme tedy

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = a_1 + 2a_2 = a_2 + (a_1 + a_2) \leq a_2 + 1 + 2 + \cdots + n,$$

$$a_2 \geq n + 1.$$

Existuje tedy alespoň $n+1$ černých trojúhelníčků, kde čára prochází kolem dvou jeho stran. Ale na těchto místech se čára láme do ostrého úhlu. Ostrých úhlů je proto alespoň $n+1$.

Poznámky opravujícího. Většina řešení postupovala podobně jako to vzorové. Někteří zapomněli zvlášť okomentovat případ $n = 1$, kde jim jejich řešení nefungovalo, za což přišli o jeden bod. Řešitelé, kteří se snažili postupovat jinak, většinou řešení nedotáhli dokonce. Někteří tvdili, že v každém řádku musí být ostrý úhel (což neplatí), jiní se snažili rozebrat všechny možnosti, jak čára povede (což se ukázalo jako nereálné). Jediný, kdo jiný postup dotáhl do konce byl *Eduard Batmendijn*, jehož řešení se ale protáhlo na pět stránek. *(Štěpán Šimsa)*

Úloha G3. *Čtyřstěn $ABCD$ má tu vlastnost, že součet obsahů stěn ABC a ABD je stejný jako součet obsahů stěn CDA a CDB. Ukažte, že středy hran AC, AD, BC, BD a střed koule vepsané leží v jedné rovině.*

První řešení. Natočme čtyřstěn tak, aby hrany AB a CD ležely ve svislých rovinách ρ, τ (představujme si ρ „vlevo“ a τ „vpravo“).

Množina středů úseček RT, kde $R \in \rho$ a $T \in \tau$ je zřejmě svislá rovina ležící přesně v polovině mezi ρ a τ. Nazvěme tuto rovinu σ. Středy hran AC, AD, BC, BD všechny patří do roviny σ.

Označme I střed koule vepsané a r její poloměr. Hranatými závorkami značme objem, resp. obsah, a zaměřme se na součet objemů $[ABCI] + [ABDI]$. Jelikož $[ABC] + [ABD]$ je rovno polovině povrchu čtyřstěnu, máme

$$[ABCI] + [ABDI] = \frac{r}{3}([ABC] + [ABD]) = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Označíme-li písmenem J průsečík roviny ABI s hranou CD (řezem čtyřstěnu rovinou ABI je tedy trojúhelník ABJ), můžeme vyjádřit tentýž součet objemů pomocí obsahu společné stěny ABI jako

$$[ABCI] + [ABDI] = \frac{[ABI]}{3}(|C, ABI| + |D, ABI|),$$

kde $|W, XYZ|$ značí vzdálenost bodu W od roviny XYZ. Objem celého čtyřstěnu ale lze vyjádřit jako $[ABCD] = \frac{1}{3}[ABJ](|C, ABI| + |D, ABI|)$. Porovnáním dostáváme $[ABI] = \frac{1}{2}[ABJ]$. Bod I tedy leží v polovině J-výšky trojúhelníka ABJ, a tedy také leží v rovině σ.

Druhé řešení. Keď dojde zásoba trikov, zavedeme barycentrický souřadnicový systém[1]

$$A = (1,0,0,0), B = (0,1,0,0), C = (0,0,1,0), D = (0,0,0,1).$$

Středy hran AC, AD, BC, BD mají potom postupně souřadnice

$$S_{AC} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right), S_{AD} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right), S_{BC} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), S_{BD} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

a střed koule vepsané čtyřstěnu $ABCD$ má souřadnice

$$I = ([BCD]/S, [ACD]/S, [ABD]/S, [ABC]/S),$$

kde $[XYZ]$ značí opět obsah trojúhelníka XYZ a S značí povrch čtyřstěnu $ABCD$.

Obecná rovnice roviny v prostoru má tvar $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Stačí si tedy tipnout rovinu s rovnicí $x + y - z - w = 0$ a dosazením ověřit, že všech pět požadovaných bodů v ní leží. U středů hran je to jasné (vždy se odečte polovina s polovinou), u bodu I využijeme zadanou podmínku $[ABC] + [ABD] = [ACD] + [BCD]$.

Poznámky opravujícího. Většina správných řešení se více podobala tomu druhému vzorovému.

Jinak znáte takovou tu úlohu, kde se chce dokázat, že vepsiště tečnového čtyřúhelníku leží na přímce skrz středy jeho úhlopříček? Tu, jak se tam použije, že jsou-li dány úsečky AB a CD, pak množina bodů X takových, že součet (orientovaných) obsahů $[ABX]+[CDX]$ je roven dané konstantě, je přímka[2], a pak si člověk už jen všimne, že pro vepsiště i středy úhlopříček je ten součet roven $\frac{1}{2}[ABCD]$? A dokázali byste něco podobného provést „o úroveň výš“?

(Pepa Tkadlec)

Úloha A3. *Jsou dána reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ukažte, že pro každou neprázdnou podmnožinu $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ platí nerovnost*

$$\left(\sum_{i \in M} x_i\right)^2 \le \sum_{1 \le i \le j \le n} (x_i + \cdots + x_j)^2.$$

Řešení. Nejprve učiníme několik pozorování, která nám umožní úlohu zkonkrétnit. Mějme libovolnou n-tici reálných čísel $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Označme X_M množinu $\{x_i, i \in M\}$. Slovem interval budeme označovat sumu $x_i + \cdots + x_j$ pro nějaká $1 \le i \le j \le n$.

(i) Pokud se v A vyskytuje nula, můžeme ji smazat, čímž dostaneme $(n-1)$-tici, pro kterou má nerovnost opět platit. Smazáním nuly jsme levou stranu neovlivnili, zatímco na pravé jsme vynechali několik čtverců intervalů (začínajících nebo končících nulou). Proto nám stačí nerovnost dokázat pro n-tice bez nuly, opakováním úvahy bez nul.

[1] Pro dvoudimenzionální obdobu viz například druhý sborníkový příspěvek dostupný na `http://iksko.org/files/sbornik2.pdf`.

[2] Jasně, „vše je lineární“.

(ii) Pokud dokážeme platnost nerovnosti pro tu indexovou podmnožinu $M \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, pro kterou je absolutní hodnota sumy $\sum_{i\in M} x_i$ největší možná, bude už nerovnost platit i pro všechny ostatní a budeme hotovi (pravá strana na M nezávisí). Toho dosáhneme zřejmě volbou buď právě všech kladných, nebo právě všech záporných x_i. Je vidět, že změna znamének všech čísel x_i nerovnost nezmění, čili můžeme BÚNO předpokládat, že všechna čísla v X_M jsou kladná.

(iii) Pokud se v dané n-tici vyskytují dvě sousední čísla se stejným znaménkem, můžeme je "slít"do jednoho ($x_i, x_{i+1} \longrightarrow x_i' = x_i + x_{i+1}$), čímž dostaneme novou $(n-1)$-tici takovou, že z platnosti nerovnosti pro ni plyne platnost nerovnosti pro původní n-tici (levá strana se nezměnila, protože čísla se stejným znaménkem buď obě jsou, nebo obě nejsou v X_M, a pravá strana se zmenšila o čtverce těch intervalů, které obsahují právě jedno z čísel x_i, x_{i+1}). Po "slití"dvou sousedních čísel pochopitelně všechna x_i přeindexujeme od 1 po $n-1$ za zachování pořadí a M změníme tak, aby X_M obsahovala zase všechna kladná x_i.

(iv) Pokud je první nebo poslední číslo z A záporné, můžeme je vynechat. Levá strana zůstane, z pravé zmizí čtvrece těch intervalů, které začínaly/končily jedním z vynechaných čísel, ostatní intervaly zůstanou beze změny - je dobré si uvědomit, že tuto úvahu nemůžeme použít pro čísla, která nejsou na kraji A, protože by došlo i ke změně některých neodstraňovaných intervalů.

Z těchto pozorování plyne, že stačí nerovnost dokázat pro n-tice s lichým n, které začínají kladným číslem, znaménka čísel se postupně střídají a $M = \{1, 3, ..., n\}$. Dokážeme, že pro takové n-tice platí identita (motivace ve videovzoráku):

$$\sum_{1\le i\le j\le n} (x_i + ... + x_j)^2 = \left(\sum_{i\in M} x_i\right)^2 + 2 \sum_{1\le i\le j\le n; 2|j-i+1} (x_i + ... + x_j)^2$$

.

Z té již dokazovaná nerovnost triviálně plyne. Interval, který má sudý (resp. lichý) počet členů budeme nazývat sudý (resp. lichý). Identita vlastně říká, že součet čtverců všech intervalů je roven čtverci součtu přes X_M plus dvakrát součet čtverců všech sudých intervalů. Protože levá strana je vlastně součet čtverců všech sudých a lichých intervalů, po odečtení součtu čtverců všech sudých intervalů od obou stran dostaneme ekvivalentní rovnost

$$\sum_{1\le i\le j\le n; 2|j-i} (x_i + ... + x_j)^2 = \left(\sum_{i\in M} x_i\right)^2 + \sum_{1\le i\le j\le n; 2|j-i+1} (x_i + ... + x_j)^2$$

Tuto identitu roznásobíme a ukážeme, že všechny vzniklé členy se vyskytují na obou stranách ve stejném počtu, což zřejmě implikuje její platnost. Jaké členy po roznásobení vzniknou? Vzhledem k tomu, že se jedná o čtverce součtů x_i, budou to právě členy $x_k x_l$, kde $k, l \in \{1, 2, ..., n\}$ (pro $k \ne l$ jsou to členy $2x_k x_l$, což nám ale nevadí, protože dvojka se objevuje vždy). Tento člen se ve čtverci intervalu vyskytuje právě tehdy, když tento interval obsahuje obě čísla x_k i x_l. BÚNO nechť $k \le l$. Pro index i prvního prvku intervalu obsahujícího $x_k x_l$ platí $i \le k$. Podobně pro poslední index j platí $j \ge l$. Takových intervalů je tedy $k(n-l+1)$. Můžeme si je představit jako šachovnici o rozměrech $k, n-l+1$ (pole o souřadnicích (a, b) odpovídá intervalu, který začíná číslem x_a a končí x_b). Je vidět, že po standardním obarvení této šachovnice (nechť pole odpovídající intervalu od x_1 do x_n je bílé) budou liché intervaly bílé a sudé intervaly budou černé. Pokud je alespoň jeden rozměr šachovnice sudý, je počet černých a bílých polí stejný, čili i počet sudých a lichých intervalů obsahující naše dva členy je stejný. To je v souladu s naší identitou, protože suma přes M obsahuje pouze členy s lichými indexy (platí $n-l+1 \equiv l$ (mod 2). Pokud jsou oba rozměry liché, je bílých polí o jedno více než černých (tzn. sudých intervalů je o jeden méně). Dále to znamená, že k, l jsou lichá čísla, takže $k, l \in M$, čili chybějící člen na pravé straně doplní suma přes M. Dokázali jsme, že každý člen se po roznásobení vyskytuje na obou stranách ve stejném počtu, čili rovnost platí.

Poznámky opravujícího. Všech osm došlých řešení bylo správně, vyskytly se pouze drobnosti v ceně do jednoho bodu. Nerovnosti jsou sice klasickou oblastí olympiádní algebry, ale tentokrát šlo hlavně o zjednodušení a vhodnou kombinatorickou manipulací s dosti divokými sumami. Objevilo se relativně hodně různých přístupů. Nejčastěji řešitelé objevili identitu ze vzorového řešení, ale potom nevyužili triku s šachovnicí a museli počty členů celkem pracně vyjadřovat. Několikrát došlo na indukci nebo na vyjadřování pomocí součtů $S(n) = x_1 + ... + x_n$. Nakonec nás ale jeden řešitel přesvědčil, že se opravdu jednalo o algebru - Bui Truc Lam úspěšně použil Cauchy-Schwarzovu nerovnost. *(David Hruška)*

Úloha N3. *Nalezněte všechna přirozená čísla n, pro která mají čísla n a $2^n + 1$ stejnou množinu prvočíselných dělitelů.*

Řešení. Na úvod si rozmyslíme čtyři malá tvrzení. První z nich by mělo být vidět, druhá dvě jsou známá a čtvrté není překvapivé.

Lemma. *Pokud a, b jsou lichá čísla taková, že $a \mid b$, pak $2^a + 1 \mid 2^b + 1$.*

Důkaz: *Pro každé liché k platí známý rozklad*

$$A^k + B^k = (A + B)(A^{k-1} - A^{k-2}B + \ldots - AB^{k-2} + B^{k-1}).$$

Naše lemma není nic jiného než jeho přímý důsledek pro $A = 2^a$, $B = 1$ a liché číslo $k = \frac{b}{a}$. $\square$

Lemma. *Označme* ord *nejmenší přirozené číslo, pro které platí $2^{\mathrm{ord}} \equiv 1 \pmod{p}$ (tzv. řád prvku). Potom pro každé přirozené číslo m, pro které $2^m \equiv 1 \pmod{p}$ platí $\mathrm{ord} \mid m$.*

Důkaz: *Pro spor předpokládejme, že existuje $m = k \cdot \mathrm{ord} + l$, kde l je nenulový zbytek po dělení číslem* ord*, takové, že $2^m \equiv 1 \pmod{p}$. Potom je*

$$1 \equiv 2^m = 2^{k\cdot \mathrm{ord}+l} \equiv 1^k \cdot 2^l \pmod{p},$$

tedy $2^l \equiv 1 \pmod{p}$ pro $l < \mathrm{ord}$, což je spor s minimalitou ord. $\square$

Lemma. *Rovnice $3^a - 2^b = 1$ má v přirozených číslech pouze triviální řešení $a = b = 1$ a $a = 2$, $b = 3$.*

Důkaz: *Všimněme si, že pro $b \geq 2$ je a nutně sudé, protože je $2^b + 1 \equiv 1 \pmod{4}$. Dostáváme $a = 2c$, $c \in \mathbb{N}$, a následně*

$$2^b = 3^{2c} - 1 = (3^c - 1)(3^c + 1).$$

Čísla $3^c - 1$, $3^c + 1$ se liší o 2, takže pokud to nejsou zrovna čísla 2 a 4, nemohou být obě mocniny dvojky. Případ $3^c - 1 = 2$ dá $c = 1$ a posléze $a = 2$, $b = 3$. $\square$

Lemma. *Pro každé prvočíslo $q > 3$ má číslo $2^q + 1$ prvočíselného dělitele většího než q.*

Důkaz: *Uvažujme prvočíselného dělitele $p \mid 2^q + 1$. Potom je $2^q \equiv -1 \pmod{p}$. Naším velmi nepřesně řečeným plánem je, že* ord *bude skoro dělitel q (-1 namísto 1 by snad nemusela hrát velkou roli), tedy nejspíš bude $\mathrm{ord} = q$. Zároveň ale z malé Fermatovy věty víme, že $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, takže $\mathrm{ord} \mid p - 1$. To by znamenalo, že $q = \mathrm{ord} \leq p - 1$, takže p by bylo větší prvočíslo než q. Zpřesněme naše myšlenky.*

Protože je $2^q \equiv -1 \pmod{p}$, je $2^{2q} \equiv 1 \pmod{p}$. Z lemmatu 2 vyplývá, že $\mathrm{ord} \mid 2q$, což znamená, že ord *je jedno z čísel 1, 2, q, $2q$. Předpokládejme, že se nám podaří vyloučit první dva případy. Pak je $q \leq \mathrm{ord}$. Z malé Fermatovy věty a lemmatu 2 dostáváme $\mathrm{ord} \mid p - 1$, tedy $q \leq \mathrm{ord} \leq p - 1$. Ukázali jsme, že prvočíslo p je větší než q.*

Zbývá dokázat, že ord *není 1 nebo 2. Případ $\mathrm{ord} = 1$ by znamenal, že $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$, což pro žádné prvočíslo p neplatí. Případ $\mathrm{ord} = 2$ znamená, že $2^2 \equiv 1 \pmod{p}$, tedy $p = 3$. Jinými slovy pokud má číslo $2^q + 1$ prvočíselného dělitele většího než 3, pak už je tento dělitel větší než q. Pokud nemá, existuje přirozené a, pro něž $2^q + 1 = 3^a$. Z lemmatu 3 pak plyne $q = 3$, ale my uvažujeme jen $q > 3$, čímž je tento případ vyloučen.* $\square$

Za použití těchto lemmat konečně vyřešíme původní úlohu. Jistě je 2^n+1 liché, takže je i n liché. Podle lemmatu 1 pro každého dělitele d čísla n platí $2^d+1 \mid 2^n+1$. Je-li $d > 3$ a prvočíslo, existuje podle lemmatu 4 větší prvočíslo p takové, že $p \mid 2^d+1 \mid 2^n+1$. Podle zadání pak $p \mid n$. To je ale divné, protože ke každému prvočíslu $d > 3$ umíme najít větší prvočíslo $p \mid n$. Pokud není $n = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$, pak speciálně pro největšího prvočíselného dělitele $d \mid n$ dostáváme spor. V případě $n = 3^k$ zadání vynucuje $2^n + 1 = 3^a$, $a \in \mathbb{N}$. Tato rovnice má podle lemmatu 3 řešení pouze $n = 1$ a $n = 3$. První řešení nevyhovuje, zatímco druhé ano.

Poznámky opravujícího. Lemma 3 je speciálním případem slavné *Catalanovy hypotézy* (též označována jako *Mihăilescova věta*, protože až Mihăilescu ji v roce 2002 dokázal). Ta říká, že dokonce obecná diofantická rovnice $x^a - y^b = 1$ má v přirozených číslech větších než 1 jediné řešení, a sice právě $x = 3$, $a = 2$, $y = 2$, $b = 3$.

Místo lemmatu 4 lze využít speciální případ jiné věty, tentokrát *Zsigmondyho věty.* Ta mimo jiné říká, že až na jedinou výjimku platí, že číslo $a^n + b^n$, kde a, b nejsou obě jedničky, má alespoň jednoho unikátního prvočíselného dělitele, který nedělí žádné z čísel $a^k + b^k$, kde $k < n$. Tou výjimkou je právě číslo $2^3 + 1^3$. S tímto výsledkem je úloha poměrně snadná. Stačí vzít tohoto unikátního prvočíselného dělitele $p \mid 2^n + 1$. Z malé Fermatovy věty $p \mid 2^{p-1} - 1$, takže $p \mid 2^n + 2^{p-1} = 2^{p-1}(2^{n-p+1} + 1)$. To je spor s Zsigmondyho větou, pokud nejde právě o výjimku $n = 3$.

Hodně správných řešení použilo Zsigmondyho větu. Ostatní používali podobné myšlenky jako vzorové řešení. Někteří zkoumali, kdy nastává $2^k \equiv -1 \pmod{p}$. Není těžké ukázat, že pokud je ord liché, tak nikdy, a pokud je ord sudé, pak právě pro $k = (2l-1)\frac{\mathrm{ord}}{2}$. Tyto úvahy také končily úspěšným důkazem. *(Pavel Šalom)*