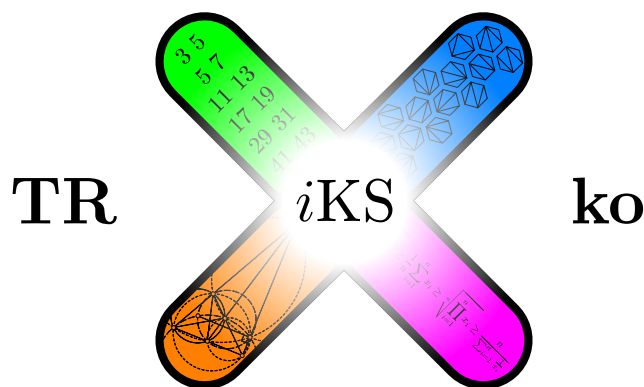




Úloha 1. Chceme napsat číslíce 1 až 9 (každou právě jednou) do tabulky 3×3 tak, aby každý řádek, sloupec i obě úhlopříčky měly součet dělitelný devíti.

1. Dokažte, že cifra ve středu musí být dělitelná třemi.
2. Vyplňte tabulku požadovaným způsobem s šestkou ve středu.

Riešenie. Vezmeme součet obou úhlopříček a prostředního sloupce a odečteme součet prvního a posledního řádku. Tak dostaneme číslo dělitelné devíti, do kterého jsme započítali pouze prostřední políčko, a to právě třikrát. Trojnásobek prostředního políčka musí být dělitelný devíti, tedy ono samo musí být dělitelné třemi. Tabulka s šestkou uprostřed může vypadat třeba takto:

1	8	9
5	6	7
3	4	2

□

Úloha 2. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla $n, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ je možné zapsat součin

$$\prod_{i=1}^{\infty} (a_i^2 - b_i^2)$$

jako rozdíl dvou čtverců (celých čísel).

Riešenie. Stačí ukázat, že $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)$ je možné napsat jako rozdíl čtverců — zbytek plyne indukci. A skutečně $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac)^2 + (bd)^2 - (ad)^2 - (bc)^2 = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$. □

Úloha 3. Vepsaná kružnice trojúhelníka ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB postupně v bodech A_1, B_1, C_1 . Středů úseček B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 označme postupně A_2, B_2, C_2 . Dokažte, že kolmice ke stranám BC, CA, AB procházející postupně body A_2, B_2, C_2 se protínají v jednom bodě.

Riešenie. Po provedení stejnoolehlosti se středem v těžišti trojúhelníka $A_1B_1C_1$ a koeficientem -2 se zkoumané přímky zobrazí na kolmice procházející body A_1, B_1, C_1 , které se protínají ve středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC . □

Úloha 4. Polynom $ax^2 + (c - b)x + (e - d)$ má reálný kořen větší než 1. Dokažte, že i polynom $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ má nějaký reálný kořen.

Riešenie. Označme kořen prvního polynomu $r > 1$ a druhý polynom p . Platí

$$p(\pm\sqrt{r}) = ar^2 \pm br\sqrt{r} + cr \pm d\sqrt{r} + e = \pm br\sqrt{r} + br \pm d\sqrt{r} + d = (1 \pm \sqrt{r})(bc + d).$$

Vzhledem k $r > 1$ mají $1 + \sqrt{r}$ a $1 - \sqrt{r}$ různá znaménka, a tedy i $p(\sqrt{r})$ a $p(-\sqrt{r})$ mají různá znaménka a mezi $-\sqrt{r}$ a $\sqrt{r}$ se tak někde nachází kořen p . $\square$

Úloha 5. Mějme konečný systém různých neprázdných konečných množin, z nichž každé dvě mají neprázdný průnik. Dokažte, že po odstranění jednoho prvku a všech množin, které jej obsahují, je možné obarvit zbylé prvky dvěma barvami tak, aby každá zbylá množina obsahovala prvky obou barev.

Riešenie. Uvažme některou nejmenší množinu X . Jeden prvek z množiny X vyhodíme, zbylé prvky množiny X obarvíme černě, všechny ostatní prvky obarvíme bíle. Žádná zbylá množina nebude celá bílá, protože každá protínala X . Žádná nebude celá černá, protože žádná není menší než X . $\square$