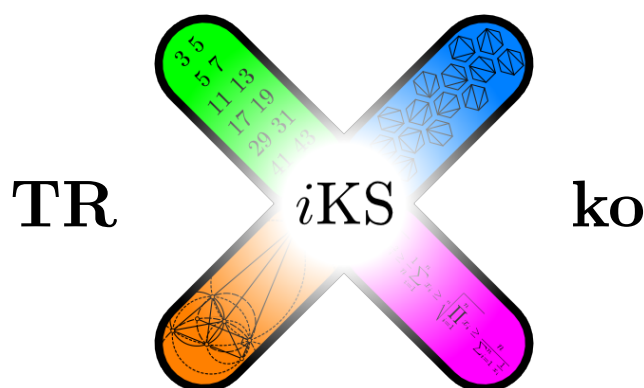




Úloha 1. Čtverec 23×23 je pokryt čtverečky 1×1 , 2×2 a 3×3 tak, že se žádné 2 nepřekrývají. Jaký nejmenší počet čtverečků 1×1 byl použit?

Řešení. Obarvíme čtverec jako šachovnici, která má černá pole v rozích. Do bílých polí napíšeme 0. Do černých 1 a -1 tak, aby 2 černá pole sousedící vrcholem neměla v sobě napsaná stejná čísla. Pak součet v zakrytých čtvercích čtvercem 2×2 je 0 a čtverečkem 3×3 je -3 , 0, nebo 3. Součet v nezakrytých polích je tedy invariantní modulo 3, pokud nebudeme používat čtvereček 1×1 . Jenže součet všech čísel na šachovnici je 23, nebo -23 . To není dělitelné 3, takže potřebujeme alespoň 1 čtvereček 1×1 .

A jeden zároveň stačí. Ze čtverců 2×2 a 3×3 umíme poskládat obdélník 11×12 a ze 4 takových obdélníků umíme vyplnit celý velký čtverec, kromě čtverečku uprostřed, kam umístíme čtvereček 1×1 . a tím jsme našli konstrukci pro 1 čtvereček 1×1 . $\square$

Úloha 2. Najdi všechna přirozená čísla n taková, že $n^2 \mid 3^n + 1$.

Řešení. Vyhovuje pouze $n = 1$. Všimneme si, že n musí být liché. Kdyby bylo sudé, tak $4 \mid n^2 \mid 3^n + 1$, což ale nejde, protože 3 není kvadratický zbytek modulo 4.

Předpokládejme platnost výrazu pro nějaké $n > 1$, a nechť p je nejmenší prvočíselný dělitel n . Už jsme vyloučili $p = 2$, zřejmě nemůže být $p = 3$, takže $p \geq 5$. Platí $p \mid 3^{2n} - 1 = (3^n + 1)(3^n - 1)$. Nechť r je nejmenší přirozené číslo, pro které $p \mid 3^r - 1$ (takzvaný řád trojky modulo p). Pak $r \mid 2n$ (známé tvrzení o řádu, které člověk snadno dokáže tak, že jinak by $2n \bmod r$ bylo menší číslo splňující $p \mid 3^x - 1$), ale také podle Malé Fermatovy věty $r \mid p - 1$. Pak platí i $r \mid \gcd(2n, p - 1)$. Čísla $3^1 - 1$ a $3^2 - 1$ nemají prvočíselné dělitele kromě 2. Takže $r \geq 3$ a $\gcd(2n, p - 1) \geq r \geq 3$, takže $\gcd(n, p - 1) > 1$. To je spor s tím, že p je nejmenší prvočíselný dělitel n . $\square$

Úloha 3. V rovině je dáno n mnohoúhelníků tak, že každé 2 mají společný bod. Dokaž, že existuje přímka, která má společný bod s každým z těchto mnohoúhelníků.

Řešení. Promítneme si všechny mnohoúhelníky na osu x a na ní si poznačíme levý a pravý krajní bod každého obrazu mnohoúhelníka, pak přímka kolmá na osu x , procházející nejmenším pravým krajním bodem bude vyhovovat zadání. Aby měly každé 2 mnohoúhelníky společný bod, tak pravý krajní bod jednoho musí být větší nebo roven levému krajnímu bodu druhého, takže nejmenší pravý krajní bod označený na ose musí být větší, než největší levý krajní bod, proto průmět každého mnohoúhelníka na osu x obsahuje námi vybraný bod, takže přímka, která je kolmá na osu x a prochází tímto bodem vyhovuje zadání. $\square$