Zadání 5. série

Termín odeslání: 22. března 2012

Adresa pro odeslání:
Korespondenční seminář iKS
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Česká republika

Úloha C5. V řadě je N žárovek očíslovaných postupně 1 až N. *Krokem* rozumíme přepnutí tří žárovek, jejichž čísla a, b, c splňují $a + c = 2b$. Určete všechna N, pro něž lze konečnou posloupností kroků všechny žárovky zhasnout nezávisle na jejich počátečním stavu.

Úloha N5. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ platí $n \mid \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{n} - \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{n-1}$.

Poznámka: patrové mocniny vyhodnocujeme shora, tj. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Úloha A5. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tvořena pouze přirozenými čísly, přičemž každé z nich alespoň jednou obsahuje. Navíc existuje reálné číslo $k > 0$ takové, že kdykoliv $m \neq n$, pak

$$\frac{1}{k} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < k.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - n| < \frac{1}{2}k^2$.

Úloha G5. Trojúhelník ABC splňující $|AB| \neq |AC|$ je vepsán do kružnice ω. Tečny vedené bodem A ke kružnici opsané středům jeho stran se jí dotýkají v bodech D, E. Ukažte, že přímka DE, přímka BC a tečna k ω vedená bodem A procházejí jedním bodem.