TR *i*KS **ko**

Úloha 1. *Nechť $s(n)$ značí ciferný součet přirozeného čísla. Pro nějaké přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ platí, že $s(N) = 10000$ a $s(5N) = 5000$. Může se stát, že N je liché?*

Řešení. Nemůže. Označme $M = 5N$, potom platí $s(M) = 5000$ a $s(2M) = s(10N) = s(N) = 10000$. Platí tedy $s(2M) = 2s(M)$ a zároveň $5 \mid M$. Předpokládejme, že N je liché, potom poslední cifra M je 5. Podívejme se, jak se ciferný součet chová při násobení dvěma. Když vynásobíme cifru c dvěma, tak buď platí $c < 4$ a $s(2c) = 2s(c)$, nebo je $c \geqslant 5$. V tomto případě se cifra na místě c sníží alespoň o jedna a o pozici dále se zvýší o jedna, tedy cifra přispívá nekladný počet ke kvantitě $s(2M) - 2s(M)$. Dohromady získáme, že $s(2M) \leqslant 2s(M)$ a rovnost nastane, pouze pokud všechny cifry M jsou nejvýše 4. Víme ale, poslední cifra M je 5, což je spor. $\square$

Úloha 2. *Je dán trojúhelník ABC. Označme A' druhý průsečík výšky z A s kružnicí opsanou ABC. Ať A'_B, A'_C jsou obrazy bodu A' podle přímek po řadě AB a AC a označme si ℓ_A přímku skrz $A'_B A'_C$. Analogicky definujme přímky ℓ_B a ℓ_C. Dokaž, že se přímky ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C protínají v jednom bodě.*

Řešení. Označme H ortocentrum ABC a D patu z A na BC. Je známé, že D je střed úsečky HA'. Přímka ℓ_A je obraz Simsonovy přímky bodu X ve stejnolehlosti s koeficientem 2, prochází proto bodem H. Všechny přímky proto procházejí bodem H. $\square$

Úloha 3. *Máme v kruhu 2022 lidí z 1011 zemí, dva z každé země. Dokaž, že je můžeme rozdělit do dvou skupin tak, že:*

(1) Ve stejné skupině nejsou dva lidé ze stejné země.

(2) Ve stejné skupině nejsou tři po sobě jdoucí lidé z kruhu.

Řešení. Očíslujme si lidi v kruhu po řadě $1, 2, \ldots, 2022$ a rozdělme si je do párů $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2021, 2022\}$. Nyní dejme člověku 1 černý šátek. Poté opakujme následující proces. Vždy, když někomu dáme šátek jedné barvy, dáme jeho sousedovi v páru a zároveň člověku ze stejné země šátek barvy opačné. Jakmile už nebudeme moci pokračovat v procesu, vybereme si novou osobu bez šátku a opakujeme. Takto zaručíme, že v každém páru je šátek obou barev a tedy neexistuje jednobarevná trojice, zároveň dva lidé ze stejné země mají šátek jiné barvy. Můžeme tedy dělit podle barvy šátku.

$\square$

Úloha 4. *Nechť M je množina přirozených čísel taková, že pro každá dvě $a, b \in M$ platí $a^2 - ab + b^2 \mid (ab)^2$. Dokaž, že M má konečně mnoho prvků.*

Řešení. Uvažme dvě $a, b \in M$ a zapišme $a = dx$, $b = dy$, kde d je největší společný dělitel a a b. Potom musí platit:

$$\begin{aligned} a^2 - ab + b^2 &\mid (ab)^2, \\ d^2(x^2 - xy + y^2) &\mid d^4(xy)^2, \\ x^2 - xy + y^2 &\mid d^2(xy)^2. \end{aligned}$$

Protože jsou x, y navzájem nesoudělná, tak je $(xy)^2$ nesoudělné s $x^2 - xy + y^2$. To znamená, že:

$$x^2 - xy + y^2 \mid d^2 \implies a^2 - ab + b^2 \mid d^4.$$

Platí proto nerovnost $a^2 - ab + b^2 \leqslant d^4 \leqslant a^4$. Pro fixní a vyhovuje této nerovnosti pouze konečně mnoho přirozených b, tudíž M má konečně mnoho prvků. $\square$

Úloha 5. *Dokaž, že pro všechná kladná reálná čísla $a, b, c \in [0, 1]$ platí:*

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant 2.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení. Můžeme odhadnout $\frac{a}{bc+1} \leqslant \frac{a}{abc+1}$ a zbyde nám dokázat:

$$\frac{a+b+c}{abc+1} \leqslant 2 \Leftrightarrow a + b + c \leqslant 2abc + 2.$$

Pokud si zafixujeme dvě z proměnných, tak získáme lineární funkci v té třetí, její extrémy nastanou na okrajích definičního oboru, tj. v bodech 0 a 1. Můžeme proto předpokládat, že $a, b, c \in \{0, 1\}$ a snadno ověříme, že nerovnost vždy platí a rovnost nastane pro $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ a permutace. $\square$