Riešenie 1. série

Úloha G1. *Daný je kruh k. Nájdite všetky možné polohy vrcholu A rovnobežníkov $ABCD$, v ktorých $|AC| < |BD|$ a úsečka BD leží vnútri k.*

Riešenie. Celé riešenie rozdelíme do dvoch krokov. Prvý krok bude ukázať, že vzdialenosť bodu A od stredu S zadanej kružnice k je ostro menšia ako $r\sqrt{2}$, kde r je polomer kružnice k. Druhý krok bude konštrukcia množiny bodov A, teda ukážeme, že množina bodov, ktoré spĺňajú podmienku zo zadania, je kruh bez hranice s polomerom $r\sqrt{2}$ a stredom S.

Predpokladajme, že máme skonštruovaný rovnobežník $ABCD$, ktorý vyhovuje zadaniu. Nech X je stred BD. Ďalej pripusťme, že body B a D môžu ležať na kružnici k, teda nech BD je tetiva kružnice k. Ak by neležali, môžeme posunúť celý rovnobežník $ABCD$ ďalej od S a tým zväčšiť vzdialenosť bodu A od S. Teraz skúsme zhora odhadnúť vzdialenosť bodu A od S. Z trojuholníkovej nerovnosti vieme, že

$$|SA| \leq |XA| + |SX|.$$

Zo zadania máme, že $|XA| < |XB|$, a teda platí

$$|XA| + |SX| < |XB| + |SX|.$$

Ďalej vieme, že SX je kolmé na BD, a teda použitím Pytagorovej vety dostaneme $|SX| = \sqrt{r^2 - |XB|^2}$. Po dosadení do nerovnosti teda máme

$$|XA| + |SX| < |XB| + |SX| = |XB| + \sqrt{r^2 - |XB|^2}.$$

Posledný výraz môžeme ešte odhadnúť nerovnosťou medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom a dostaneme

$$|XB| + \sqrt{r^2 - |XB|^2} \leq 2\sqrt{\frac{|XB|^2 + r^2 - |XB|^2}{2}} = r\sqrt{2}.$$

Teraz nám už stačí len spojiť všetky nerovnosti a dostaneme $|SA| < r\sqrt{2}$. Nech l je kružnica so stredom S a polomerom $r\sqrt{2}$. Teraz nám stačí ukázať, že ľubovoľný bod vo vnútri kružnice l vyhovuje zadaniu.

Najskôr ukážeme, že vieme zostrojiť taký štvoruholník $ABCD$, že bod A bude ľubovoľne blízko ku kružnici l. Vezmime si teda takú tetivu $B'D'$ kružnice k, že uhol $B'SD'$ je pravý. Teraz zostrojme štvorec $B'SD'A'$, pričom sa dá ľahko ukázať, že bod A' leží na kružnici l. Na úsečke SA' zvoľme bod A tak, že $|AA'| = \varepsilon$ a na úsečke $B'D'$ zvoľme body B a D tak, aby $|BB'| = |DD| = \varepsilon/2$. Bod C zostrojíme ako obraz bodu A v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky BD. Takto nám vznikne štvoruholník $ABCD$, pričom bod A je ľubovoľne blízko ku kružnici l. Ak by sme ale ε volili ľubovoľne na intervale $(0, |B'D'|/2)$, tak vieme zostrojiť bod A v ľubovoľnej vzdialenosti medzi stredom úsečky $B'D'$ a kružnicou l. Navyše, ak vieme zostrojiť bod A v nejakej vzdialenosti od S, tak vieme tento bod orotovať okolo S o ľubovoľný uhol. Tento poznatok spolu s tým, že bod A vo vnútri k vieme zostrojiť jednoducho tak, že zostrojíme ľubovoľne malý štvoruholník $ABCD$, aby bol celý v k, nám dáva konštrukciu štvoruholníka $ABCD$ pre ľubovoľnú polohu bodu A vnútri kružnice l. Teda riešením je $\{A; |SA| < r\sqrt{2}\}$.

(Tomáš Kocák)

Úloha N1. *Nájdi všetky prvočísla p také, že $p(2^{p-1} - 1)$ je k-ta mocnina prirodzeného čísla pre nejaké $k > 1$.*

Riešenie. Ľahko zistíme, že $p = 3$ je riešením, a naopak $p = 2$ nevyhovuje. Ďalej nech $p \geq 5$, z čoho $\frac{p-1}{2}$ je prirodzené číslo vačšie ako 1 a výraz zo zadania sa rovná

$$p\big(2^{(p-1)/2} - 1\big)\big(2^{(p-1)/2} + 1\big).$$

Pretože čísla $2^{(p-1)/2}-1$ a $2^{(p-1)/2}+1$ sú nesúdeliteľné, práve jedno z nich je k-ta mocnina nejakého nepárneho prirodzeného čísla $a>1$. V prvom prípade dostaneme podmienku

$$2^{(p-1)/2}-1=a^k \iff 2^{(p-1)/2}-a^k=1$$

a v druhom

$$2^{(p-1)/2}+1=a^k \iff a^k-2^{(p-1)/2}=1.$$

Toto sa dá odbiť na jeden riadok. Totiž podľa *Mihăilescu's theorem – Catalan's conjecture* môže nastať iba druhá možnosť pre $\frac{p-1}{2}=3$. Ľahko overíme, že druhé možné riešenie $p=7$ naozaj vyhovuje všetkým podmienkam našej úlohy.

Ukážme si, ako postupovať bez tej „mega" vety (podľa *Rada Švarce*).

- $2^{(p-1)/2}-1=a^k$: Máme

$$2\left(2^{(p-3)/2}-1\right)=2^{(p-1)/2}-2=a^k-1=(a-1)\left(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+a+1\right).$$

  Pretože výraz naľavo je deliteľný dvomi, ale nie štyrmi, musí byť práve jedna zo zátvoriek párna. Ale a je nepárne, teda druhá zátvorka musí byť nepárna, preto k musí byť tiež nepárne. S touto vedomosťou upravme výraz ešte inak.

$$2^{(p-1)/2}=a^k+1=(a+1)\left(a^{k-1}-a^{k-2}+\cdots-a+1\right).$$

  Z nepárnosti druhej zátvorky dostávame $2^{(p-1)/2}=a+1$ a

$$0=a^{k-1}-a^{k-2}+\cdots-a=(a-1)\left(a^{k-2}+a^{k-4}+\cdots+a^3+a\right).$$

  Nakoniec z kladnosti druhej zátvorky posledného výrazu usúdime $a=1$, čo vedie na prípad $p=3$.
- $2^{(p-1)/2}+1=a^k$: Z rovnosti

$$2^{(p-1)/2}=(a-1)\left(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+a+1\right)$$

  plynie párnosť k, preto môžme písať $2^{(p-1)/2}=m^2-1=(m-1)(m+1)$. Obe zátvorky sú mocniny dvojky, odkiaľ $m=3$ a $p=7$, čo overíme, že vyhovuje.

Poznámky opravujúceho. Ako sa ukazuje, úloha nebola ťažká, stačilo iba vhodne upravovať výrazy. Takisto riešenia boli rôznorodé. Prvou cestou sa vydali *Bui Truc Lam, Josef Svoboda* a *Štepán Šimsa*. Za zmienku stojí okrem spomenutých riešenie *Tondy Le Anh Dunga*, ktorý použil *Lifting The Exponent Lemma (LTE)* na vyriešenie prípadu $2^{(p-1)/2}=a^k-1$. *(Filip Sládek)*

Úloha C1. *Dané sú celé čísla* $1\le a_1,a_2,\dots,a_m\le n$ *a* $1\le b_1,b_2,\dots,b_n\le m$. *Dokážte, že existujú indexy* $p\le q$ *a* $r\le s$ *také, že* $a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q=b_r+b_{r+1}+\cdots+b_s$.

Riešenie. V príklade chceme skúmať súčty postupností, preto sa ponúka definovať si postupnosť čiastočných súčtov $\{A_i\}_{i=0}^m$, kde $A_0=0$, $A_i=\sum_{k=1}^i a_k$ a $\{B_j\}_{j=0}^n$, kde $B_0=0$, $B_j=\sum_{k=1}^j b_k$. Stačí nám teraz ukázať, že existujú také $0\le c_1<c_2\le m$ a $0\le d_1<d_2\le n$, že $A_{c_2}-A_{c_1}=B_{d_2}-B_{d_1}$.

BUNV $B_n\ge A_m$. Pre každé $i\in\{0,1,\dots,m\}$ sa pozrime na postupnosť $\{S_j\}_{j=0}^n$ definovanú predpisom $S_j=(A_i+B_j)$. Týchto postupností je $m+1$ a každá z nich obsahuje $n+1$ čísel. Vezmime si jednu ľubovoľnú z nich pre pevné i. Rozdiel dvoch po sebe idúcich členov môže byť maximálne m, lebo $S_{j+1}-S_j=(A_i+B_{j+1})-(A_i+B_j)=B_{j+1}-B_j=b_{j+1}\le m$. Prvý člen odhadneme zhora číslom A_m, pretože $S_0=A_i+B_0=A_i\le A_m$. Na druhej strane posledný člen je aspoň A_m, pretože $S_n=A_i+B_n\ge B_n\ge A_m$.

Pozrime sa na interval $[A_m,A_m+m)$. Každá postupnosť má aspoň jeden člen v tomto intervale, pretože prvý člen je najviac A_m, posledný člen je aspoň A_m a krok v postupnosti je maximálne m. Kedže máme $m+1$ postupností a náš interval obsahuje iba m čísel, podľa *Dirichletovho princípu* existujú dve rôzne postupnosti, ktoré obsahujú to isté číslo. Inak povedané, pre nejaké $0\le c_1<c_2\le m$ existujú $0\le d_1,d_2\le n$ také, že $A_{c_1}+B_{d_2}=A_{c_2}+B_{d_1}$. Úpravou dostaneme $A_{c_2}-A_{c_1}=B_{d_2}-B_{d_1}$, z čoho hneď vyplýva $d_1<d_2$, čím je dôkaz hotový.

(Michal „Miki" Kopf)

Úloha A1. *Dokážte, že ak reálne čísla a, b, c spĺňajú $a+b+c=0$, potom*

$$\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1}+\frac{(2b+1)^2}{2b^2+1}+\frac{(2c+1)^2}{2c^2+1}\geq 3.$$

Kedy nastáva rovnosť?

Riešenie. Zrejme vždy nájdeme dve neznáme s rovnakým znamienkom. BUNV nech sú to a a b. Vyjadrime si $c=-a-b$. Od tretieho zlomku aj od pravej strany odčítame 3 a ekvivalentne upravujeme

$$\begin{gathered}\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1}+\frac{(2b+1)^2}{2b^2+1}+\frac{(2(-a-b)+1)^2}{2(-a-b)^2+1}-3\geq 3-3,\\
\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1}+\frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1}+\frac{4(a+b)^2-4(a+b)+1-6(a+b)^2-3}{2(a+b)^2+1}\geq 0,\\
\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1}+\frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1}\geq\frac{2(a+b)^2+4(a+b)+2}{2(a+b)^2+1},\\
\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1}+\frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1}\geq\frac{2a^2+4a+1+2b^2+4b+1+4ab}{2(a+b)^2+1}.\end{gathered}$$

Z toho pekne vidno, že stačí „zmeniť“ $4ab$ na $2a^2+2b^2$ a dostaneme na ľavej a pravej strane „rovnaké“ čitatele. Platí $(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Leftrightarrow 2a^2+2b^2\geq 4ab$. Kvôli kladnosti výrazu $2(a+b)^2+1$ pravú stranu nezmenšíme, ak $4ab$ „nahradíme“ $2a^2+2b^2$, čiže stačí dokázať silnejšiu nerovnosť

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1}+\frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1}\geq\frac{4a^2+4a+1+4b^2+4b+1}{2(a+b)^2+1}. \tag{1}$$

Rozdeľme (1) na dve nerovnosti

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1}\geq\frac{4a^2+4a+1}{2(a+b)^2+1}\qquad\text{a}\qquad\frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1}\geq\frac{4b^2+4b+1}{2(a+b)^2+1}.$$

Tieto našťastie platia, a teda aj ich súčet platí. Totiž z toho, že a, b majú rovnaké znamienko dostaneme $|a+b|\geq|a|$. Odtiaľ $2(a+b)^2+1=2|a+b|^2+1\geq 2|a|^2+1=2a^2+1>0$ a $4a^2+4a+1=(2a+1)^2>0$, vďaka čomu platí prvá čiastková nerovnosť a analogicky aj druhá.

Ostáva vyriešiť, kedy nastáva rovnosť. Úpravy na začiatku boli ekvivalentné, čiže rovnosť v pôvodnej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď „nahradením“ nič nestratíme a zároveň v oboch čiastkových nerovnostiach nastáva rovnosť. Z prvej podmienky dostaneme podmienku $a=b$ a vyšetrovanie čiastkových nerovností sa nám zleje do vyšetrovania jednej nerovnosti

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1}\geq\frac{4a^2+4a+1}{2(2a)^2+1}\iff\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1}\geq\frac{(2a+1)^2}{4a^2+1}.$$

Máme dva prípady – čitatele nulové alebo rovnaké menovatele. Prvý prípad nastáva pre $a=-\frac{1}{2}$ a druhý pre $a=0$. Všetky prípady rovnosti preto realizujú trojice $(0,0,0)$ a permutácie $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$.

Iné riešenie. Platí

$$\begin{aligned}(b-c)^2\geq 0\Leftrightarrow b^2+c^2\geq 2bc\Leftrightarrow 2(b^2+c^2)\geq(b+c)^2\Rightarrow\\
\Rightarrow\tfrac{4}{3}a^2+\tfrac{4}{3}(b^2+c^2)\geq\tfrac{4}{3}a^2+\tfrac{2}{3}(b+c)^2=\tfrac{4}{3}a^2+\tfrac{2}{3}(-a)^2=2a^2,\end{aligned}$$

teda

$$
\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}} \frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} &\geq \sum_{\text{cyc}} \frac{(2a+1)^2}{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+1} \\
&= 3 \cdot \frac{(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2}{4(a^2+b^2+c^2)+3} \\
&= 3 \cdot \frac{4a^2+4b^2+4c^2+4(a+b+c)+3}{4a^2+4b^2+4c^2+3} \\
&= 3 \cdot \frac{4a^2+4b^2+4c^2+3}{4a^2+4b^2+4c^2+3} \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Z toho vyplýva, že rovnosť nastáva práve vtedy, ak platia rovnosť

$$
\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} = \frac{(2a+1)^2}{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+1}
$$

a podobne pre b a c. Analogicky ako v prvom vzorovom riešení, buď sú nulové čitatele, alebo rovnaké menovatele. Rozobratím týchto prípadov aj v cyklických nerovnostiach dostaneme žiadaný výsledok.

Poznámky opravujúceho. Všetci riešitelia, ktorí dokázali nerovnosť, buď mali podobné riešenie s jedným z týchto dvoch riešení, alebo to roznásobovali. Nájsť riešenie $(0, 0, 0)$ bolo triviálne, čiže sa za to neudeľoval žiaden bod. Viacerí z riešiteľov zabudli preskúmať, kedy nastáva rovnosť. Dokázať nerovnosť, ak je jedna neznáma nulová alebo ak sú nejaké dve neznáme kladné, bolo celkom ľahké a vôbec neuľahčovalo dôkaz všeobecného prípadu. Zaujímavé je, že tých, čo našlo riešenie $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, bolo menej ako tých, čo dokázali nerovnosť. *(Viktor Lukáček)*