Zadání 5. série

Termín odeslání: 9. prosince 2013

Adresa pro odeslání: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech Republic

Úloha A5. Pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ dokažte rovnost

$$\lfloor \sqrt[2]{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor + \lfloor \log_3(n) \rfloor + \cdots + \lfloor \log_n(n) \rfloor .$$

Úloha G5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. O kružnici k řekneme, že je *šikovná*, pokud prochází bodem A, protíná strany AB a AC (průsečíky označíme postupně X_k, Y_k) a navíc průsečík úseček BY_k a CX_k leží na k. Dokažte, že všechny šikovné kružnice prochází pevným bodem různým od A.

Úloha C5. Na kružnici leží dva bílé žetony (a žádné černé). Je povoleno provádět následující operace.

- Vložíme na kružnici další bílý žeton a sousední dva žetony přebarvíme (z bílé na černou a obráceně).
- Zbývají-li na kružnici alespoň 3 žetony, jeden bílý žeton odebereme a přebarvíme dva žetony, se kterými tento odebraný sousedil.

Je možné dosáhnout stavu, kdy zbudou na kružnici pouze dva černé žetony a žádné bílé?

Úloha N5. David zkoumal monický[1] polynom p s celočíselnými koeficienty. Snažil se dokázat, že tento polynom nemá celočíselný kořen tak, že chtěl najít přirozené číslo n takové, aby pro všechna $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ platilo

$$p(k) \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

Zjistil ale, že takové n není možné najít. Musí už v takovém případě polynom p mít celočíselný kořen?

[1] Monický polynom je takový, který má koeficient u členu nejvyššího stupně roven jedné, tedy například polynom $x^3 + 2x^2 + 3$ je monický, zatímco polynom $2x^2 + 1$ není.