Řešení 2. série

Úloha N2. *Dokažte, že existuje přirozené číslo N takové, že kdykoli $2^n > N$ (pro n přirozené), tak už má 2^n ciferný součet (v desítkové soustavě) větší než 2014.*

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že desítkový zápis žádné mocniny dvojky (dále jen mocniny) nekončí na nulu, neboť tato mocnina není dělitelná pěti. Pokud je těch mocnin dvojky, jejichž ciferný součet je nejvýše roven 2014 (budeme jim říkat *poloprázdné*), konečně mnoho, zřejmě stačí za N zvolit největší z nich.

Předpokládejme nyní pro spor, že tomu tak není. Snadno si rozmyslíme, že potom už existuje taková poloprázdná mocnina, jejíž desítkový zápis obsahuje souvislý úsek $3k$ nul, za kterým se nachází méně než k dalších číslic. Dokázat to můžeme třeba tak, že shora odhadneme maximální počet číslic, které může mít desítkový zápis poloprázdné mocniny, která to nesplňuje. Začneme s první (nenulovou) číslicí zprava, bezprostředně před ní může být nejvýše $3 \cdot 1 + 2 = 5$ nul vedle sebe, za následující (směrem doleva) nenulovou číslicí může být nejvýše $3(1 + 5 + 1) + 2 = 23$ nul vedle sebe atd. Po vyčerpání všech nejvýše $2014-ti$ nenulových pozic dostaneme zmíněný horní odhad na počet číslic, který ovšem nějaká poloprázdná mocnina jistě přesáhne (je jich nekonečně mnoho).

Vezměme si tedy nějakou takovou a označme ji 2^M. Zapišme ji jako $2^M = A \cdot 10^l + B$, kde $A, B \in \mathbb{N}$ a l-tou číslicí zprava začíná úsek $3k$ nul vyhovující výše zmíněnému požadavku, tedy $l - 3k < k$ a $B < 10^{l-3k} < 16^{l-3k} < 2^{4(l-3k)} < 2^l$, protože $l - 3k < k \Rightarrow 4(l - 3k) < l$, což dokážeme jednoduchou úpravou. Zároveň víme, že $10^l \le 2^M \Rightarrow l < M$, takže $2^l \mid 2^M$. Navíc $2^l \mid 10^l$, tedy dostáváme $2^l \mid B$. To je ovšem spor, protože již víme, že $0 < B < 2^l$.

Poznámky opravujícího. Většina řešitelů se s úlohou zdárně vypořádala, ačkoliv mnohdy jsem musel využít všechny své věštecké schopnosti, abych to zjistil. Formulace byly poměrně různorodé, společnou kostrou těch správných bylo nalezení tak vysoké (nebo spíš dlouhé) mocniny dvojky, že už v ní (a každé další) kvůli nějaké dělitelnosti nemůže být jen 2014 nenulových cifer. Ta ostatní se nejčastěji snažila dokázat, že v mocnině dvojky se může vyskytovat jen omezeně dlouhý úsek nul, což neplatí, viz následující konstrukce:

Zvolme libovolné přirozené n. K němu najdeme přirozené k tak, aby $2^k \equiv 1 \pmod{5^n}$. Potom platí $2^{k+n} \equiv 0 \pmod{2^n}$ a $2^{k+n} \equiv 2^k \cdot 2^n \equiv 2^n \pmod{5^n}$, tedy z Čínské zbytkové věty plyne $2^{n+k} \equiv 2^n \pmod{10^n}$. Z posledních n cifer ($2^k \equiv 1 \pmod{5^n} \Rightarrow 2^{n+k} > 10^n$) čísla 2^{n+k} je tedy maximálně posledních

$$\lfloor \log_{10}(2^n) \rfloor + 1 = \lfloor n \log_{10}(2) \rfloor + 1 \le \frac{n}{2}$$

nenulových. *(David Hruška)*

Úloha C2. *David má n-prvkovou množinu přirozených čísel ($n \ge 1$) a vyrobil si lístečky se součty všech možných podmnožin – celkem tedy 2^n lístečků (součet prázdné množiny je roven nule). Dokažte, že může rozdělit všechny lístečky do dvou hromádek A a B, aby bylo splněno následující: Kdykoli zvolíme číslo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a číslo na každém lístečku umocníme na k-tou, bude součet (umocněných) čísel v hromádce A stejný jako součet (umocněných) čísel v hromádce B.*

Řešení. Na hromádku A dáme lístečky vzniklé sečtením lichého počtu čísel a na hromádku B lístečky vzniklé sečtením sudého počtu čísel. Ukážeme, že pro takovéto rozdělení platí podmínka – mějme tedy $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Jednotlivé lístečky budeme vnímat jako formální součty prvků Davidovy množiny (tedy nezajímáme se o hodnoty těchto prvků). Takové součty formálně umocníme na k-tou (tedy roznásobíme), ale pro pohodlnější kombinatorickou manipulaci nevyužijeme komutativitu násobení[1]

[1]Komutativita násobení je často automaticky používané tvrzení, že $x \cdot y = y \cdot x$.

Takto z každého lístečku umocněním na k-tou vznikne součet všech možných uspořádaných součinů o k činitelích, které jsou ze seznamu sčítanců daného lístečku. Například

$$(a+b)^3 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$$

Zbývá ukázat, že každý takový k-prvkový uspořádaný součin se vyskytuje stejněkrát na hromádce A jako na hromádce B. Označme S množinu činitelů jednoho takového pevného součinu s. Pak součin s vypadl právě jednou ze všech lístečků, které sčítají nějakou (ne nutně ostrou) nadmnožinu S. Uvažme pevné c z Davidovy množiny, které není v S (určitě existuje, protože $k < n$). Pak popárujeme každý lísteček s lístečkem z druhé hromádky, který vznikne přidáním nebo odebráním sčítance c. Tato operace nemá vliv na to, zda z lístečku umocněním vypadl součin s, sestrojili jsme tak bijekci mezi součiny s na hromádce A a na hromádce B, a proto je jich na obou hromádkách stejně.

Poznámky opravujícího. Vzorové ignorování komutativity nikdo nepoužil, nebylo příliš potřeba – místo toho stačilo nějak okecat intuitivní fakt, že počet daných (neuspořádaných) součinů, co vypadne ze závorky nezávisí na sčítancích, které jsou v závorce navíc.

Další krok – bijekce přidáním/odebráním nepoužitého prvku se již občas vyskytla, ale častěji jste rozdělili součty v A a v B podle počtu sčítanců a pak dokazovali identitu

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots ,$$

nejčastěji pomocí binomické věty z $(1-1)^n = 0$.

Ještě jiný přístup zvolily naše řešitelky s iniciálami K. K. a úlohu pokořily indukcí podle n. *(Mirek Olšák)*

Úloha A2. *Nechť kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ splňují*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4).$$

Dokažte, že pak už každá trojice těchto čísel může být délkami stran nedegenerovaného trojúhelníka.

Řešení. Ukážeme si dvě řešení – jedno standardní a jedno trikové.

Pomocí kvadratické rovnice

Postupujme indukcí. Nejprve pro $n = 3$. Zadaná nerovnost se dá ekvivalentně přepsat do tvaru

$$(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2) > 0.$$

Předpokládejme BÚNO $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ (to můžeme díky symetrii). Pak $a_1 + a_2 - a_3 \geq a_1 > 0$ a $a_3 + a_1 - a_2 \geq a_3 > 0$. Navíc $a_1 + a_2 + a_3 > 0$ z čehož plyne i $a_2 + a_3 - a_1 > 0$ a čísla a_1, a_2, a_3 tedy splňují všechny tři trojúhelníkové nerovnosti.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokážeme ho pro $n+1$. Víme, že platí:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2)^2 > n(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_{n+1}^4),$$

což si můžeme přepsat jako kvadratickou nerovnost v a_{n+1}^2:

$$(n-1)a_{n+1}^4 - 2a_{n+1}^2(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + n(a_1^4 + \cdots + a_n^4) - (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^2 < 0.$$

Jelikož je koeficient u kvadratického členu kladný a nerovnost pro naše a_{n+1} platí, musí být diskriminant D kladný. Takže

$$\begin{aligned} 0 < \frac{D}{4} &= (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^2 - n(n-1)(a_1^4 + \cdots + a_n^4) + (n-1)(a_1^2 + \cdots + a_n^2)^2 \\ &= n((a_1^2 + \cdots + a_n^2)^2 - (n-1)(a_1^4 + \cdots + a_n^4)). \end{aligned}$$

Platí tedy nerovnost ze zadání pro čísla $a_1, \ldots, a_n$ a z indukčního předpokladu víme, že každá trojice z těchto čísel splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Kdybychom udělali stejnou úvahu s jinou proměnnou, zjistili bychom to samé i o trojicích s a_{n+1}. Tím je důkaz hotov.

Řešení podle Patrika Baka

Podobně jako v předchozím řešení budeme postupovat indukcí a dokážeme tvrzení pro $n = 3$. Nechť tvrzení platí pro n a dokažme ho pro $n+1$. Označme $P = a_1^2 + \cdots + a_n^2$ a $Q = a_1^4 + \cdots + a_n^4$. Ze zadání víme, že $(P + a_{n+1}^2)^2 > n(Q + a_{n+1}^4)$. To upravíme do tvaru

$$(n-1)\left(a_{n+1}^2 - \frac{P}{n-1}\right)^2 < \frac{nP^2}{n-1} - nQ.$$

Z toho máme $P^2 > (n-1)Q$, což je nerovnost ze zadání pro n proměnných. Zbytek zakončíme stejně, jako v minulém řešení.

Poznámky opravujícího. Objevilo se několik různých řešení. Kromě podobných těm výše ještě někteří dokazovali obměněnou implikaci a využívali Cauchy-Schwarzovu nerovnost ve tvaru

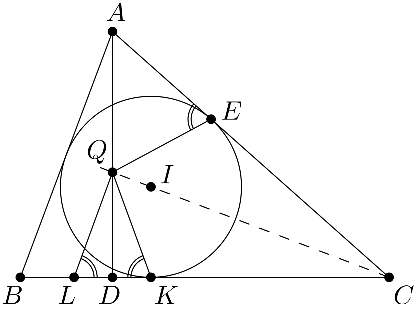
$$(1 + 1 + \cdots + 1)\left(\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2}\right)^2 + a_4^4 + \cdots + a_n^4\right) \geq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^2.$$

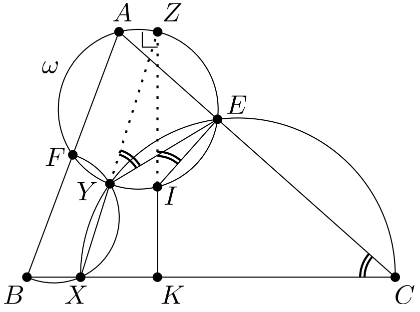
Poté jim stačilo dokázat tvrzení pro $n = 3$. Těm, kterým se úlohu nepodařilo vyřešit, mohu vřele doporučit seriál o nerovnostech,[2] který všechny základní (a některé pokročilejší) metody velice srozumitelně vysvětluje. *(Štěpán Šimsa)*

Úloha G2. *V trojúhelníku ABC označme E, F body dotyku kružnice vepsané se stranami AC, AB. Osy úhlů u vrcholů B, C protnou výšku AD postupně v bodech P, Q. Kružnice opsané trojúhelníkům BFP a CEQ se protnou v X a Y. Dokažte, že přímka XY prochází středem úsečky AD.*

Řešení. Je-li $|AB| = |AC|$, je tvrzení zřejmé. Dále búno ať $|AB| < |AC|$. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K její bod dotyku se stranou BC. Dále označme L obraz K podle D. Dokážeme, že L je jedním z průsečíků kružnic opsaných trojúhelníkům BFP a CEQ.

To je snadné. Díky osovým souměrnostem (podle AD a CI) platí $|\angle QLC| = |\angle QKB| = |\angle QEA|$, takže čtyřúhelník $LCEQ$ je tětivový. Analogicky se ukáže, že i $LBFP$ je tětivový. Bod L tedy můžeme přeznačit na (BÚNO) X.





[2]Najdete ho v archivu semináře PraSe: *http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php*.

Teď můžeme smazat body P a Q a na kružnice ze zadání nahlížet jako na kružnice opsané „jednodušším“ trojúhelníkům BFX a CEX. Je známé, že v takovém obrázku je i čtyřúhelník $AFYE$ tětivový (skutečně, $|\angle AFY|+|\angle YEA| = |\angle BXY|+|\angle YXC| = 180^\circ$). Kružnice ω jemu opsaná je navíc zřejmě kružnicí nad průměrem AI.

Teď dokážeme, že přímky KI a XY protínají kružnici ω podruhé ve stejném bodě Z. To je skoro okamžitě jasné z toho, že čtyřúhelníky $CEIK$ a $CEYX$ jsou oba tětivové. Označíme-li totiž druhé průsečíky přímek KI a XY s ω postupně Z, Z', pak

$$|\angle EIZ| = |\angle ACB| = |\angle EYZ'|.$$

Stejně orientovaným obloukům EZ a EZ' tak na ω příslušejí stejně velké obvodové úhly, tedy $Z = Z'$.

Zbývá si všimnout, že díky $|\angle AZI| = 90^\circ$ je $ADKZ$ obdélník. A jelikož D je středem XK, prochází XZ středem AD. Jsme hotovi.

Poznámky opravujícího. S úlohou si poměrně hodně z vás nějak poradilo. Kromě pár syntetických řešení podobných tomu vzorovému (pochvalu získává *Bui Truc Lam*) se sešla i pěkná řádka různých počítacích řešení. V nich jste zpravidla dokazovali, že střed úsečky AD má k oběma zadaným kružnicím stejnou mocnost, což se po označení druhých průsečíků těchto kružnic s AD a uvážení mocnosti A zredukovalo na ověření nějaké metrické identity, typicky v neznámých a, b, c a s. Podle toho, jak fikaně jste vyjadřovali, byly i identity různě komplikované – například *Rado Švarc* nakonec ověřoval, že $\frac{x^2yz}{a^2} = \frac{x^2zy}{a^2}$:).

Na závěr ještě poznámka, jak přijít na to, které body dokreslovat. Samozřejmě pomůže zkušenost, ale neváhejte si pomoct vhodným kreslicím programem! Když si zadání zkonstruujete například v takové *Geogebře*, je minimálně první polovina řešení úplně zadarmo.

(Pepa Tkadlec)