Zadání 2. série

Termín odeslání: 26. května 2014

Adresa pro odeslání:
Korespondenční seminář iKS
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech Republic

Úloha N2. Dokažte, že existuje přirozené číslo N takové, že kdykoli $2^n > N$ (pro n přirozené), tak už má 2^n ciferný součet (v desítkové soustavě) větší než 2014.

Úloha C2. David má n-prvkovou množinu přirozených čísel ($n \geq 2$) a vyrobil si lístečky se součty všech možných podmnožin – celkem tedy 2^n lístečků (součet prázdné množiny je roven nule). Dokažte, že může rozdělit všechny lístečky do dvou hromádek A a B, aby bylo splněno následující: Kdykoli zvolíme číslo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a číslo na každém lístečku umocníme na k-tou, bude součet (umocněných) čísel v hromádce A stejný jako součet (umocněných) čísel v hromádce B.

Úloha A2. Nechť kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geq 3$) splňují

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4).$$

Dokažte, že pak už každá trojice těchto čísel může být délkami stran nedegenerovaného trojúhelníka.

Úloha G2. V trojúhelníku ABC označme E, F body dotyku kružnice vepsané se stranami AC, AB. Osy úhlů u vrcholů B, C protnou výšku AD postupně v bodech P, Q. Kružnice opsané trojúhelníkům BFP a CEQ se protnou v X a Y. Dokažte, že přímka XY prochází středem úsečky AD.