Řešení 3. série

Úloha A3. *Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující zároveň:*

(i) existuje reálné číslo M takové, že pro každé reálné číslo x je $f(x) < M$,

(ii) pro každou dvojici reálných čísel x a y platí

$$f\big(xf(y)\big) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$

Řešení (podle Štěpána Šimsy): V celém řešení budeme hranatými závorkami $[r, s]$ značit dosazení $x = r$, $y = s$.

Dosaďme nejprve $[0, 1]$. Dostaneme

$$f(0) + f(0) = f(0),$$

odkud $f(0) = 0$.

Předpokládejme nyní pro spor, že $f(1) \neq 0$. Dosazením $\left[\frac{x}{f(1)}, 1\right]$ obdržíme

$$f(x) = x,$$

což je ovšem ve sporu s omezeností (shora) funkce f (platilo by totiž $f(M) = M$). Platí tedy $f(1) = 0$.

Dále dosazením $[1, y]$ získáme

$$f\big(f(y)\big) = 2f(y). \tag{1}$$

Dokážeme nyní, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \leq 0$. Předpokládejme, že existuje nějaké x_0, pro něž je $f(x_0) > 0$. Definujme rekurzivně rostoucí posloupnost kladných čísel $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisem $y_1 = f(x_0)$, $y_n = f(y_{n-1})$ pro $n > 1$. Dle (1) lze rekurenci přepsat na $y_n = 2y_{n-1}$, neboli $y_n = 2^{n-1}f(x_0)$. Protože je $f(x_0) > 0$, jistě nalezneme takové n, že $2^n f(x_0) \geq M$, ovšem $2^n f(x_0) = y_{n+1} = f(y_n)$, což vede ke sporu $f(y_n) \geq M$. Dostáváme tedy

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) \leq 0. \tag{2}$$

Všimněme si nyní, že nulová funkce $f(x) = 0$ vyhovuje zadání, a předpokládejme dále, že existuje x_0 takové, že $f(x_0) \neq 0$, tedy $f(x_0) < 0$ díky (2). Ukážeme sporem, že pak už musí být f záporná ve všech záporných číslech; nechť tedy nějaké $y_0 < 0$ splňuje $f(y_0) = 0$. Dosazení $[x_0, y_0]$ dává

$$0 < y_0 f(x_0) = f(x_0 y_0),$$

což je spor s (2). Platí tedy

$$\forall x < 0\colon f(x) < 0. \tag{3}$$

Dosaďme nyní $[x, y]$ a $[y, x]$ a získané rovnosti sečtěme. Obdržíme rovnost

$$f\big(xf(y)\big) + f\big(yf(x)\big) = 2f(xy),$$

do které dále (pro $x \neq 0$) dosadíme $\left[x, \frac{1}{x}\right]$:

$$f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 2f(1) = 0.$$

Vzhledem k nekladnosti f jsou nutně oba sčítance na levé straně rovny 0, to však podle (3) znamená, že jejich argumenty musí být nezáporné. Musí tedy platit $\frac{f(x)}{x} \geq 0$, což pro $x > 0$ znamená $f(x) \geq 0$ a v kombinaci s (2) je tedy

$$\forall x > 0\colon f(x) = 0. \tag{4}$$

Konečně dosaďme $[-1, -y]$, kde $y < 0$. Díky (4) zůstane jen

$$-yf(-1) = f(y),$$

f je tedy na záporných číslech tvaru $f(x) = Cx$, kde $C = -f(-1) > 0$. Dosazením dle tohoto předpisu do (1) zjistíme, že $C^2 = 2C$, neboli $C = 2$ díky $C > 0$.

V úvahu tedy připadá jen jediná funkce, a to

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \geq 0, \\ 2x & \text{pro } x < 0. \end{cases} \tag{$\star$}$$

Ta zřejmě splňuje podmínku (i) ze zadání. Podmínka (ii) se snadno ověří postupným vyzkoušením všech čtyř možností znamének x a y.

Funkce vyhovující zadání jsou tedy právě nulová funkce a funkce definovaná dle ($\star$).

Poznámky opravujícího. Všechna došlá správná řešení myšlenkově kopírovala vzorové, odlišnosti byly v podstatě jen v technickém provedení. Řešení *Štěpána Šimsy*, na základě kterého bylo napsáno výše uvedené vzorové, mne svou elegancí zaujalo natolik, že jsem ho ohodnotil ještě jedním bodem navíc. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Úloha C3. *Na ultramaraton postupně vyběhlo a do cíle postupně dorazilo n běžců. Během závodu se mezi sebou různě předbíhali, po jeho skončení jsme zjistili tato fakta:*

(i) každý běžec předběhl stejný počet běžců,
(ii) žádní dva běžci nebyli předběhnuti stejným počtem běžců,
(iii) žádný běžec nebyl předběhnut dvakrát tím samým běžcem.

Určete všechny možné hodnoty n.

Řešení. Díky pravidlu (iii) mohl být každý běžec předběhnut maximálně $n-1$ běžci, minimálně žádným, to je n možností. Kvůli pravidlu (ii) byli jednotliví běžci předběhnuti žádným, jedním, dvěma, …, až $n-1$ běžci. Celkový počet předběhnutí tak činí

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

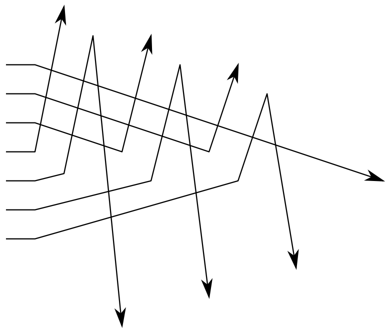
Spočítáme, kolik běžců každý běžec předběhnul, podle (i) to bude konstantní celé číslo:

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}.$$

Aby to bylo celé číslo, musí být počet běžců lichý. Ukážeme příklad, jak by se běžci mohli předbíhat pro obecné liché n.

Nejprve vyšleme prostředního běžce do cíle, pak běžec, který byl těsně za ním, všechny před sebou předběhne (kromě toho, kdo je už v cíli), následně usne, a nechá se předběhnout všemi běžci na trati. Tím zbude $n-2$ běžících běžců. Provádíme takovou operaci tak dlouho, dokud nezbude jen jeden běžící běžec. Pak všechny běžce probudíme a necháme bez předbíhání dojít do cíle.

Následující obrázek ilustruje situaci pro 7 běžců, jak se předbíhají (zdola nahoru) v čase (zleva doprava):



Vyslání jednoho běžce dopředu a jednoho dozadu nazveme kolem, kola informaticky očíslujeme 0, 1, ..., $\frac{n-3}{2}$. Běžce, který v kole k doběhne do cíle nazveme k-rychlík, toho, který v kole k usne, nazveme k-spáč. Běžce, který na konci zbude, nazveme středník.

Pro $k \geq 1$ je na začátku k-rychlík těsně před $(k-1)$-rychlíkem a k-spáč je těsně za $(k-1)$-spáčem. Středník je na začátku závodu první. Ověříme platnost podmínek (i), (ii), (iii):

(i) V kole k předbehne k-rychlík i k-spáč $\frac{(n-2k)-1}{2}$ běžců, v každém předchozím kole jednoho spáče, takže celkem oba předběhnou běžců

$$\frac{(n-2k)-1}{2} + k = \frac{n-1}{2}.$$

Středník v každém kole předběhne jednoho spáče, tedy celkem zas $\frac{n-1}{2}$ běžců.

(ii) V kole k je k-spáč předběhnut $n-2(k+1)$ běžci, před tím není předběhnut nikdy. Tito běžci se navzájem liší v počtu předběhnutí jinými běžci a dané číslo je u nich vždy liché.

Zato k-rychlík je v každém kole menším než k předběhnut dvakrát – spáčem a rychlíkem, v kole k pak vůbec. Celkem je předběhnut $2k$-krát. Ze stejného důvodu je středník předběhnut $2 \cdot \frac{n-1}{2}$ krát. Tedy tito běžci jsou předběhnuti sudými navzájem různými počty běžců.

(iii) V kole k se každého předběhnutí dvou běžců účastní k-rychlík nebo k-spáč, po tomto kole se už žádného předbíhání neúčastní. Stačí si tak uvědomit, že je podmínka (iii) splněna v každém kole zvlášť.

Poznámky opravujícího. Za důkaz, že běžců musí být licho, jsem uděloval 2 body, za konstrukci pak 5. Překvapilo mě, jak málo dorazilo správných řešení k tak lehké úloze. To nás chcete dotlačit k ještě lehčím úlohám? Ale my se nedáme. *(Mirek Olšák)*

Úloha G3. *Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P. Označme A', B', C' paty kolmic spuštěných z bodu P na příslušné strany. Dále nechť A'' je průsečík kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ a strany BC různý od A'. Konečně nalezněme na úsečce $A''B'$ bod X takový, že $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle PAB|$. Ukažte, že $|\sphericalangle AXB| = 90°$.*

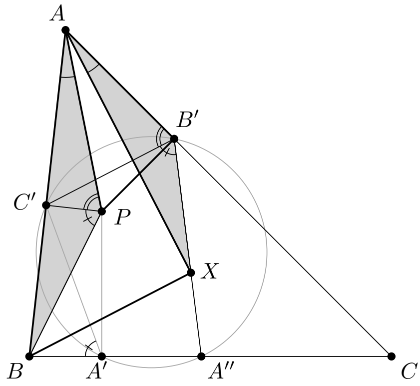
Řešení (volně podle Martina Vodičky): Máme-li dokázat $|\sphericalangle AXB| = 90°$, máme vlastně dokázat $\triangle AXB \sim \triangle AB'P$, neboť $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle PAB'|$ a $|\sphericalangle AB'P| = 90°$.

Trojúhelníky AXB a $AB'P$ jsou si podobné právě tehdy, když jsou si podobné trojúhelníky APB a $AB'X$ (obojí je ekvivalentní rovnosti poměrů $|AB| : |AP| = |AX| : |AB'|$).

Druhou podobnost však snadno vyúhlíme. Ze zadání máme $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle XAB'|$ a z tětivových čtyřúhelníků $AC'PB'$, $A'A''B'C'$ a $BA'PC'$ plyne

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AB'X| &= |\sphericalangle AB'C'| + |\sphericalangle C'B'X| = |\sphericalangle APC'| + |\sphericalangle C'A'B| = |\sphericalangle APC'| + |\sphericalangle C'PB| \\ &= |\sphericalangle APB| \end{aligned}$$

nezávisle na tom, v jakém pořadí leží body A', A'' na straně BC. Podle věty *uu* je $\triangle APB \sim \triangle AB'X$ a my jsme hotovi.



Poznámky opravujícího. Jediné úspěšné řešení podal *Martin Vodička*. Úloha přitom nebyla tak obtížná – stačilo si uvědomit, že máme ukázat, že A je středem spirální podobnosti zobrazující PB' na BX a že „spirální podobnost chodí po dvou“. *(Pepa Tkadlec)*

Úloha N3.

(a) *Existuje 2011 po dvou různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým z nich?*

(b) *Existuje 2011 po dvou různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný součtem každých dvou z nich?*

Řešení.

(a) Ano, taková čísla existují. Například 2011-prvková množina

$$\{1,\, 2,\, 3,\, 3\cdot 2,\, 3\cdot 2^2,\, \dots, 3\cdot 2^{2008}\}$$

má požadovanou vlastnost, neboť součet jejích prvků je $1+2+3\bigl(2^{2009}-1\bigr) = 3\cdot 2^{2009}$, což je skutečně dělitelné každým z uvedených čísel.

Poznámka: Tato čísla lze nalézt například tak, že začneme od množiny $\{1, 2, 3\}$, která má vlastnost ze zadání, a v každém kroku ji rozšíříme o součet prvků v ní obsažených.

(b) Sporem ukážeme, že taková čísla neexistují. Mějme tedy přirozená čísla $a_1 < a_2 < \dots < a_{2011}$ mající vlastnost ze zadání a jejich součet označme S. Spor budeme hledat v tom, že S má „příliš mnoho“ „příliš velkých“ dělitelů.

Nejprve si uvědomme, že

$$\frac{S}{a_{2011}} < \frac{2011\cdot a_{2011}}{a_{2011}} = 2011.$$

Pak jsou ovšem hodnoty podílů

$$\frac{S}{a_{2011}+a_1},\quad \frac{S}{a_{2011}+a_2},\quad \dots,\quad \frac{S}{a_{2011}+a_{2010}}$$

navzájem různá přirozená čísla, přičemž každé z nich je menší než 2011 a větší než 1. To je ovšem spor, neboť ostře mezi 1 a 2011 tolik přirozených čísel není.

Poznámky opravujícího. S částí (a) nebyly potíže. Naopak část (b) vyřešili pouze *Martin Vodička* a *Viktor Lukáček*, z nichž prvně jmenovaný postupoval stejně jako my ve vzorovém řešení. Za zmínku stojí ještě řešení *Roberta Navrátila*, který si neuvědomil, že $2011 > 2010$, a své řešení (kopírující vzorové) vzdal těsně před cílem. *(Michal „Kenny“ Rolínek)*