Řešení 2. série

Úloha N2. *Je dáno přirozené číslo d. Dokažte, že je možné najít takové kladné reálné číslo c, že pro všechna přirozená čísla $n > d$ platí nerovnost*

$$[n-1, n-2, \ldots, n-d] > cn^d.$$

Hranatými závorkami značíme nejmenší společný násobek.

Řešení. Pro další použití zavedeme:

$$f(n) = (n-1)(n-2)\cdots(n-d),$$
$$g(n) = [n-1, n-2, \ldots, n-d].$$

Nyní chceme dokázat, že

$$L \cdot g(n) \geq f(n) \tag{1}$$

pro nějaké L.

Označme si prvočísla menší než d jako $p_1, p_2, \ldots, p_k$, těch je určitě konečně. Označme ještě α_i pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takové číslo, že $p_i^{\alpha_i} \leq d-1$ a zároveň $p_i^{\alpha_i+1} \geq d$. Konečně definujme

$$L = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\lceil d/p_i \rceil \alpha_i}.$$

Lemma. *Pokud $p_i^\beta \geq d$ dělí jedno z čísel tvaru $n-j$, pak už je*[1] *$p_i^{v_{p_i}(n-k)} \leq p_i^{\alpha_i} \leq d-1$ pro všechna $1 \leq k \leq d$, $k \neq j$.*

Důkaz. Připusťme, že existují dvě β_1 a β_2. Vezměme menší z nich β, pak p^β dělí dvě z d po sobě jdoucích čísel, ale samo je větší než d. Spor. □

Nyní (1) dokážeme tak, že se podíváme na $v_p(x)$ pravé i levé strany nerovnosti pro všechna p.

(i) Nechť q je prvočíslo, takové že $q \geq d$, pak $v_q(L \cdot g(n)) = v_q(g(n)) \geq v_q(f(n))$. Na to si stačí uvědomit, že $f(n)$ je součin d po sobě jdoucích čísel a z nich může q dělit pouze jedno nebo žádné, a tedy q bude v $g(n)$ ve stejné mocnině a platí tedy dokonce $v_q(g(n)) = v_q(f(n))$.

(ii) Nechť q je jedno z prvočísel p_i, kde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Pak chceme dokázat

$$v_q(L \cdot g(n)) = v_q(L) + v_q(g(n)) = \lceil \tfrac{d}{q} \rceil \alpha_i + v_q(g(n)) \geq v_q(f(n)),$$

ekvivalentně

$$\lceil \tfrac{d}{q} \rceil \alpha_i \geq v_q(f(n)) - v_q(g(n)).$$

Podle lemmatu $v_q(n-i) \leq \alpha_i$ kromě toho největšího. Ten je ale roven $v_q(g(n))$, a proto se na pravé straně odečte. Teď už si stačí uvědomit, že čísel dělitelných q v $f(n)$ je maximálně $\lceil \frac{d}{q} \rceil$. Tím je nerovnost dokázaná.

Tím jsme dokázali (1). Podívejme se nyní na $h(n) = \frac{f(n)}{n^d} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{d}{n}\right)$. To je součin d rostoucích kladných posloupností, a tedy i jejich součin je rostoucí. Platí

$$\frac{f(n)}{n^d} = h(n) \geq h(n-1) \geq \ldots \geq h(d+1) = C.$$

Máme tedy

$$g(n) \geq \frac{1}{L} f(n) \geq \frac{C}{L} n^d,$$

a to jsme měli dokázat.

[1] $v_p(x)$ značí takové největší číslo, že $p^{v_p(x)}$ dělí x.

Poznámky opravujícího. Mlha že by se dala krájet. Úloha byla celkem lehká a jasná, a proto když si někdo troufl tvrdit, že je nějaký odhad „vidět“ nebo řekl o něčem, že je známé, i když já to tedy vůbec neznám, body jsem neuděloval. Naopak bych zde rád pochválil sedmibodové jedince, kteří opravdu bez pochybností úlohu zdolali, nebo se alespoň jejich mlhou dalo prohlédnout.

(Michael „Majkl“ Bílý)

Úloha G2. *Je dán trojúhelník ABC a dále mimo rovinu danou tímto trojúhelníkem bod S takový, že $|SA| = |SB| = |SC|$. Na úsečkách SA, SB, SC nalezneme postupně body X, Y, Z tak, aby rovina XYZ byla rovnoběžná s rovinou ABC. Buď O střed sféry opsané čtyřstěnu $SABZ$. Dokažte, že přímka SO je kolmá na rovinu XYC.*

Řešení (volně podle Le Anh Dung). V celém textu budeme jako $\mathbf{k}$ označovat vektor $\overrightarrow{SK}$ pro libovolný bod K.

Označme O střed koule opsané čtyřstěnu $SABZ$. Platí $|\mathbf{o}| = |\mathbf{o} - \mathbf{a}|$, tedy

$$\begin{aligned} |\mathbf{o}|^2 &= |\mathbf{o} - \mathbf{a}|^2, \\ \mathbf{o} \cdot \mathbf{o} &= \mathbf{o} \cdot \mathbf{o} - 2\,\mathbf{o} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \\ 2\,\mathbf{o} \cdot \mathbf{a} &= |\mathbf{a}|^2. \end{aligned}$$

Analogicky obdržíme rovnosti $2\,\mathbf{o} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|^2$, $2\,\mathbf{o} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2$.

Z rovnoběžnosti rovin ABC a XYZ dostáváme existenci čísla $p \geq 1$ takového, že $\mathbf{a} = p\mathbf{x}$, $\mathbf{b} = p\mathbf{y}$, $\mathbf{c} = p\mathbf{z}$.

K důkazu kolmosti přímky SO a roviny XYC nám stačí ukázat, že $\mathbf{o} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{x}) = 0$ a $\mathbf{o} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{y}) = 0$, protože pak je přímka SO kolmá na dvě nerovnoběžné přímky v XYC (konkrétně na XC a YC). Platí ovšem

$$\begin{aligned} \mathbf{o} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{x}) = \mathbf{o} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{o} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o} \cdot p\mathbf{z} - \mathbf{o} \cdot \tfrac{1}{p}\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}p|\mathbf{z}|^2 - \tfrac{1}{2p}|\mathbf{a}|^2 = \tfrac{1}{2p}\left(|\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2\right) = 0, \\ \mathbf{o} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{y}) = \mathbf{o} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{o} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{o} \cdot p\mathbf{z} - \mathbf{o} \cdot \tfrac{1}{p}\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}p|\mathbf{z}|^2 - \tfrac{1}{2p}|\mathbf{b}|^2 = \tfrac{1}{2p}\left(|\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2\right) = 0, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí díky tomu, že podle zadání je $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.

Alternativní řešení (stručně podle Josefa Svobody). Uvažme kulovou inverzi[2] se středem v S a poloměrem $\sqrt{|SA| \cdot |SX|}$. V tomto zobrazení se body A, B, C zobrazí (po řadě) na body X, Y, Z, obrazem sféry opsané čtyřstěnu $SABZ$ je tedy rovina XYC. Jelikož kulová inverze zachovává symetrie podle přímek procházejících jejím středem a výše uvedená sféra je symetrická podle přímky SO, musí být rovina XYC rovněž symetrická podle této přímky. Protože však SO v XYC neleží, musí na ni být kolmá, což jsme měli dokázat.

Poznámky opravujícího. Kromě výše uvedených postupů se objevily ještě dva další: první spočíval v tom, že se úloha převedla na rovinnou verzi (která se snadno vyúhlí) a ta se posléze aplikovala ve dvou stěny zadaného čtyřstěnu. Druhou cestou byla hrubá aplikace metod analytické geometrie – tato řešení se vyznačovala značnou délkou a velkým množstvím úprav výrazů, což bylo pro mě jakožto opravovatele ne zrovna příjemné.

Pro „počtáře“ si ještě dovolím jedno drobné doporučení: chcete-li dokázat, že je nějaký vektor kolmý na rovinu (tj. na nějaké dva vektory), je mnohem výhodnější spočítat skalární součiny s těmito dvěma vektory (jako výše), než ukazovat kolinearitu s jejich vektorovým součinem.

(Alexander „Olin“ Slávik)

[2] Kulová inverze (se středem v T a poloměrem r) je přímočarým zobecněním kruhové inverze do tří rozměrů – bod K (různý od T) se v ní zobrazí do takového bodu K' na polopřímce TK, který splňuje $|TK| \cdot |TK'| = r^2$.

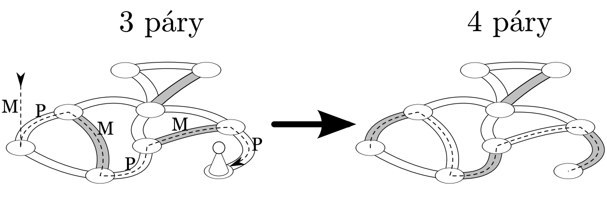
Úloha C2. *Pepa s Mirkem hrají deskovou hru. Její součástí je hrací plán a jedna figurka. Na hracím plánu jsou políčka a některé dvojice políček jsou spojeny rourou (roury jsou obousměrné a mohou vést nad sebou a pod sebou)*[3]. *Na začátku hry položí Mirek figurku na jedno políčko a dále se hráči střídají v tazích. První posune figurku Pepa podél některé roury na další políčko, pak Mirek, … Figurku je zakázáno posunout na políčko, na kterém už někdy stála. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Dokažte, že když je počet políček na hracím plánu lichý, tak má Mirek vyhrávající strategii.*

Řešení. Mirkova vyhrávající strategie vypadá následovně: nejprve seskupí políčka do párů tak, aby

(i) žádné políčko nebylo ve více párech (ale některá políčka mohou zůstat nespárovaná),
(ii) v každém páru byla 2 políčka spojená rourou,
(iii) počet párů byl za podmínek (i), (ii) nejvyšší možný.

Některé políčko muselo zůstat nespárované, protože je počet políček lichý. Do nějakého takového políčka položí Mirek figurku. Pak pokaždé, když Pepa táhne do spárovaného políčka P (později ukážeme, že do nespárovaného táhnout nemůže), tak Mirek posune figurku na políčko, s kterým je P v páru. Na začátku každého Pepova tahu budou z každého páru použitá buď obě políčka, nebo žádné, Pepa vždy načíná nový pár a Mirek ho dokončuje. Mirek s takovou strategií tedy vždy může táhnout, nemůže prohrát, a proto (díky konečnosti hry) nakonec vyhraje.

Zbývá ukázat, proč Pepa nemůže táhnout do nespárovaného políčka. Předpokládejme tedy pro spor, že se Pepovi povedlo dostat figurku do nespárovaného políčka. První i poslední tah udělal Pepa, takže figurka do této doby prošla přes lichý počet rour, řekněme $2n + 1$. Díky Mirkově strategii je každá druhá roura na trase figurky taková, která spojuje dvě spárovaná políčka, to je n párů, které figurka potkala. Tato trasa se ovšem dá spárovat i jinak, první políčko s druhým, třetí s čtvrtým, …, až předposlení s posledním. Tímto způsobem dostaneme $n+1$ párů na trase figurky, čili zvýšíme celkový počet párů. To je však spor s tím, že počet párů byl nejvyšší možný.



Na obrázku je znázorněna situace, kdy Mirek hraje podle své strategie, avšak nevybral si nejvyšší možný počet párů. To, že ho Pepa porazil, znamená, že je možné počet párů zvýšit. Šedé roury značí roury mezi spárovanými políčky, čárkovaná čára trasu figurky a písmenka M, P značí, kdo provedl příslušný tah.

Poznámky opravujícího. Jak to u dobré kombinatoriky bývá, nabušenost na ní příliš neplatí. Z dlouhodobých řešitelů ji vyřešil pouze Martin Vodička, v podstatě podle vzorového řešení. Zato se s úlohou celkem dobře popasovali dva nováčci, bohužel však pouze jeden dokázal své myšlenky smysluplně zapsat.

Třemi body jsem ocenil pěkný postup Jakuba Šafina založený na kradení strategií, který však fungoval pouze pro stromy. Nakonec řešitel, který své jednostránkové řešení zakončil větou „Uvedený postup funguje jen pro případ, kdy jsou všechny vrcholy navzájem spojené.“ si sice nevysloužil žádný bod, ale alespoň pobavil. *(Mirek Olšák)*

[3] V grafové terminologii jsou políčka vrcholy a roury hrany obecného grafu.

Úloha A2. *Dokažte, že pokud polynom p s reálnými koeficienty splňuje*

$$p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak to je konstantní polynom.

Řešení. Připomeňme lemma, které je užitečné, kdykoliv pracujeme s polynomy.

Lemma. *Nechť p, q jsou polynomy. Pokud rovnost $p(x) = q(x)$ nastává pro nekonečně mnoho x, pak rovnost $p(x) = q(x)$ platí pro všechna x.*

Důkaz. Každé x, pro které platí rovnost $p(x) = q(x)$, je kořenem polynomu $p - q$. Polynom $p - q$ má tudíž nekonečně mnoho kořenů. Podle základní věty algebry má každý nenulový polynom stupně n nejvýše n kořenů, takže polynom $p - q$ je nulový. □

Prvně ukážeme, že ze vztahu $p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1)$ plyne, že polynom p je buďto sudý, nebo lichý.

Dosadíme za x nejdříve t a potom $-t$. Pravé strany jsou v obou případech stejné, takže jsou stejné i levé strany, což znamená, že $p(t)^2 = p(-t)^2$ pro libovolné t. Pro každé t tedy platí buď $p(t) = p(-t)$, nebo $p(t) = -p(-t)$. Pokud rovnost $p(t) = p(-t)$ platí pro nekonečně mnoho t, pak tato rovnost podle lemmatu platí pro každé t a polynom p je sudý. Podobně pokud rovnost $p(t) = -p(-t)$ platí pro nekonečně mnoho t, je polynom p lichý.

Postupně rozebereme oba případy. Ukážeme, že v případě, že je polynom p lichý, umíme „generovat“ nekonečně mnoho kořenů, takže nezbývá, než že p je nulový. V případě, že polynom p je sudý a nekonstantní, ukážeme, že existuje polynom q, který splňuje identitu ze zadání a je přitom polovičního stupně než p. Tím můžeme snižovat stupeň polynomu, dokud nedostaneme nějaký polynom $\tilde{q}$ lichého stupně. Ten bude muset být nulový, což bude znamenat, že také p je nulový.

Je-li polynom p lichý, pak je $p(0) = -p(0)$, tj. $p(0) = 0$. Dosazením $x = 0$ do zadání dostáváme $-1 = p(1)$ a dosazením $x = 1$ dostáváme $0 = p(2)$. Tento postup můžeme libovolněkrát opakovat. Je-li t kořenem, pak dosazením $x = t$ dostáváme $-1 = p(t^2 + 1)$ a dosazením $x = t^2 + 1$ dostáváme $0 = p((t^2 + 1)^2 + 1)$. Vzhledem k nerovnosti $(t^2 + 1)^2 + 1 > t^2 + 1 \geq 2t \geq t$ to znamená, že polynom p má nekonečně mnoho kořenů, takže je nulový.

Je-li polynom p sudý stupně $2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, potom lze zapsat jako

$$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0,$$

kde a_i jsou reálná čísla. To je víceméně zřejmé, přesto budeme podrobní. Jistě existují reálná čísla a_i taková, že

$$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Rovnost $p(x) = p(-x)$ platnou pro všechna x stačí přepsat do tvaru

$$p(x) - p(-x) = 2\left(a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-3}x^{2n-3} + \cdots + a_3x^3 + a_1x = 0\right).$$

Vzhledem k tomu, že tato rovnost platí také pro všechna x, je $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n-1} = 0$.

Dále předpokládejme, že polynom p je sudý stupně $2n$ a nekonstantní, tj. $n \in \mathbb{N}$. Potom můžeme definovat polynom

$$q(y) = a_{2n}y^n + a_{2n-2}y^{n-1} + \cdots + a_2y + a_0,$$

který je polovičního stupně n a přitom $p(x) = q(x^2)$. Ukážeme, že polynom q rovněž splňuje identitu ze zadání. Dosazením obdržíme rovnost

$$q(x^2)^2 - 1 = p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1) = q((x^2 + 1)^2).$$

Pišme y místo x^2, což nám dává

$$q(y)^2 - 1 = q((y+1)^2),$$

a upravujme pravou stranu tak, aby měla stejný tvar jako pravá strana identity ze zadání. Místo y pišme $y - 1$, čímž dostaneme

$$q(y-1)^2 - 1 = q(y^2).$$

Nakonec zvětšíme argument polynomu q o 1, neboli definujeme polynom $q_1(y) = q(y-1)$. Dostaneme

$$q_1(y)^2 - 1 = q_1(y^2 + 1).$$

Tuto identitu jsme sice obdrželi jen pro některá y (konkrétně pro $y - 1 \geq 0$), avšak podle lemmatu platí pro všechna y.

Vidíme, že polynom q_1 splňuje identitu ze zadání a přitom má poloviční stupeň n. Polynom q_1 je tedy opět lichý, nebo sudý. Je-lichý, je podle předchozího nulový, takže i původní polynom p je nulový. Je-li sudý, můžeme najít polynom q_2, který splňuje identitu ze zadání a jehož stupeň je opět poloviční oproti polynomu q_1. Takto můžeme pokračovat tak dlouho, dokud nedostaneme polynom q_k lichého stupně. Ten je potom nulový a zpětně dostáváme, že i polynom p je nulový.

Jediný případ, kterým jsme se dosud nezabývali, je konstantní polynom p. Takové polynomy jsou tedy jedinými kandidáty, pro které může být splněna identita ze zadání.

Poznámky opravujícího. Vyskytla se řešení, která se snažila použít komplexních čísel nebo derivací. V obou případech se ale nevyšetřily právě ty těžké případy, v nichž je polynom p sudý a nemá reálné kořeny. Úspěšní řešitelé použili stejnou myšlenku jako ve vzorovém řešení – tj. přechod k polynomu polovičního stupně, který splňuje identitu ze zadání. Jeden bod šlo získat už za objevení vztahu $|p(x)| = |p(-x)|$. Tři body jsem uděloval za myšlenku „generování“ nekonečně mnoha kořenů. *(Pavel Šalom)*