# Řešení 5. série

**Úloha A5.** *Verča našla v ledničce $2n$ reálných čísel, která nejsou všechna stejná. Povšimla si, že kdykoliv jednu polovinu z těchto čísel dá do mrazáku a druhou do trouby, tak je součet čísel v troubě roven součinu čísel v mrazáku. Pro jaká $n$ se jí to mohlo stát?*

*Řešení.* Předpokládám, že mám v ledničce alespoň 6 čísel. Jednoho dne jsem omylem dala do trouby $n+1$ čísel a do mrazáku zbylých $n-1$ čísel. Zároveň jsem si všimla, že v troubě nejsou všechny čísla stejná. Ale rozhodla jsem se svoji chybu napravit. Před tím jsem si označila součet čísel v troubě $x$ a součin čísel v mrazáku $y$. Pak vím, že ať vyberu z trouby jakékoli číslo a dám ho do mrazáku, tak bude součet čísel v troubě roven součinu čísel v mrazáku. Tedy pro každé $a$ z trouby platí: $x - a = y \cdot a$, neboli $x = a(y+1)$. Tato rovnice má ale jen jedno řešení pro $y \neq -1$, takže nemůže být splněna pro všechna $a$ z trouby. Takže $y = -1$ a tedy mám nekonečně mnoho řešení pro $x = y + 1 = 0$.

V tu chvíli mi došlo, že mám množinu reálných čísel, pro kterou platí, že pokud odstraním $n+1$ čísel, kde alespoň dvě jsou různá, tak součin zbylých $n-1$ čísel je vždycky roven $-1$. Pak jsem si uvědomila, že v ledničce nemůžu mít 3 navzájem různá čísla, protože pak budou existovat dvě různé $(n-1)$-tice s různým součinem splňujících, že ostatních $n+1$ čísel není stejných.

Vím tedy, že jsem v ledničce měla jen čísla s hodnotou $a$ nebo $b$ ($a \neq b$). Předpokládám, že $a$ i $b$ mám víc než 2krát a rozdělím čísla na $(n+1)$-tici a $(n-1)$-tici tak, že se $a$ i $b$ vyskytují v obou skupinách. BÚNO v $(n+1)$-tici je $a$ méně (nebo rovno) krát než $b$, pak když prohodím $a$ z $(n-1)$-tice za $b$ z $(n+1)$-tice získám nové rozdělení čísel do trouby a mrazáku jako na začátku. Tedy součin obou $(n-1)$-tic by se měl rovnat $-1$, což je ale spor protože jejich součin je buď různý nebo u obou roven 0. Tedy v když jsem na začátku rozdělila čísla do trouby a do mrazáku tak jsem v mrazáku měla $n-1$ stejných čísel.

Součin těchto $n-1$ čísel má být roven $-1$, tedy musí to být samé $-1$ a musí jich být lichý počet. Tedy $n-1$ musí být liché, takže $n$ musí být sudé. A pro sudá $n$ jsem mohla v ledničce najít například jedno $n$ a jinak samé $-1$, protože:

$n - (n-1) \cdot (-1) = 1 = (-1)^n$

$n \cdot (-1) = -n = n \cdot (-1)^{n-1}$

Pro $n = 1$ to triviálně nejde a pro $n = 2$ funguje výše uvedená kombinace čísel.

*(Verča Hladíková)*

**Úloha C5.** *Štěpán poslal Filipovi a Radovi dva provázky, spolu s informací, jak jsou dlouhé. Poté se odehrála následující mailová konverzace:*

*Š: „Poslal jsem vám dva různě dlouhé provázky, jejichž délka v centimetrech je*

$$a - \frac{1}{3^b} - \frac{1}{3^{b+c+1}},$$

*kde $a$, $b$, $c$ jsou přirozená čísla.“*

*F: „To je zajímavé. Ale neumím říct, který z nich je delší.“*

*R:„Já taky ne.“*

*F:„Já taky ne.“*

*R:„Já taky ne.“*

*Š:„Je jedno, kolikrát si tohle řeknete, stejně nebudete vědět, čí je delší.“*

*F:„To je fakt zajímavá informace. Ale pořád nevím, kdo má větší délku.“*

*R:„Já taky ne.“*

*F:„Já taky ne.“*

*Š:„Opět, je jedno, kolikrát si tohle řeknete, stejně nebudete vědět, který z provázků je delší.“*

*F:„Ha. No, furt nevím, kdo má ten delší.“*

*R:„Já taky ne."*
*F:„Já taky ne."*
*R:„Já taky ne."*
*Š:„Ve skutečnosti, je jedno, kolikrát uděláme tento malý rozhovůrek, kde budete cik-cak tvrdit, že nevíte, kdo má delší provázek a já vám řeknu, že je jedno, kolikrát si to řeknete a že to stejně nezjistíte, protože to ani z tohoto prohlášení nezjistíte. Navíc, pokud bych zopakoval předchozí větu ještě jednou, byla by stále pravdivá. A to dokonce i kdybych ji zopakoval ne jednou, ale i dvakrát, třikrát, ba i tisíckrát."*
*F: „To je fakt super informace. Ale pořád neumím říct, který z nich je delší."*
*R:„Já taky ne."*
*F:„Já taky ne."*
*Š:„Jo, pořád je jedno, kolikrát si teď navzájem řeknete, že to furt nevíte, pořád to nebudete vědět. A i když vám teď tuhle větu řeknu dvatisícesedmnáctkrát, pořád to vědět nebudete."*
*F:„Zajímavé. Ale pořád nevím, kdo má větší kus."*
*R:„Já taky ne."*
*F:„Já taky ne."*
*R:„Já taky ne."*
*F:„Ahá! Tak už vím, čí provázek je delší!"*
*Jak dlouhý byl Filipův provázek?*

*Řešení.* Označme $f(a,b,c) = a - \frac{1}{3^b} - \frac{1}{3^{b+c+1}}$ pro přirozená $a,b,c$. Všimneme si, že hodnoty $f(a,b,c)$ jsou seřazeny lexikograficky vůči trojicím $(a,b,c)$, tedy že $f(a,b,c) > f(x,y,z)$ právě když $a > x$, nebo $a = x$ a $b > y$, nebo $a = x$, $b = y$ a $c > z$. To plyne z monotonie funkce $g(x) = \frac{1}{3^x}$ a následujících nerovností (platných pro libovolná $b,c$ přirozená):

- $\frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^{b+c+1}} < 1$
- $\frac{1}{3^{b+2}} - \frac{1}{3^{b+c+1}} < \frac{1}{3^{b+2}} < \frac{2}{3^{b+1}} = \frac{1}{3^b} - \frac{1}{3^{b+1}}$.

První z nich říká, že změna $a$ o 1 je podstatnější než jakákoliv změna v $b$ a $c$ a druhá, že změna $b$ o 1 je podstatnější než jakákoliv změna v $c$.

Představíme-li si tedy všechny body prostoru, jejichž souřadnice jsou uspořádané trojice přirozených čísel, a projdeme-li[1] je v pořadí

$$(a,b,c) = (1,1,1), (1,1,2) \dots (1,2,1), (1,2,2) \dots (2,1,1) \dots$$

(tedy lexikograficky), dostaneme rostoucí hodnoty $f(a,b,c)$. Místo délek provázků $f(a,b,c)$ můžeme tedy uvažovat trojice $(a,b,c)$ s lexikografickým uspořádáním.

Nyní se podívejme na konverzaci po Štěpánovu úvodním výroku. Filip svým prvním výrokem říká, že jeho provázek není nejkratší možný (tedy odpovídající $(1,1,1)$). Dohromady s touto informací Rado svým prvním výrokem říká, že nemá $(1,1,1)$ ani $(1,1,2)$ (provázky jsou různě dlouhé). Dalšími dvěma výroky se stav (tzn. nejnižší na základě dostupných informací možná trojice) Filipa i Rada (dále jen borců) posune. To ale Štěpánovým druhým výrokem ztrácí význam, protože ten říká, že ani jeden z nich nemá trojici $(1,1,n)$ pro přirozené $n$, protože jinak by opakováním toho, že ani jeden zatím neví, časem borec s nižší trojicí zjistil, že má opravdu tu nižší[2]. Dále Štěpán vyloučí (pro oba) druhý řádek (nejnižší roviny) a ve třetím řádku se borci kousek posunou. Pak přijde Štěpánův dlouhý a důležitý výrok. V něm Štěpán nejdřív

[1] Není to v pravém slova smyslu procházení posloupnosti, přes tři tečky se „nikdy nedostaneme". Jedná se o *ordinál* $\omega^3$, více je možné najít na `https://mks.mff.cuni.cz/archive/35/uvod2s.pdf`. Nám stačí, že umíme každé dvě uspořádané trojice čísel lexikograficky porovnat a že v tomto uspořádání je $f$ rostoucí funkce.

[2] Štěpánův výrok představuje právě skok o řádek výš, aniž by se celý první řádek prošel, viz minulou poznámku.

vyloučí rovinu $(1, m, n)$, $m$, $n \in \mathbb{N}$ a pak tvrdí, že aktuálně nejnižší rovinu může vyloučit ještě tisíckrát, takže oba borci jsou aktuálně ve stavu $(1002, 1, 1)$. Pak se na základně analogických úvah jako dosud posunou do $(1002, 2019, 1)$. Konverzace se chýlí ke konci, takže musíme být opatrní. Výroky postupně znamenají (řešíme jen poslední souřadnici):

- Filip nemá 1
- Rado nemá 1 ani 2
- Filip nemá 1 až 3
- Rado nemá 1 až 4
- Filip ví, takže musí mít 4 nebo 5 (s 6 a víc by nevěděl, protože Rado by mohl mít 5, na druhou stranu může mít 5 a zároveň vědět, protože Rado by pak musel mít alespoň 6 díky předpokladu různosti).

Filipův provázek může tedy mít délku $f(1002, 2019, 4)$ nebo $f(1002, 2019, 5)$.

*Poznámky opravujícího.* Hlavní myšlenku s lexikografickým uspořádáním pochopili všichni řešitelé, někteří ji ale dostatečně nezdůvodnili. Nejčastější chybou bylo opomenutí druhé možnosti na konci, které bylo asi zčásti zaviněné i mírně matoucí otázkou, jejíž formulace naznačovala jednoznačné řešení. Jak asi bystrý čtenář tuší, nebyl to zrovna záměr, a doufáme, že laskaví řešitelé prominou.

*(David Hruška)*

**Úloha N5.** *Davidova oblíbená prvočísla $p$ a $q$ splňují rovnici*

$$p^3 + 107 = 2q(17q + 24).$$

*Najděte všechny možné takové dvojice prvočísel $p, q$.*

*Řešení.* Všimneme si, že $p$ je liché. Kdyby $p$ bylo sudé, tak by levá strana rovnosti byla lichá a pravá sudá. Kdyby $q$ bylo sudé, dostaneme po dosazení vyhovující dvojici $(5, 2)$.
Uvažujme teď, že $p, q$ jsou lichá prvočísla. K rovnici přičteme vlevo i vpravo 18, čímž si jsme schopni rovnici upravit na

$$(p + 5)(p^2 - 5p + 25) = (5q + 3)^2 + (3q + 3)^2.$$

Podívejme se na ni v modulo 4. Víme, že v obou závorkách vpravo je sudé číslo, jeho kvadratický zbytek (mod 4) je tedy 0, takže celá pravá strana je 0 (mod 4) a dopočítáme, že $p \equiv 3 \pmod 4$. Pak ale $p^2 - 5p + 25 \equiv 3 \pmod 4$. Pokud je číslo ve tvaru $4k + 3$, pak musí mít v prvočíselném rozkladu prvočíslo ve tvaru $4k+3$. Tedy existuje prvočíslo $r$ ve tvaru $4k+3$, které dělí obě strany rovnosti. Nyní využijeme, že pokud prvočíslo $p$ je ve tvaru $4k + 3$ a $p \mid a^2 + b^2$, pak $p \mid a$ a $p \mid b$. (Jinak by totiž bylo $-1 \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^2 \pmod p$ nebo $-1 \equiv \left(\frac{b}{a}\right)^2 \pmod p$, ale $-1$ není kvadratický zbytek modulo prvočísla tvaru $4k + 3$.)
Pro $r$, tedy platí $r \mid 5q+3$ a $r \mid 3q+3$. Pokud jsou 2 čísla dělitelná $r$, pak zřejmě i jejich lineární kombinace bude dělitelná $r$ a protože $5(3q + 3) - 3(5q + 3) = 6$, tak $r \mid 6$, proto $r = 3$ a zároveň $(5q + 3) - (3q + 3) = 2q$, takže zároveň $r|2q$, proto $q = 3$. Z toho dostáváme $p = 7$.

Davidovy oblíbené dvojice prvočísel $(p, q)$ jsou tedy $(5, 2)$ a $(7, 3)$.

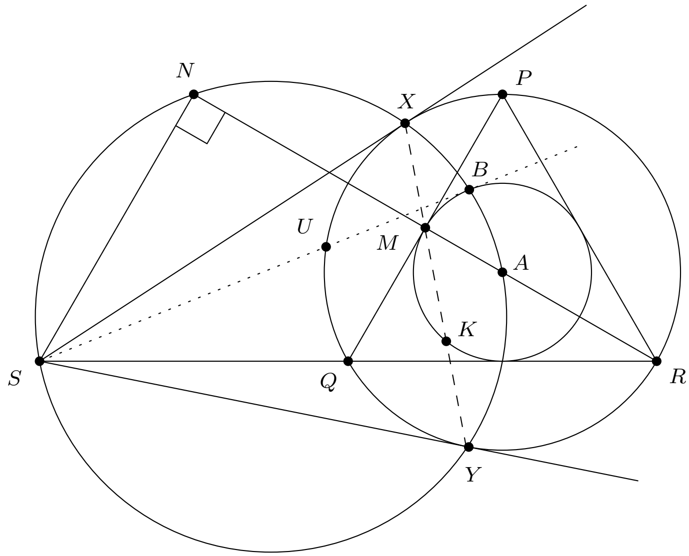
*Poznámky opravujícího.* V úloze bylo důležité najít hezký tvar rovnice, ze kterého se dá postoupit dál. Všechna došlá řešení, která nebyla správná si rovnici upravila jinak a nepodařilo se jim dojít do konce. Obě došlá kompletní řešení obsahovala tento tvar.

*(Vašek Voráček)*

**Úloha G5.** *Malý Jakub si nakreslil rovnostranný trojúhelník $PQR$ a obrázek schoval na půdu. Když Jakub vyrostl a obrázek náhodou objevil, dokreslil si do něj kružnici opsanou a vepsanou se* *společným středem $A$, středový obraz bodu $R$ podle bodu $Q$, který označil $S$, a dále body dotyku tečen z bodu $S$ ke kružnici opsané trojúhelníku $PQR$, které označil $X$ a $Y$. Ten z průsečíků přímky $XY$ s kružnicí vepsanou, který leží blíž k bodu $Q$, označil $K$. Bod dotyku tečny z bodu $S$ ke kružnici vepsané, který neleží na úsečce $QR$, označil $B$ a průsečík úsečky $SB$ s kružnicí opsanou označil $U$. Dokažte, že čtyřúhelník $KUBA$ je tětivový.*

*Řešení.* Ukážeme, že $XY$ prochází středem úsečky $PQ$, který si označíme jako $M$. Přímka $XY$ je polára bodu $S$ vzhledem ke kružnici opsané. Protože bod leží na přímce, právě tehdy, když polára tohoto bodu prochází pólem této přímky, stačí nám ukázat, že $S$ leží na poláře bodu $M$, vzhledem ke kružnici opsané. Označme si jako $N$ obraz bodu $M$ ve stejnolehlosti se středem $R$ a koeficientem 2. Zřejmě $S$ je obrazem $Q$ v této stejnolehlosti. Protože $A$ je těžiště trojúhelníku $PQR$, je $2MA = AR$. Zároveň platí $AN = RN - RA = 2RM - RA = 2(RA + AM) - RA = RA + 2AM = 2RA = \frac{RA^2}{\frac{1}{2}RA} = \frac{RA^2}{AM}$. Protože $RA$ je poloměr kružnice opsané a body $A$, $M$, $N$ leží zjevně na přímce, je $N$ obrazem $M$ v inverzi podle kružnice opsané. Zároveň $\angle ANS = \angle AMQ = 90°$, takže $NS$ je kolmice na $AM$ procházející obrazem $M$ v inverzi podle kružnice opsané, takže $NS$ je polára bodu $M$, z čehož plyne, že $S$ na této poláře skutečně leží.

Nyní uvažujme osovou souměrnost podle přímky $AS$. Ta nám zachová kružnici opsanou a vepsanoua prohodí k nim příslušné tečny, tedy $SX$ prohodí s $SY$ a $SB$ prohodí s $SR$. Bod $U$ tudíž přejde na bod $Q$, bod $K$ na bod $M$, $A$ zůstane sebou samým a $B$ přejde na dotyk kružnice vepsané s $QR$. Tyto čtyři body leží na kružnici nad průměrem $AQ$, takže tvoří tětivový čtyřúhelník. Proto i obraz tohoto čtyřúhelníku, tj. čtyřúhelník $KUBA$, musí být tětivový.




*(Rado Švarc)*