

Řešení 1. série

Úloha C1. Pro celé číslo $n > 2$ je na tabuli napsaná uspořádaná n -tice $(1, 2, \dots, n)$. V každém kroku je možné vybrat dvě čísla z n -tice taková, že jejich součet je druhou mocninou přirozeného čísla, a vyměnit je, čímž vznikne nová n -tice. Najděte všechny n , pro která se na tabuli mohou vyskytnout všechny permutace původní n -tice $(1, 2, \dots, n)$.

Řešení. Odpovědou je $n \geq 14$. Uvažujme přirozenou grafovou interpretácií. Zostrojíme graf G , ktorého vrcholy sú čísla $1, 2, \dots, n$, pričom vrcholy i a j spojíme hranou práve vtedy, keď $i + j$ je štvorec. Jedna povolená operácia je potom práve výmena dvoch čísel, ktoré sú spojené hranou. Najprv ukážeme, že žiadne $n \leq 13$ nevyhovuje. Všimnime si, že pre $n \leq 13$ komponenta grafu obsahujúca 2 je podmnožinou množiny $2, 7, 9$. Nakoľko 2 môže byť spojená iba s 7. 7 môže byť spojená iba s 2 a 9. Napokon 9 môže byť spojená iba so 7. Pre $n \leq 13$ teda čísla z komponenty 2 sú odizolované od zvyšku grafu, čo má za následok, že napríklad 2 sa nevie dostať na prvú pozíciu a tým nevieme dostať všetky permutácie. Teraz ukážeme, že všetky $n \geq 14$ vyhovujú.

Lemma 1. Pre každé $n \geq 14$ je graf G súvislý.

Důkaz. Budeme postupovať indukciou podľa n . Pre $n = 14$ stačí nájsť súvislý podgraf obsahujúci všetkých 14 vrcholov. Takým podgrafom je cesta spolu s jednou vetvou

$$9 - 7 - 2 - 14 - 11 - 5 - 4 - 12 - 13 - 3 - 1 - 8, \quad 3 - 6 - 10.$$

Všetky susedné dvojice na týchto úsekoch majú súčet rovný dokonalému štvorcu, takže graf pre $n = 14$ je súvislý. Predpokladajme teraz, že graf na vrcholoch $1, 2, \dots, k$ je súvislý pre nejaké $k \geq 14$. Uvažujme graf na vrcholoch $1, 2, \dots, k + 1$. Stačí ukázať, že nový vrchol $k + 1$ má suseda medzi vrcholmi $1, 2, \dots, k$. Keby takého suseda nemal, potom by v intervale $k + 2, k + 3, \dots, 2k + 1$ nebol žiadny štvorec, lebo práve tieto čísla majú tvar $k + 1 + a$, kde $1 \leq a \leq k$. Nech x^2 je najväčší štvorec menší ako $k + 2$. Potom $x^2 \leq k + 1$, zatiaľ čo z nášho predpokladu vyplýva $(x + 1)^2 \geq 2k + 2$. Preto $k + 1 \leq (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$, a teda $x \geq k/2$. Zároveň však $x^2 \leq k + 1$, čiže $k^2/4 \leq k + 1$. To dáva $k^2 - 4k - 4 \leq 0$, čo je pre $k \geq 14$ spor. Teda vrchol $k + 1$ má hranu do už súvislého grafu na vrcholoch $1, 2, \dots, k$. Preto je súvislý aj graf na vrcholoch $1, 2, \dots, k + 1$. Indukciou sme hotoví. \square

Lemma 2. Ak je graf G súvislý, potom možno dosiahnuť všetky permutácie čísel $1, 2, \dots, n$.

Důkaz. Je známe, že každá permutácia je zložením transpozícií, teda výmen dvoch prvkov. Stačí preto ukázať, že vieme uskutočniť ľubovoľnú výmenu dvoch prvkov. Najprv si všimnime, že ak vieme vymeniť a s b a vieme vymeniť b s c , potom vieme vymeniť aj a s c : stačí vykonať postupnosť výmen (a, b) , potom (b, c) , a nakoniec opäť (a, b) . Vezmime teraz ľubovoľné dve rôzne čísla x a y . Keďže graf G je súvislý, existuje cesta $x - v_1 - v_2 - \dots - v_i - y$, kde i môže byť aj 0. Výmeny susedných vrcholov na tejto ceste sú povolené. Opakovaným použitím predchádzajúceho pozorovania dostaneme, že vieme vymeniť x a y . Vieme teda uskutočniť ľubovoľnú výmenu, a preto aj ľubovoľnú permutáciu. \square

Pre $n \leq 13$ sme ukázali, že všetky permutácie dosiahnuť nemožno. Na druhej strane, pre $n \geq 14$ je podľa prvej lemy graf G súvislý, a teda podľa druhej lemy možno dosiahnuť všetky permutácie.

(Matej Bachniček)

Úloha G1. Čtyřúhelník $ABCD$ je rozdělen na tětivové čtyřúhelníky s po dvou disjunktními vnitřky. Žádný z vrcholů tětivových čtyřúhelníků v rozdělení není vnitřním bodem strany žádného jiného čtyřúhelníku v rozdělení ani strany čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že $ABCD$ je také tětivový.

Řešení. Uvažujme takové rozdělení $ABCD$ na čtyřúhelníky, kde vyznačíme všechny vrcholy a hrany tětivových čtyřúhelníků. Nejprve ukážeme, že vrcholy a strany v tomto rozdělení tvoří bipartitní graf. Stačí ověřit, že tento graf neobsahuje lichý cyklus. Uvažujme libovolný cyklus K v tomto grafu, který má h hran. Vnitřek cyklu K je rovněž rozdělen na čtyřúhelníky; označme jejich počet n a počet vnitřních hran cyklu K označme e . Těchto n čtyřúhelníků má dohromady $4n$ hran. V tomto počítání jsou hrany cyklu K započítány jednou, zatímco vnitřní hrany dvakrát, a tedy $4n = h + 2e$. Odtud vidíme, že $h = 2(2n - e)$, je sudé.

Graf je tedy bipartitní, vrcholy čtyřúhelníků lze obarvit červeně a modře tak, aby sousední vrcholy měly různé barvy. Nechť A, C jsou červené vrcholy a B, D modré vrcholy. Označme počet vnitřních červených bodů p a počet vnitřních modrých bodů k . V každém dílčím čtyřúhelníku je součet úhlů u červených vrcholů roven součtu úhlů u modrých vrcholů. Proto jsou si rovny i celkové součty úhlů u červených a modrých vrcholů. Sečtením úhlů u červených a modrých vrcholů zvlášť dostáváme

$$\angle BAD + \angle DCB + p \cdot 360^\circ = \angle CBA + \angle ADC + k \cdot 360^\circ.$$

Odtud plyne

$$\angle BAD + \angle DCB \equiv \angle CBA + \angle ADC \pmod{360^\circ}.$$

Jelikož na obou stranách kongruence leží součet dvou úhlů mezi 0° a $2 \cdot 360^\circ$, dostáváme

$$\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC.$$

To ukazuje, že $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník.

(Alexis Théodore Dachary)

Úloha N1. Pro každé kladné celé číslo n uvažme jeho dvojkový zápis. Označme $f(n)$ číslo, které dostaneme po odstranění všech nul z dvojkového zápisu, a $g(n)$ počet jedniček, který v tomto zápise nachází. (Například $f(19) = 7$ a $g(19) = 3$.) Najděte všechny kladné celé n , pro která platí

$$n = f(n)^{g(n)}.$$

Řešení. Samozřejmě platí, že pokud $g(n) = k$, pak $f(n) = 2^k - 1$, takže ve skutečnosti máme najít všechna $k \geq 1$ taková, že $(2^k - 1)^k$ má v binárním zápise právě k jedniček. Pro $k = 1$ dostáváme řešení $n = 1$ a pro $k = 2$ dostáváme řešení $n = 9$. Je-li k liché, pak

$$(2^k - 1)^k \equiv -1 \pmod{2^k},$$

tedy jeho binární zápis končí k jedničkami, a proto má celkem více než k jedniček, pokud $k \neq 1$. Nyní předpokládejme, že $k \geq 4$ je sudé. Ukážeme existenci dvou bloků jedniček, oba délky téměř k , což už dá spor.

První blok je na samotném začátku. Všimněme si, že $(2^k - 1)^k < 2^{k^2}$ a dále podle Bernoulliho nerovnosti platí

$$2^{k^2} - (2^k - 1)^k = 2^{k^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^k \right) \leq 2^{k^2} \cdot \frac{k}{2^k} = k \cdot 2^{k^2 - k}.$$

Proto je na začátku binárního zápisu alespoň $k - \log_2 k$ jedniček. Na druhou stranu uvažme posledních $2k$ binárních číslic. Ty jsou stejné jako u čísla $4^k - k \cdot 2^k + 1$. To znamená, že prvních $k - \log_2 k$ číslic tohoto bloku jsou opět jedničky. Celkem tedy máme alespoň $2k - 2 \log_2 k + 1$ jedniček v binárním zápisu, což je pro $k \geq 4$ více než k .
(Veronika Menšíková)

Úloha A1. Necht' A_1, A_2, \dots, A_m je m podmnožin libovolné množiny velikosti n . Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_i| \cdot |A_i \cap A_j| \geq \frac{1}{mn} \left(\sum_{i=1}^m |A_i| \right)^3.$$

Řešení. Nech S je daná množina s n prvky. BUNV nech $S = \bigcup_{i=1}^m A_i$. Pre prvok $x \in S$ označme c_x počet množin A_i , ktoré obsahujú prvok x (teda $c_x \geq 1$). Ďalej označme $s_i = \sum_{x \in A_i} \frac{1}{c_x}$. Všimnime si, že $\sum_{i=1}^m s_i$ započíta každé $\frac{1}{c_x}$ práve c_x -krát, a preto se tato suma rovná počtu prvkov v S , tedy n . Všimneme si, že z Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti platí

$$s_i \cdot \left(\sum_{x \in A_i} c_x \right) \geq \left(\sum_{x \in A_i} 1 \right)^2 = |A_i|^2.$$

Využitím tohoto tedy platí, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_i| \cdot |A_i \cap A_j| &= \sum_{i=1}^m |A_i| \sum_{j=1}^m |A_i \cap A_j| \\ &= \sum_{i=1}^m |A_i| \sum_{x \in A_i} c_x \\ &\geq \sum_{i=1}^m \frac{|A_i|^3}{s_i}. \end{aligned}$$

Teraz využitím Hölderovej nerovnosti dostávame

$$mn \cdot \left(\sum_{i=1}^m \frac{|A_i|^3}{s_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{|A_i|^3}{s_i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m s_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m 1 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^m |A_i| \right)^3.$$

Spojením týchto dvoch nerovností dostávame po vydelení mn vytúženú nerovnosť.

(Adam Džavoronok)