Riešenia 6. série

Úloha G6. *Daný je trojuholník ABC. Nech M a N sú postupne stredy strán AC a AB. Priamky BM a CN pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku ABC druhýkrát v bodoch M' a N'. Nech body X,Y ležia postupne na polpriamkach opačných k polpriamkam BC a CB tak, že $|\measuredangle N'XB| = |\measuredangle ACN|$ a $|\measuredangle M'YC| = |\measuredangle ABM|$. Dokážte, že trojuholník AXY je rovnoramenný.*

Riešenie. Označme postupně B', C' obrazy B, C ve středové souměrnosti podle M, N. Protože M leží ve středu AC i BB', je $BCB'A$ rovnoběžník. Obdobně je $CBC'A$ rovnoběžník.

Díky rovnoběžnosti AB a CM' získáváme

$$|\angle BMC| = |\angle MBA| = |\angle M'YC|.$$

Bod B' může ležet vně nebo uvnitř v kružnice opsané trojúhelníku ABC. V prvním případě leží body B, M', B' na přímce v tomto pořadí, v druhém případě leží na přímce v pořadí B, B', M'. V obou případech dokázaná rovnost úhlu ukazuje, že čtyřúhelník $CYB'M'$ je tětivový. Tudíž, opět rozborem případů a za využití tětivovosti $ABCM'$,

$$|\angle B'YC| = |\angle BM'C| = |\angle BAC|.$$

Obdobně dokážeme $|\angle C'XB| = |\angle BAC|$. Tedy $XYB'C'$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami XY a $B'C'$. Navíc A je středem úsečky $B'C'$, neboť $|AB'| = |BC| = |AC'|$. Tudíž A leží na ose úsečky XY a $|AX| = |AY|$. (Alternativně lze využít shodnosti trojúhelníků $AC'X$ a $AB'Y$.)

Poznámky opravovateľa. Většina dorazivších řešení byla správně, ovšem často také opomněla rozebrat konfigurace. To šlo vyřešit i pomocí orientovaných úhlů. Bod jsem za to nestrhávala, protože to v řešení téměř nic nezmění, ale dávejte si na to pozor. *(Majda Mišinová)*

Úloha A6. *Rovnica $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ má tri reálne korene $x_1 < x_2 < x_3$. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí, že 3 delí $\lceil x_3^n \rceil$. ($\lceil y \rceil$ je značenie pre hornú celú časť čísla y, čo je najmenšie celé číslo väčšie alebo rovné ako y)*

Riešenie. Trochou počítania (napr. Newtonovou metódov) zistíme, že $x_1 \in \left(-\frac{6}{10}, -\frac{5}{10}\right)$; $x_2 \in \left(\frac{6}{10}, \frac{7}{10}\right)$; $x_3 \in (2,3)$. Z toho máme, že

$$0 \leq x_1^n + x_2^n \leq |x_1^n| + |x_2^n| \leq |x_1^2| + |x_2^2| < \frac{36}{100} + \frac{49}{100} < 1$$

pre $n > 1$. Pre $n = 1$ tvrdenie zrejme platí,lebo $x_3 \in (2,3)$ Pre $n = 2$ z Viètových vzťahov máme, že $x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$ teda $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 9$, čo využitím predošlého pozorovania nám dá $x_3^2 = 9 - (x_1^2 + x_2^2) \in (8, 9)$, čím sme vyriešili prípad $n = 2$

Pre $n \geq 3$ Označme $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$. Indukciou ukážeme, že S_k-čka sú neklesajúca postupnosť kladných celých čísel a jej členy sú deliteľné 3. $S_0 = 3$, $S_1 = 3$ a $S_2 = 9$ a . Teda pre nejaké $k > 2$ predpokladajme, že $S_{k-2}, S_{k-1}, S_k \in \mathbb{N}$ a sú deliteľné 3. Keďže platí, že $x_1^3 = 3x_2^2 - 1$ z toho, že to je koreň tak $x_1^{k+1} = 3x_1^k - x_1^{k-2}$, čo platí aj pre x_2 a x_3. Teda $S_{k+1} = 3S_k - S_{k-2} \geq 2S_k > S_k$; $S_{k+1} = 3S_k - S_{k-2} \in \mathbb{N}$ a zároveň $3|S_{k+1}$.

Následne $x_3^n = S_n - (x_1^n + x_2^n) \in (S_n - 1, S_n)$, z čoho plynie, čo sme cheli.

(Martin Kopčány)

Úloha N6. *Šošo zobral svoje obľúbené kladné celé číslo $a_1 > 2$ a následne skonštruoval nekonečnú postupnosť predpisom*

$$a_{n+1} = a_n^n - 1.$$

Nech pre kladné celé číslo $m > 1$ značí $p(m)$ najmenšieho prvočíselného deliteľa m. Určite všetky kladné celé čísla $a_1 > 2$, pre ktoré bola postupnosť $p(a_n)$ ohraničená.

Riešenie. Odpoveďou sú všetky nepárne a_1. Predpokladajme, že a_1 je nepárne. Všimnite si, že $a_{2n} = a_{2n-1}^{2n-1} - 1 \equiv -1 \pmod{a_{2n-1}}$, takže $a_{2n+1} = a_{2n}^{2n} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{a_{2n-1}}$ Preto $a_{2n-1}|a_{2n+1}$ a indukciou dostaneme $a_1|a_{2n+1}$ pre všetky n, a preto $p(a_{2n+1})$ je ohraničené. Aby sme ukázali, že $p(a_{2n})$ je tiež ohraničené, ukážeme, že a_{2n} je vždy párne. V skutočnosti $a_{n+1} = a_n^n - 1 \equiv a_n - 1 \pmod 2$, takže to platí podľa indukcie.

Teraz ukážeme, že ak je n párne,tak $p(a_n)$ nie je ohraničená. Predpokladajme, že je ohraničená. To znamená, že existuje konečná množina prvočísel taká, že každé číslo v postupnosti je deliteľné jedným z nich. Nech sú prvočísla v tejto množine $2, p_1, p_2, \dots p_k$. Napíšme $m = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1)$. Všimnime si, že keďže a_1 je párne a a_{n+1} má inú paritu ako a_n, dostaneme, že a_{2n} je vždy nepárne. Konkrétne a_{m+2} je nepárne. Dokážeme, že a_{m+2} nie je deliteľné žiadnym z $p_1, \dots, p_k$, čo je spor.

Podľa Malej Fermátovej vety máme

$$a_{m+1} = a_m^m - 1 = (a_m^{p_i-1})^{\frac{m}{p_i-1}} - 1 \equiv 0, -1 \pmod{p_i}$$

ak $a_{m+1} \equiv 0 \pmod{p_i}$ máme $a_{m+2} \equiv -1 \pmod{p_i}$ a ak $a_{m+1} \equiv -1 \pmod{p_i}$, máme $a_{m+2} \equiv -2 \pmod{p_i}$. V oboch prípadoch p_i nedelí a_{m+2}, ako sme chceli. *(Matej Vasky)*

Úloha C6. *Určte všetky kladné celé čísla n, pre ktoré vieme ofarbiť štvorčeky nekonečnej štvorčekovej siete tak, že v každom obdĺžniku, ktorý obsahuje n políčok, je nepárny počet ofarbených políčok.*

Riešenie. Tvrdíme, že je to možné pre všetky kladné celé čísla n. Kladné celé číslo, pre ktoré je takéto ofarbenie možné, nazvime dobré. Aby sme ukázali, že všetky kladné celé čísla n sú dobré, dokážeme nasledovné: (i) Ak n je dobré a p je nepárne prvočíslo, potom pn je dobré; (ii) Pre každé $k \geq 0$ je číslo $n = 2^k$ dobré. Z bodov (i) a (ii) spoločne vyplýva, že všetky kladné celé čísla sú dobré.

Dôkaz (i) Jednoducho si všimneme, že ak každý obdĺžnik pozostávajúci z n štvorčekov obsahuje nepárny počet červených štvorčekov, potom musí obsahovať aj každý obdĺžnik pozostávajúci z pn štvorčekov. Keďže p je prvočíslo, obdĺžnik pozostávajúci z pn štvorčekov musí mať rozmer (dĺžku alebo šírku) deliteľný p, a preto sa dá rozdeliť na p obdĺžnikov pozostávajúcich z n štvorčekov. Preto každé ofarbenie, ktoré funguje pre n, automaticky funguje aj pre pn.

Dôkaz (ii) Pozorujme, že obdĺžniky s $n = 2^k$ políčkami majú $k + 1$ možných tvarov: $2^m \times 2^{k-m}$ pre $0 \leq m \leq k$.

Claim: Pre každý z týchto $k + 1$ tvarov existuje ofarbenie s dvoma vlastnosťami:

- Každý obdĺžnik s n políčkami a tvarom $2^k \times 2^{k-m}$ obsahuje nepárny počet červených políčok.
- Každý obdĺžnik s n políčkami a iným tvarom obsahuje párny počet červených políčok

Dôkaz claimu: To sa dá dosiahnuť takto: za predpokladu, že štvorčeky sú označené $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, ofarbíme štvorček červenou farbou, ak $x \equiv 0 \pmod{2^m}$ a $y \equiv 0 \pmod{2^{k-m}}$. Obdĺžnik $2^m \times 2^{k-m}$ obsahuje každú možnú dvojicu $(x \mod 2^m, y \mod 2^{k-m})$ presne raz, takže takýto obdĺžnik bude obsahovať jedno červené políčko (nepárne číslo).

Na druhej strane, uvažujme obdĺžnik $2^\ell \times 2^{k-\ell}$ s $\ell > m$. Množina buniek, ktoré pokrýva, je (x, y), kde x pokrýva rozsah veľkosti 2^ℓ a y pokrýva rozsah veľkosti $2^{k-\ell}$. Počet červených políčok je počet x s $x \equiv 0 \mod 2^m$ vynásobený počtom y s $y \equiv 0 \mod 2^{k-m}$. Prvý počet je presne $2^{\ell-k}$, pretože 2^k delí 2^ℓ (zatiaľ čo druhý je 0 alebo 1), takže počet červených políčok je párny. Prípad $\ell < m$ je podobný.

Nakoniec, ak máme k dispozícii týchto $k + 1$ ofarbení, môžeme ich sčítať modulo 2, t.j. štvorček bude sfarbený na červeno, ak je červený v nepárnom počte týchto $k + 1$ ofarbení.

(Adam Džavoronok)