Riešenia 6. série

Úloha A6. *Sú dané nezáporné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dokážte, že*

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\frac{a_1a_2}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}+\dots+\frac{a_1\cdots a_{n-1}}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\le 1.$$

Riešenie. Postupujme indukcí podle n. Pro $n=1$ máme dokázat $\frac{1}{1+a_1}\le 1$, což je nezáporností a_1 zřejmé. Dále v obecném případě přepišme levou stranu do tvaru

$$L=\frac{1}{1+a_1}+\frac{a_1}{1+a_1}\cdot\left(\frac{1}{1+a_2}+\frac{a_2}{(1+a_2)(1+a_3)}+\dots+\frac{a_2\cdots a_{n-1}}{(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\right).$$

V závorce máme tvar levé strany dokazované nerovnosti aplikované na $(n-1)$-tici čísel $a_2,\dots,a_n$, takže z indukčního předpokladu můžeme (díky nezápornosti $\frac{a_1}{1+a_1}$) odhadnout

$$L\le\frac{1}{1+a_1}+\frac{a_1}{1+a_1}\cdot 1=\frac{1+a_1}{1+a_1}=1,$$

čímž jsme indukcí hotovy.

Poznámky opravovateľa. Úloha byla dost lehká a obdrželi jsme spoustu řešení, z nichž všechna byla správně. Někteří řešitelé navíc ukázali, že rovnost nastává právě tehdy, když je jedno z čísel $a_1,\dots,a_n$ nulové. Někdy se naopak vyskytovaly drobné technické nedostatky, za které jsem však body nestrhával: někteří začínali indukci na $n=2$, čímž přísně vzato nedokázali nerovnost v případě $n=1$, a někteří zvlášť rozebírali, zda je nějaké a_i nulové, co však většinou vůbec nebylo třeba. *(Matěj Doležálek)*

Úloha N6. *Nazvime prirodzené číslo n mocninové, ak $n=x^k$ pre nejaké prirodzené čísla x, k, kde $k\ge 2$. Nech je $a_1, a_2, a_3, \dots$ rastúca postupnosť, v ktorej sú zoradené všetky mocninové čísla. Dokážte, že pre nekonečne veľa indexov i je $a_{i+1}-a_i$ násobkom 2021.*

Riešenie. Všimněme si, že pro $n\equiv 1010 \mod 2021$ platí

$$2021 \mid (n+1)^2-n^2=2n+1.$$

Ukážeme, že existuje nekonečně mnoho $n\equiv 1010 \mod 2021$ takových, že mezi n^2 a $(n+1)^2$ neleží žádné mocninové číslo. Určitě se nemůže stát, že by mezi nimi ležel nějaký čtverec, může to být jenom nějaká vyšší mocnina. Dokážeme, že takových mocnin je naštěstí „málo“.

Uvažme nějaké přirozené N. Počet k-tých mocnin menších nebo rovných N je $\lfloor\sqrt[k]{N}\rfloor$. To je pro $k\ge 3$ určitě nejvýše $\lfloor\sqrt[3]{N}\rfloor$. Zřejmě nás zajímají jenom mocniny s exponentem $k\le\lfloor\log_2(N)\rfloor$. Počet třetích a vyšších mocnin tedy můžeme shora odhadnout jako

$$\log_2(N)\sqrt[3]{N}.$$

Nyní se podívejme, kolik dvojic n^2, $(n+1)^2$, $n\equiv 1010 \mod 2021$ je od 1 do N. To určitě bude aspoň

$$\left\lfloor\frac{\sqrt{N}}{2021}\right\rfloor.$$

Logaritmus roste pomaleji než libovolná mocninná funkce, zejména $\log_2(N)$ roste pomaleji než $\sqrt[6]{N}$. Tím jsme ovšem hotovi, protože potom $\sqrt{N}$ roste asymptoticky rychleji než $\log_2(N)\sqrt[3]{N}$. Našich dvojic čtverců je tedy s rostoucím N mnohem více než vyšších mocnin a existuje nekonečně mnoho těch, mezi kterými žádné jiné mocninové číslo není.

Poznámky opravovateľa. Všechna řešení byla správná a postupovala podobně jako vzorové řešení. Lišila se zejména v eleganci odhadů počtu mocninových čísel. *(Pepa Minařík)*

Úloha G6. *V trojuholníku ABC sa vpísaná kružnica dotýká strán BC, CA, AB v bodoch D, E, F. Nech je ω_a kružnica so stredom v A a prechádzajúca bodom D; analogicky potom definujme kružnice ω_b, ω_c. Dokážte, že ortocentrum trojuholníka DEF má rovnakú mocnosť ku všetkým trom kružniciam ω_a, ω_b, ω_c.*

Riešenie. Budeme značit $\lessdot A$, $\lessdot B$, $\lessdot C$ osy úhlů $\triangleleft A$, $\triangleleft B$, $\triangleleft C$. Nechť je H ortocentrum DEF a označme E_1 druhý průsečík EH s ω_b. Analogicky budiž F_1 druhý průsečík FH s ω_c.

Dokážeme, že E_1FEF_1 je tětivový. Označme I_A střed kružnice A-připsané ABC. Protože $E_1E \parallel \lessdot B$ a osa E_1E prochází středem ω_b (tedy bodem B), tak osa E_1E je vnější osa úhlu $\triangleleft B$. Analogicky $F_1F \parallel \lessdot C$, tedy osa F_1F je vnější osa úhlu $\triangleleft C$. Tedy obě tyto osy prochází bodem I_A. Ze symetrie podle $\lessdot A$ je osa FE shodná s $\lessdot A$, tedy prochází I_A. Tedy I_A je střed kružnice opsané E_1FEF_1, tedy speciálně E_1FEF_1 je tětivový.

Z toho platí, že $|HE| \cdot |HE_1| = |HF| \cdot |HF_1|$, tedy H má stejnou mocnost k ω_b a ω_c. Ze symetrie úlohy má i stejnou mocnost k ω_a.

Poznámky opravovateľa. Mezi došlými řešeními se objevily i přístupy používající komplexních čísel a linearity mocnosti. *(Radek Olšák)*

Úloha C6. *V rovine leží niekoľko obdĺžnikov, ktorých strany sú rovnobežné so súradnicovými osami a ktoré spĺňajú nasledujúcu vlastnosť: pre ľubovoľné dva obdĺžniky A, B existuje vodorovná alebo zvislá priamka, ktorá pretína[1] A aj B. Dokáž, že je možné zvoliť jednu vodorovnú a jednu zvislú priamku tak, aby každý obdĺžnik bol pretnutý aspoň jednou z nich.*

Riešenie. (podľa Magdy Mišinovej) Postupovať budeme tak, že sa budeme snažiť odoberať odbĺžniky a zmenšovať úlohu až dovtedy, kým nedostaneme situáciu s malým počtom obdĺžnikov, ktorú určite vyriešiť vieme. Po odobratí obdĺžnika budeme chcieť získať riešenie menšej úlohy také, že každý odobratý obdĺžnik je tiež pretnutý jednou z dvoch vybraných priamok (alebo vieme priamky posunúť tak, aby odobraté obdĺžniky pretínali).

V riešení budeme používať pojmy ako vyššie, nižšie, viac vľavo alebo vpravo. Pokiaľ nebude napísané inak, budeme myslieť neostro vyššie (vyššie alebo rovnako vysoko) atď. Keď budeme brať nejaký extremálny (najľavejší, ...) obdĺžnik a bude ich existovať viacero, vezmeme ľubovoľný.

Nazvime obdĺžnik vertikálne dominantný, ak preň a každý iný obdĺžnik existuje horizontálna priamka, ktorá pretína oba (zjednodušene povedané, siaha aspoň od najvyššej spodnej hrany po najnižši hornú hranu nejaké obdĺžnika). Obdobne horizontálne dominantný je obdĺžnik, ak preň a každý iný obdĺžnik existuje vertikálna priamka, ktorá pretína oba.

Každý dominantný obdĺžnik môžeme odstrániť. Majme vertikálne dominantný obdĺžnik X. Označme h horizontálnu priamku, ktorú by sme vybrali pre ostatné obdĺžniky (bez X). Potom bude existovať obdĺžnik H_h, ktorého horná strana je vyššie než h a spomedzi takých strán je k h najbližšie. (Taký obdĺžnik neexistuje, len ak h žiaden nepretína, vtedy môžeme h ľubovoľne presunúť.) Podobne existuje obdĺžnik H_d, ktorého dolná hrana je nižšie než h a je k h najbližšie. Spomínané strany obdĺžnikov určujú pás P, v ktorom môžeme h bez problémov presúvať bez toho, aby nejaký obdĺžnik prestala pretínať (žiaden koniec obdĺžnika v páse neleží), ale môže začať pretínať nový obdĺžnik. Pre X a H_h existuje horizontálna priamka, ktorá oba pretína, takže dolná strana X musí byť nižšie ako horná strana H_h. Obdobne musí byť horná strana X vyššie než dolná H_d. Preto musí X pretínať pás P a vieme presunúť h tak, aby pretínala aj X. Podobne vieme odstrániť aj horizontálne dominantný obdĺžnik. Môžeme teda ďalej predpokladať, že žiadne dominantné obdĺžniky nemáme.

[1] Aby priamka pretínala obdĺžnik, stačí, aby iba obsahovala jeho stranu.

Pre ľubovoľný obdĺžnik O označme priamky dané jeho ľavou, pravou, hornou a dolnou stranou ako h_O, d_O, l_O, p_O.

Obdĺžnik s najľavejšou pravou stranou označme L, s najpravejšou ľavou stranou P, s najdolnejšou hornou stranou D a s najhornejšou dolnou stranou H. Ak je p_L napravo od l_P, tak všetky obdĺžniky majú pravú stranu napravo od l_P, pretože ju majú napravo od p_L. Všetky obdĺžniky tiež majú ľavú stranu naľavo od l_P. V tomto prípade stačí zobrať l_P, ktorá sama pretína všetky obdĺžniky a úloha je hotová.

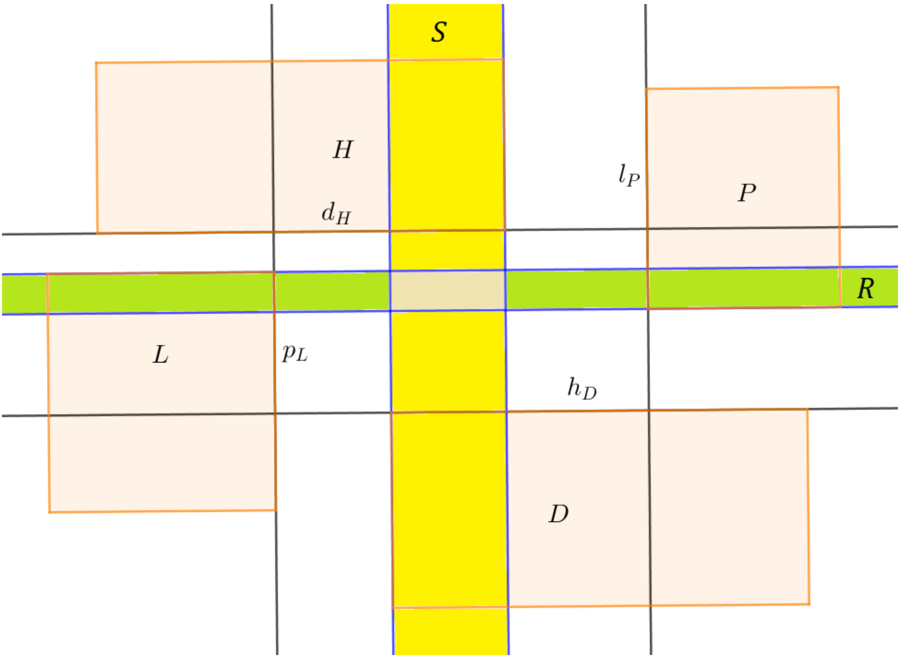
Ďalej môžeme teda predpokladať, že p_L je ostro vľavo od l_P a d_H je ostro nad h_D.

Teraz dokážeme, že ak obdĺžniky L, P, H, D nie sú rôzne, tak vieme vybrať dve požadované priamky. Ak by $H = D$, tak všetky obdĺžniky pretínajú celý ním určený horizontálny pás a vieme vybrať horizontálnu priamku, ktorá všetky pretne. Obdobne pre $L = P$.

Ak $H = P$, stačí vybrať priamky l_H a d_H. Ak pre ľubovoľný obdĺžnik X a H existuje spoločná vertikálna priamka, tak majú spoločnú aj l_H, ak je spoločná priamka horizontálna, tak d_H. Každý obdĺžnik má s H spoločnú vertikálnu alebo horizontálnu priamku, takže úloha je splnená.

Nech teda tieto štyri obdĺžniky sú rôzne. Každý obdĺžnik má pravú stranu napravo od p_L a ľavú stranu naľavo od l_P, takže zasahuje do pásu určeného p_L a l_P. Ak by H alebo D bol pretnutý obomi priamkami l_P aj p_L, tak by bol horizontálne dominantný. Podobne, ak by L alebo P bol pretnutý oboma priamkami d_H a h_D, musel by byť vertikálne dominantný.

Aspoň jedna z priamok l_P a p_L nepretína H. BUNV nech je to l_P, druhá situácia je symetrická. Potom neexistuje vertikálna priamka pretínajúca H aj P, takže musia mať spoločnú horizontálnu priamku a P musí byť pretnutý aj priamkou d_H. Dostali sme podobnú situáciu otočenú o 90 stupňov. h_D nemôže pretínať P (inak by bol P dominantný). Opakujeme postup a dostaneme, že l_P pretína D, p_L nepretína D. h_D pretína L a d_H nepretína L, p_L pretína H. Situácia teda musí vyzerať ako na obrázku.



Keďže neexistuje vertikálna priamka pretínajúca L aj P (p_L je ostro vľavo od l_P), musí byť taká horizontálna. Takže h_L je nad d_P. Obdobne l_D je vľavo od p_H. Horizontálny pás ohraničený h_L a d_P označme R, vertikálna pás ohraničený l_D a p_H označme S.

Teraz ukážeme, že ak pre naše obdĺžniky existuje dvojica priamok požadovaná zadaním, tak horizontálna leží v R a vertikálna v S. Pretože pre H a D neexistuje spoločná horizontálna priamka, musí vybraná vertikálna pretínať aspoň jeden z nich, BUNV D. Ak neleží v páse S, tak H musí byť pretnutý vybranou horizontálnou priamkou. Ale H nemá spoločnú horizontálnu priamku s L a D nemá spoločnú vertikálnu s L, takže L nám neprechádza žiadna vybraná priamka. To je spor, a teda ak dvojica priamok existuje, vertikálna je v S a analogicky horizontálna je v R.

Ďalej ukážeme, že každý obdĺžnik pretína R alebo S, sporom. Ak nejaký obdĺžnik X nepretína ani jeden z pásov, má 4 možnosti – buď p_X je ostro naľavo od l_D a h_X je ostro pod d_P (X je v ľavom dolnom kvadrante určenom krížom tvorenom pásmi), alebo je v niektorom inom kvadrante – situácia bude symetrická. V uvedenom prípade X nespĺňa podmienku so zadania o spoločnej priamke s P, v ostatných prípadoch je nespĺňa s iným obdĺžnikom.

Dokážeme, že pre obdĺžnika pretínajúce S a nepretínajúce R existuje vertikálna priamka, ktorá ich všetky pretína. Tieto obdĺžniky sú buď celé nad R, alebo pod R (ostro). Pre žiaden nad R neexistuje horizontálna priamka, ktorá pretína jeho aj L, preto všetky pretína p_L, zároveň zasahujú do pása S, takž ich pretína l_D. Obdobne, všetky obdĺžniky pod R pretína l_P a p_H. Obdĺžnik nad R s najľavejšou pravou stranou označíme H', obdĺžnik pod R s najpravejšou ľavou stranou označíme D'. Tieto obdĺžniky určite existujú, máme minimálne samotné H a D.

H' a D' nemôžu mať spoločnú horizontálnu priamku, takže majú spoločnú vertikálnu a $p_{H'}$ je napravo od $l_{D'}$. Pás U ohraničený týmito dvomi priamkami je vnútri pásu S (U nemôže siahať viac vpravo, ako siaha H ani viac vľavo, ako siaha D). Naša vertikálna priamka môže byť kdekoľvek v U, posúvaním nevie vyjsť von z niektorého obdĺžnika, ktorý chceme, aby pretínala.

Podobne to vieme spraviť pre obdĺžnky nepretínajúce S, ale pretínajúce R. Dostaneme obdĺžniky L', P' a pás T.

Keď miesto obdĺžnikov L, P, H, D a pásov R, S uvážime obdĺžniky L', P', H', D' a pásy T, U, dostaneme sa do veľmi podobnej situácie. Odstráňme obdĺžniky L, P, H a D a všetky ostatné obdĺžniky, ktoré nezasahú do R aj do S, neodstraňujme však L', P', H' a D'. Menované obdĺžniky sú v analogickej vzájomnej polohe, vybraná vertikálna priamka musí byť v U, horizontálna v T.

Čo však robiť, ak všetky obdĺžniky okrem L, P, H a D pretínajú R aj S? Môžeme odstrániť L, P, H a D. Totiž ak nájdeme pre zvyšné obdĺžniky dvojicu priamok, vieme ich posunúť do R a S (pretože neexistuje obdlžnik mimo tieto pásy), teda posunutím neprestane priamka žiaden obdĺžnik pretínať. Po posunutí bude pretínať aj L, P, H a D.

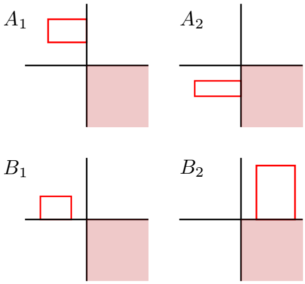
V každom prípade sa teda vieme zbaviť aspoň jedného obdĺžnika a dostať tak menšiu úlohu. Už nám chýba len základ indukcie. Ten môže nastať v prípade, kedy máme len štyri obdĺžniky L, P, H a D – vtedy vezmeme jednu priamku v páse R a jednu v S, alebo v prípde, že máme len tri obdĺžniky alebo menej. Vtedy vezmeme jednu spoločnú priamku dvoch obdĺžnikov a tretiu vezmeme ľubovoľnú kolmú pretínajúci obdĺžnik, ak máme menej obdĺžnikov, berieme ľubovoľne.

Úlohu sme teda vyriešili postupným zmenšovaním – ide v podstate o indukciu, akurát sme ju popísali odzadu. *(Michal Staník)*

Alternativní řešení. Svislou přímku a vodorovnou budeme vnímat dohromady jako kříž. Nejdříve kříž umíštíme do roviny tak, aby všechny obdélníky byly v jeho pravém dolním kvadrantu. Pak dokud nejsou všechny obdélníky pokryté budeme kříž posouvat doprava, nebo dolů. Ale za podmínky, že doprava se smíme posunout pouze pokud tím neztratíme žádný obdélník (byl pokrytý a už nebude) a dolů totéž.

Jak by se tento algoritmus mohl rozbít? Jen pokud se stane, že ještě nejsou pokryté všechny obdélníky a nemůžeme se posunout doprava ani dolů. Pojďme se podívat kdy se nemůžeme posunout doprava resp. dolů.

Pokud se nemůžeme pohnout doprava, tak nastala jedna ze situací na obrázcích A_1, A_2: v levém horním nebo levém dolním kvadrantu leží obdélník, který má pravou hranu na kříži. Ale situace A_1 nastat nemůže, protože máme předpoklad, že v pravém dolním kvadrantu jsou ještě nepokryté obdélníky, ale libovolný z nich nelze s obdélníkem z A_1 pokrýt přímkou. Takže doprava nemůžeme pouze situací A_2. Analogicky dolů nemůžeme pouze situací B_2. Ale situace A_2 a B_2 nemůžou nastat současně, protože obdélníky v nich nakreslené nejdou pokrýt, takže algoritmus se nezasekne. Takže konečností úlohy nalezne správné řešení.



(Radek Olšák)