# Riešenia 2. série

**Úloha C2.** *V obdĺžnikovej tabuľke s $m$ riadkami a $n$ stĺpcami, kde $m \leq n$, sú niektoré štvorčeky zafarbené načierno takým spôsobom, že žiadne dva riadky nie sú rovnaké. Nájdite najväčšie $k$ také, že nech sme nazačiatku mali ľubovoľné zafarbenie, tak vieme prefarbiť niektorých $k$ stĺpcov úplne načerveno tak, aby stále neboli žiadne dva riadky rovnaké.*

*Riešenie.* Ukážeme, že hľadané $k$ je rovné $n-m+1$. Zafarbenie stĺpca načerveno je ekvivalentné s jeho vymazaním (všetky riadky sa v ňom budú zhodovať, takže akoby neexistoval), preto budeme ďalej hovoriť, že stĺpce mažeme.

Najskôr ukážeme konštrukciu tabuľky $m \times n$, v ktorej nemožno vymazať viac stĺpcov. Zafarbime načierno v prvom riadku prvé políčko, v druhom druhé a tak ďalej, v $i$-tom riadku vždy $i$-te políčko. Ak by sme spomedzi prvých $m$ stĺpcov vymazali aspoň dva ($i$-ty a $j$-ty), potom by sa $i$-ty a $j$-ty riadok zhodovali, pretože by boli čisto biele (v oboch sme jediné čierne políčko vymazali). Spomedzi prvých $m$ stĺpcov teda môžeme vymazať najviac jeden a okrem toho môžeme vymazať všetkých $n-m$ ostatných, čo dáva odhad $k \leq n-m+1$.

Uvedomme si, že odstránenie $n-m+1$ stĺpcov je ekvivalentné s tým, že $m-1$ stĺpcov v tabuľke ponecháme. Budeme teda dokazovať, že vieme ponechať najviac $m-1$ stĺpcov tak, aby všetky riadky boli rôzne.

Ďalej ukážeme, že z každej tabuľky vieme vymazať $n-m+1$ stĺpcov. Budeme postupovať indukciou podľa počtu riadkov $m$. Základom indukcie bude $m=1$. Z tabuľky $1 \times n$ môžeme vymazať všetky stĺpce (a ponechať 0), jediný riadok nemá s akým byť zhodný, zmazali sme $n-m+1=n$ stĺpcov.

Predpokladajme teraz, že pre všetky tabuľky s rôznymi riadkami, ktorých počet $m'$ je menší ako $m$ ($m \geq 2$) platí, že vieme ponechať $m'-1$ stĺpcov tak, aby riadky ostali rôzne a majme ľubovoľnú tabuľku $m \times n$. Existuje aspoň jeden stĺpec, ktorý obsahuje aj biele, aj čierne políčko. Ak by to tak nebolo, boli by všetky riadky rovnaké.

Riadky vieme rozdeliť na dve skupiny podľa toho, či majú vo vybranom stĺpci biele alebo čierne políčko. Tých s bielym políčkom nech je $w$, pričom $1 \leq w \leq m-1$, tých s čiernym je $m-w$. Uvažujme tabuľku tvorenú len riadkami s bielym políčkom vo vybranom stĺpci. Z indukčného predpokladu z nej vieme vybrať $w-1$ stĺpcov tak, aby boli tieto riadky navzájom rôzne. Podobne vieme z tabuľky tvorenej len riadkami s čiernymi políčkami vybrať $m-w-1$ stĺpcov, aby boli riadky navzájom rôzne.

Keď vo veľkej tabuľke vyberieme spomínaných $w-1$ a $m-w-1$ stĺpcov z menších tabuliek a pridáme vybraný rozdeľovací stĺpec, nebudeme mať žiadne rovnaké riadky, každé sa buď líšia z indukčného predpokladu v menších tabuľkách (ak majú vo vybranom stĺpci rovnakú farbu) alebo sa líšia práve vo vybranom stĺpci. Vybrali sme najviac $(w-1)+(m-w-1)=m-1$ stĺpcov. Jednotlivé skupiny stĺpcov mohli, ale nemuseli byť disjunktné, ak neboli, stačilo nám vybrať menej stĺpcov, takže môžeme pridať nejaký vhodný počet ľubovoľných ďalších.

Ukázali sme, že z našej tabuľky vieme vybrať nanajvýš $m-1$ stĺpcov (a vymazať $n-m+1$), pričom riadky budú rôzne, teda z indukcie máme, že $k \geq n-m+1$.

Spojením získaných odhadov dostaneme, že hľadané $k=n-m+1$, čo bolo treba dokázať.

*(Michal Staník)*

**Úloha G2.** *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ také, že pre každý nedegenerovaný[1] štvorsten $ABCD$ so stredom vpísanej gule $I$ platí*

$$f(I) = f(A) \cdot f(B) \cdot f(C) \cdot f(D).$$

[1] To jest taký, že jeho 4 vrcholy neležia v jednej rovine.

*Riešenie.* Ukažme si dvě elegantní řešení této úlohy.

*Riešenie podle Michala Beránka.* Uvažujme libovolné dva čtyřstěny $ABCD$ a $AB'C'D'$ takové, že mají společný střed koule vepsané $I$ – je zřejmé, že takové dva čtyřstěny existují. Ze zadání platí

$$f(A)f(B)f(C)f(D) = f(A)f(B')f(C')f(D') = f(I),$$
$$f(B)f(C)f(D) = f(B')f(C')f(D').$$

Nyní uvažujme libovolný bod $X$ takový, že čtyřstěny $XBCD$ a $XB'C'D'$ mají různé středy koule vepsané $I_1$ a $I_2$ (zřejmě umíme zvolit $B'C'D'$ tak, abychom takový bod $X$ dokázali najít). Tím jsme získali konfiguraci bodů $A, B, C, D, B', C', D', X, I_1, I_2$, kde $f(I_1) = f(I_2)$. Tuto konfiguraci ovšem můžeme libovolně posouvat, škálovat a otáčet, body $I_1$ a $I_2$ jsou proto libovolné. Funkce $f$ tedy musí být konstantní.

Zároveň musí platit $f(A)f(B)f(C)f(D) = f(I)$, takže jediným řešením je $f(X) = 1$ pro každé $X \in \mathbb{R}^3$. Tato funkce zřejmě vyhovuje zadání.

*Riešenie podle Majdy Mišinové.* Uvažme libovolný pravidelný čtyřstěn $ABCD$ se středem koule vepsané $I$. Nad jeho stěny nadepišme pravidelné čtyřstěny $A'BCD, AB'CD, ABC'D$ a $ABCD'$. Středy jejich koulí vepsaných označme postupně $I_A, I_B, I_C$ a $I_D$. Všimněme si, že $I$ je střed koule vepsané čtyřstěnům $A'B'C'D'$ a $I_AI_BI_CI_D$. Nyní můžeme díky rovnosti ze zadání napsat

$$f(A')f(B)f(C)f(D) = f(I_A),$$
$$f(A)f(B')f(C)f(D) = f(I_B),$$
$$f(A)f(B)f(C')f(D) = f(I_C),$$
$$f(A)f(B)f(C)f(D') = f(I_D),$$
$$f(A)f(B)f(C)f(D) = f(I),$$
$$f(A')f(B')f(C')f(D') = f(I),$$
$$f(I_A)f(I_B)f(I_C)f(I_D) = f(I).$$

Kombinací těchto rovnic dostáváme

$$f(I) = f(I_A)f(I_B)f(I_C)f(I_D) = f(A')f(B')f(C')f(D')\Big(f(A)f(B)f(C)f(D)\Big)^3 = f(I)^4.$$

Teď už nutně $f(I) = 1$ pro libovolné $I$.

*Poznámky opravovateľa.* Snad každý řešil úlohu trochu jinak. Všechna správná řešení ale postupovala podobně jako jedno ze vzorových. Buď sestavila nějakou soustavu rovnic, nebo našla konfiguraci obsahující body se stejnou funkční hodnotou. *(Josef Minařík)*

**Úloha N2.** *Rozhodnite, či existuje funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spĺňajúca*

$$f(mf(n)) = f(m)f(n+m) + n$$

*pre ľubovoľné $n, m \in \mathbb{N}$.*

*Riešenie.* Ukážeme, že taková funkce neexistuje. Označme $c = f(1)$ a zkusme se na hodnoty $f$ dívat modulo $c$. Dosazením $m = 1$ dostaneme

$$f(f(n)) = cf(n+1) + n \equiv n \pmod{c}, \tag{1}$$

z čehož speciálně $f(c) = f(f(1)) \equiv 1 \pmod{c}$.

Uvažujme nyní přirozené číslo $z$. Dosazením $m = c$, $n = z$ dostaneme

$$f(cf(z)) = f(c)f(z+c) + z \equiv f(z+c) + z \pmod{c}. \tag{2}$$

Výraz $f(cf(z))$ ale vyjádříme, i pokud dosadíme $m = f(z)$, $n = 1$, což s pomocí (1) dá

$$f(f(z)c) = f(f(z))f(1 + f(z)) + 1 \equiv zf(1 + f(z)) + 1 \pmod{c}. \tag{3}$$

Nyní pokud $c \mid z$, dostaneme z kongruencí (3) a (2) postupně

$$1 \equiv zf(1 + f(z)) + 1 \equiv f(cf(z)) \equiv f(z + c) + z \equiv f(z + c) \pmod{c}.$$

Tedy pokud je $z$ násobek $c$ větší než $c$, pak $f(z) \equiv 1 \pmod{c}$. Zároveň i $f(c) \equiv 1 \pmod{c}$, takže dohromady pro $c \mid z$ platí $f(z) \equiv 1 \pmod{c}$. Dosazením zpět do (2) pak máme $f(z+c) \equiv 1-z \pmod{c}$ pro každé přirozené $z$. Pro každé $x \geq c$ tak platí $f(x) \equiv 1 - x \pmod{c}$.

Nyní ukážeme, že $c \mid 2$. Dosaďme $m = c + 2$, $n = c$. Potom je určitě každý z argumentů $mf(n)$, $m$ a $m + n$ větší než $c$. Máme tedy $mf(n) \equiv 2 \cdot 1 \pmod{c}$ a dále

$$-1 = 1 - 2 \equiv f(mf(n)) = f(m)f(n + m) + n \equiv (1 - 2)(1 - 2) + 0 \equiv 1 \pmod{c}.$$

To znamená, že $c \mid 2$, neboli $c \in \{1, 2\}$. Dosazením $m = n = 1$ však máme

$$f(c) = cf(2) + 1.$$

Pokud $c = 1$, pak z toho plyne spor v podobě $1 = f(1) = 1 \cdot f(2) + 1 > 1$, zatímco $c = 2$ vede na $f(2) = 2f(2) + 1 > f(2)$. Funkce splňující zadanou rovnost pro všechna přirozená čísla tak nemůže existovat.

*Poznámky opravovateľa.* Z došlých řešení bylo pouze jedno (skoro) správné a postupovalo vesměs stejně jako vzorák. Některá další řešení obdržela jeden bod za vyloučení alespoň jednoho z $f(1) = 1$ či $f(1) = 2$, mnozí dokonce dokázali, že 1 resp. 2 vůbec neleží v oboru hodnot $f$. Za jiné vlastnosti $f$, např. že je prostá, jsem body neuděloval – hlavním trikem řešení bylo modulení hodnotou $f(1)$, v kterémžto kontextu není prostost v přirozených číslech nijak užitečná.

*(Matěj Doležálek)*

**Úloha A2.** *V rovine je daná krivka $C$ tvorená všetkými bodmi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spĺňajúcimi $x^2 = y^3$. Priamka $\ell$ pretína $C$ v troch rôznych bodoch s $x$-ovými súradnicami $x_1$, $x_2$, $x_3$. Dokážte, že*

$$\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1x_2}} < -\frac{15}{4}.$$

*Riešenie.* Nejprve si všimneme, že svislé přímky protnou křivku $C$ v právě jednom bodě, zatímco vodorovné ji protínají ve dvou bodech, souměrných podle osy $y$. Takže $\ell$ nesmí být svislá ani vodorovná a musí mít rovnici $y = px + q$ pro vhodné konstanty $p$, $q$, přičemž $p \neq 0$. To znamená, že $x_i$ jsou tři různé, reálné kořeny kubické rovnice $(px + q)^3 - x^2 = 0$. Tu můžeme ekvivalentně upravit na

$$x^3 + \left(\frac{3q}{p} - \frac{1}{p^3}\right)x^2 + \frac{q^2}{p^2} + \frac{q^3}{p^3} = 0. \tag{4}$$

Chceme maximalizovat výraz $V = \sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1x_2}} = \frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}$. Ze symetrie $C$ i $V$ vůči záměně všech $x_i$ za $-x_i$ můžeme po překlopení $\ell$ dle osy $y$ předpokládat $p > 0$. Také nemůže nastat $q = 0$ – kdyby tomu tak bylo, byla by nula v (4) dvojnásobným kořenem, takže by kořeny nebyly různé. Zároveň z Viétových vztahů víme, že $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{p^3} - \frac{3q}{p}$ a $x_1x_2x_3 = -\frac{q^3}{p^3}$. Tím pádem platí $V = 3 - \frac{1}{p^2q}$ a dokazovaná nerovnost $V < -\frac{15}{4}$ je ekvivalentní s $p^2q < \frac{4}{27}$. Pro zpřehlednění teď zavedeme substituci $\alpha = \frac{q}{p}$, $\beta = p^3$, pak dokazujeme nerovnost $\alpha\beta < \frac{4}{27}$ a výše uvedená kubická rovnice je totéž jako

$$f(x) = \frac{x^2}{(x + \alpha)^3} = \beta.$$

Pro $q < 0$ je $p^2 q < 0 < \frac{4}{27}$, takže můžeme dále předpokládat $q > 0$, tím pádem $\alpha, \beta > 0$. Pokud se podíváme na znaménko $f$ spolu s výše uvedenými předpoklady, tak dostaneme $x_i > -\alpha$. Zderivováním dostáváme $f'(x) = \frac{x(2\alpha - x)}{(x+\alpha)^4}$, takže $f$ je klesající na intervalech $(-\alpha, 0)$ a $(2\alpha, +\infty)$ a rostoucí na $(0, 2\alpha)$. Tím pádem musí v každém z těchto intervalů ležet právě jeden kořen $x_i$. Na intervalu $(0, 2\alpha)$ nabývá $f$, ze spojitosti a monotonie, právě hodnot z intervalu $(f(0), f(2\alpha)) = \left(0, \frac{4}{27\alpha}\right)$, tudíž aby měla rovnice $f(x) = \beta$ řešení na tomto intervalu, musí platit $\beta < \frac{4}{27\alpha}$, což jsme chtěli dokázat.

*Alternativní řešení.* Křivku $C$ můžeme parametrizovat jako $(t^3, t^2)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Průsečíky s přímkou $\ell$ si tedy můžeme označit jako $(x_i, y_i) = (t_i^3, t_i^2)$ pro nějaká reálná $t_i$. Stejně jako v prvním řešení můžeme předpokládat, že $\ell$ má rovnici $y = px + q$. Dosazením do parametrizace $C$ dostáváme, že $t_i$ jsou různé kořeny kubické rovnice $t^3 - pt^2 - q = 0$.

Tím pádem z Viétových vztahů plynou rovnosti $t_1 + t_2 + t_3 = p$, $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0$ a $t_1t_2t_3 = q$. Dokazovaná nerovnost je tedy ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{t_1^2}{t_2t_3} + \frac{t_2^2}{t_3t_1} + \frac{t_3^2}{t_1t_2} < -\frac{15}{4}$$

za podmínky $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0$ (pro nenulová $t_i$). Ze symetrie můžeme předpokládat, že $t_1$ a $t_3$ mají stejné znaménko. Tato nová nerovnost i podmínka jsou homogenní, takže můžeme BÚNO položit $t_3 = 1$ (takže $t_1$ bude kladné). Podmínka pak je ekvivalentní $t_1t_2 + t_1 + t_2 = 0$, takže můžeme vyjádřit $t_2 = -\frac{t_1}{t_1+1}$, čímž dostaneme nerovnost v jedné proměnné:

$$\begin{aligned} -t_1(t_1+1) + \frac{t_1}{(t_1+1)^2} - \frac{t_1+1}{t_1^2} &< -\frac{15}{4}, \\ t_1^2 + \frac{1}{t_1^2} + t_1 + \frac{1}{t_1} &> \frac{15}{4} + \frac{t_1}{(t_1+1)^2}. \end{aligned}$$

Ta je však pouze součtem nerovností $t_1 + \frac{1}{t_1} \geq 2$, $t_1^2 + \frac{1}{t_1^2} \geq 2$ a $\frac{t_1}{(t_1+1)^2} \leq \frac{1}{4}$, které plynou z AG. Rovnost v nich nastává pouze v případě $t_1 = t_3 = 1$, což není dovoleno zadáním, proto bude platit ostrá nerovnost.

*Poznámky opravovateľa.* Úloha se nakonec ukázala být dost přístupnou na čtyřku. Všechna došlá řešení se vydala cestou druhého vzoráku a lišila se především způsobem, kterým dokazovala výslednou nerovnost s podmínkou. Kromě výše uvedené homogenizace došlo i na AG, rozklady a úpravy na čtverec či permutační nerovnost. *(Danil Koževnikov)*