Riešenia 4. série

Úloha G4. *Nech M je ľubovoľný bod na strane BC trojuholníka ABC. Nech k je kružnica, ktorá sa dotýka AB a BM v bodoch T a K a kružnice opísanej trojuholníku AMC v P. Dokážte, že ak $TK \parallel AM$, tak kružnice opísané trojuholníkom APT a KPC sa dotýkajú.*

Riešenie. Označme uhly v trojuholníku štandardne $|\angle CBA| = \beta, |\angle BAC| = \alpha, |\angle ACB| = \gamma$. Označme stred k ako S_k, kružnicu opísanú AMC ako k_{AMC}, a jej stred ako S_{AMC}.
Keďže sa k dotýka BA, BM v T, K, tak T leží na úsečke BA, K leží na BM. Potom k leží celé v $\angle ABC$.

(♣) Zo zadania M leží na strane BC, takže $|BM| \leq |BC|$. Navyše AMC je trojuholník, takže $|BM| < |BC|$.

Pretože k sa dotýka BA, BM v T, K, S_k leží na osi $\angle ABC$, a $\triangle TBK$ je rovnoramenný so základňou TK. Zo zadania $AM \parallel TK$, takže aj $\triangle ABM$ je rovnoramenný, so základňou AM. Potom os AM splýva s osou $\angle ABM$, takže S_{AMC} leží na osi $\angle ABC$. Bod dotyku P kružníc k a k_{AMC} leží na spojnici ich stredov, a pretože tie ležia na osi $\angle ABC$, aj P na nej leží.

Ukážeme, že P je prvý priesečník osi $\angle ABC$ a k_{AMC} (ten bližšie k B), a že k má s k_{AMC} vonkajší dotyk. Nech k' je kružnica dotýkajúca sa BA, BM v T', K'. Označme $S_{k'}$ stred k', prvý a druhý priesečník k_{AMC} s osou $\angle ABC$ ako P_1, P_2, a priesečníky k' ako P_1', P_2'. Postupne hýbme K' od B po M, P_1', P_2' sa vzďaľujú od B. Na konci $K' = M, T' = A$. Stačí ukázať, že $|BP_1'| < |BP_1|$ a $|BP_2'| < |BP_2|$ pre túto koncovú polohu K' — potom to platí aj pre ostatné polohy K'.

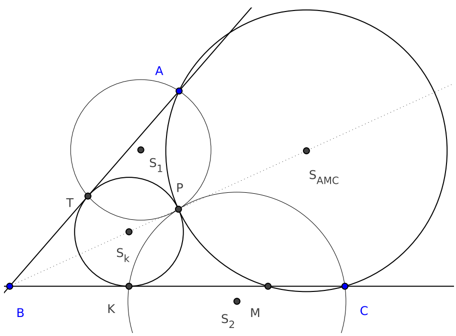
Štvoruholník $BK'S_{k'}T'$ je tetivový, lebo $|\angle BK'S_{k'}|+|\angle BT'S_{k'}| = 90°+90° = 180°$. Potom $|\angle K'S_{k'}T'| = 180° - \beta$. Zo stredového a obvodového uhlu potom $|\angle K'P_2'T'| = \frac{|\angle K'S_{k'}T'|}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}$. Potom $|\angle K'P_1'T'| = 180° - |\angle K'P_2'T'| = 90° + \frac{\beta}{2}$.

Z tetivového štvoruholníka AP_1MC máme $|\angle AP_1M| = 180° - \gamma$. Ukážeme, že $|\angle AP_1M| > |\angle\angle K'P_1'T'|$: to je ekvivalentné s $90° - \gamma - \frac{\beta}{2} > 0$. Z ♣ vieme, že $|BA| = |BM| < |BC|$, takže $\alpha > \gamma$. Potom $90° - \gamma - \frac{\beta}{2} > 90° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = 0°$.

Nakoľko P_1', P_1 sú v rovnakej polrovine vzhľadom na AM, tak z predchádzajúcej nerovnosti plynie $|P_1', AM| > |P_1, AM|$, odkiaľ $|P_1'B| < |P_1B|$.

Analogicky sa ukáže $|\angle AP_2M| < |\angle K'P_2'T'|$, a potom $|P_2'B| < |P_2B|$.

Označme S_1, S_2 stredy kružníc opísaných APT, CPK. Potom je situácia nasledovná:



To, že sa kružnice opísané APT, CPK dotýkajú, je ekvivalentné s $|\angle S_1PS_2| = 180°$.

P leží na osi AM, aj na oblúku kružnice k_{AMC} opačnom k oblúku ACM — je to teda stred tohto oblúka. Potom $|\angle ACP| = |\angle PCM| = \frac{\gamma}{2}$ (pretože sú oblúky ronako dlhé, k nim prislúchajúce stredové uhly $AS_{AMC}P$ a $PS_{AMC}M$ sú rovnaké, a k nim prislúchajúce obvodové uhly ACP a PCM sú rovnaké). Takže P leží na osi $\angle ACB$, a tiež vieme, že leží na osi $\angle ABC$ — potom je P nutne stred kružnice vpísanej ABC, takže $|\angle BAP| = |\angle PAC| = \frac{\alpha}{2}$.

Platí $|\angle S_1PT| = |\angle S_1TP|$ (— lebo T, P ležia na kružnici so stredom v S_1, takže $|S_1T| = |S_1P|$ a $\triangle TS_1P$ je rovnoramenný) $= \frac{180° - |\angle PS_1T|}{2}$ (— z uhlov v $\triangle TS_1P$) $= \frac{180° - 2|\angle PAT|}{2}$ (— z obvodového a stredového uhlu) $= 90° - \frac{\alpha}{2}$. Analogicky sa ukáže $|\angle S_2PK| = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Štvoruholník BKS_kT je tetivový, lebo $|\angle BKS_k| + |\angle BTS_k| = 90° + 90° = 180°$, potom $|\angle KS_kT| = 180° - |\angle KBT| = 180° - \beta$. K nemu obvodovú uhol KPT spĺňa $|\angle KPT| = \frac{|\angle KS_kT|}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}$.

Nakoniec $|\angle S_1PS_2| = |\angle S_1PT| + |\angle TPK| + |\angle KPS_2| = 270° - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 180°$, čo sme chceli dokázať.

(Truc Lam „Buj“ Bui)

Úloha N4. *Nájdite všetky dvojice celých čísel (x, y), pre ktoré platí*

$$x^6 + x^3y = y^3 + 2y^2.$$

Riešenie. Rovnicu upravíme na

$$(x^3)^2 + x^3y - (y^3 + 2y^2) = 0 \tag{1}$$

Túto rovnicu riešime ako kvadratickú rovnicu s premennou x^3. Dostávame

$$(x^3)_{12} = \frac{-y \pm \sqrt{4y^3 + 9y^2}}{2} = \frac{y}{2}\left(-1 \pm \sqrt{4y+9}\right)$$

Vidíme, že aby bolo číslo x^3 racionálne, tak musí byť $y = 0$ alebo číslo $\sqrt{4y+9}$ musí byť racionálne, čo je práve vtedy, keď je celé. Nakoľko je ale celé aj pre $y = 0$, tak možno každopádne povedať, že číslo $\sqrt{4y+9}$ je nutne celé. Pre nejaké celé číslo k spĺňajúce $4y + 9 = k^2$ tak platí

$$x^3 = \frac{y}{2}(-1 + k)$$

Z vyjadrenia $4y + 9 = k^2$ vidíme, že k je nepárne, takže možno položiť $k = 2n + 1$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Potom ľahko vyjadríme

$$\begin{aligned} y &= (n-1)(n+2) \\ x^3 &= n(n-1)(n+2) \end{aligned} \tag{2}$$

Pre n spĺňajúce $|n| \geq 3$ však ľahko overíme nerovnosti

$$(n+1)^3 > n(n-1)(n+2) > n^3$$

To znamená, že pre také n nemôže byť výraz $n(n-1)(n+2)$ tretia mocnina celého čísla. Takže stačí rozobrať prípady, keď $|n| \leq 2$:

- Pre $n \in \{-2, 0, 1\}$ dostaneme z (2) vzťah $x^3 = 0$, takže $x = 0$. Dosadeím do (1) potom dostaneme $-y^2(2 + y) = 0$, takže $y = 0$ alebo $y = -2$. Máme tak 2 riešenia pôvodnej sústave, $(0, 0)$ a $(0, -2)$.
- Pre $n = -1$ dostávame vzťah $x^3 = 2$, čo pre žiadne celočíselné x neplatí.
- Pre $n = 2$ napokon z (2) dostávame $x^3 = 8$, $y = 4$, čo dáva posledné riešenie $(2, 4)$.

Skúška v našom postupe nie je nutná, možno sa ňou však presvedčiť, že všetky 3 nájdené dvojice naozaj spĺňajú rovnicu zo zadania.

Záver: Všetky vyhovujúce dvojice (x, y) sú dvojice $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 4)$.

Poznámky opravovateľa. Úlohu riešilo celkovo 13 riešiteľov. Podľa výsledkov je jasné, že bol veľký problém napísať dokonalé riešenie. Chyby boli rozmanité a snáď sa každý z tých svojich poučí. Chcel by som podotknúť len jedno. Je síce pravda, že ak $\frac{y}{2}(-1 \pm \sqrt{4y + 9})$ je celé číslo, tak potom aj $\sqrt{4y + 9}$ je celé číslo. Keby sme však zamenili 9 za 8, už by to neplatilo. Z riešiteľov, ktorí toto potrebovali, to explicitne poznamenal iba *Danil Koževnikov*, za čo ho verejne chválim.

(Patrik Bak)

Úloha C4. *Nájdite všetky reálne čísla $k \geq 1$, pre ktoré sa obdĺžnik $k \times 1$ nedá rozdeliť na dva podobné nezhodné mnohouholníky.*

Riešenie. Najprv ukážeme, že pre $k = 1$ to nie je možné. Predpokladajme, že je. Pozrime sa na to, aká časť obvodu môže byť v jednom mnohouholníku. Je ľahké si rozmyslieť, že obvod musí byť rozdelený dvoma bodmi tak, že časť medzi nimi je v jednom mnohouholníku a zvyšok v druhom, alebo je celý obvod v jednom mnohouholníku. Každá strana jedného mnohouholníka, ktorá neleží na obvode štvorca, je zrejme aj stranou druhého mnohouhloníka. Keďže mnohouholníky sú podobné, tak majú aj rovnako veľa strán. Preto deliace body ležia buď na protiľahlých stranách štvorca, alebo v protiľahlých vrcholoch. V každom prípade, oba mnohouholníky obsahujú stranu štvorca, t.j. majú stranu dĺžky 1.

Keď sa pozrieme na najdlhšiu stranu väčšieho z nich, tak vieme, že je dlhšia ako najdlhšia strana druhého mnohouholníka. Preto nemôže byť na obvode štvorca, lebo by mala dĺžku 1 a taká je aj v druhom. No na druhú stranu nemôže byť vnútri štvorca, lebo by bola aj stranou druhého, čo je spor. Preto sa štvorec nedá rozdeliť na dva nezhodné podobné mnohouholníky.

Pre $k > 1$ sa to dá. Nech je to obdĺžnik $ABCD$, pri čom $|AB| = k, |BC| = 1$. Zvoľme reálne číslo $a > 1$ a prirodzené číslo n. Rozdelíme to lomenou čiarou $X_0X_1 \dots X_{2n+1}$ tak, že $X_0 \equiv C, X_{2n+1} \equiv A$, $|X_iX_{i+1}| = \frac{a^i}{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}}$ a úsečky $X_{2i}X_{2i+1}$ sú rovnobežné so stranou AB a zvyšné so stranou BC, teda po sebe idúce úsečky sú na seba kolmé.

Ľahko si uvedomíme, že toto rozdelenie je dobre popísané (platí $|X_1X_2| + |X_3X_4| + \cdots + |X_{2n-1} + X_{2n}| = |BC| = 1$) a taktiež tie dva mnohouholníky sú podobné s koeficientom podobnosti a, lebo ľahko sa dopočíta, že $|DX_1| = \frac{a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}} = a$ a $|BX_{2n}| = \frac{1+a^2+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}} = \frac{1}{a}$.

Musí však platiť, že $k = |DX_1| + |CX_1| = a + \frac{1}{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}} = \frac{1+a^2+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}}$. Pre fixné n nadobúda zrejme táto funkcia (lebo je spojitá) pre $a > 1$ všetky hodnoty od $1 + \frac{1}{n}$ do nekonečna. No a keďže $k > 1$, vieme určite nájsť také n aby $k > 1 + \frac{1}{n}$ a potom aj príslušné a a potom vieme obdĺžnik rozdeliť na dva podobné nezhodné mnohouholníky.

Preto hľadané k je len $k = 1$. *(Martin „Vodka“ Vodička)*

Úloha A4. *Polynóm $P(x)$ stupňa n s reálnymi koeficientami má n rôznych reálnych koreňov. Aký najväčší počet jeho koeficientov môže byť rovný 0?*

Riešenie. V tejto úlohe sa hodilo vedieť pár základných vecí o deriváciách.[1]

Vynecháme tu technické detaily (ktoré sú zväčša aj tak dosť vysokoškolské) a pozrieme sa na to trochu viac intuitívne. Majme polynóm, ktorý má n reálnych koreňov. Prípady $n \in \{0, 1\}$ si ľahko rozoberiete aj vy, zaoberajme sa ďalej iba $n > 1$. Medzi každými dvoma susednými koreňmi sa nachádza práve jeden lokálny extrém. Spolu máme $n-1$ rôznych lokálnych extrémov. Korene derivácie sú práve tieto lokálne extrémy a teda derivácia je tiež polynóm, ktorý vyhovuje zadaniu, len jeho stupeň je o 1 nižší.

Všimnime si ďalej, že absolútny a konštantný člen nemôžu byť naraz nulové, lebo nula by bola dvojnásobným koreňom.

Teraz prichádza hlavná myšlienka úlohy: Polynóm zo zadania nemôže mať dva koeficienty vedľa seba nulové. Naozaj, keby to tak bolo, viacnásobným derivovaním by raz vnikol polynóm ktorý má nulu ako dvojnásobný koreň.[2] To je v spore s tým, že aj derivácia má všetky korene rôzne a reálne. Maximálny odhad počtu nulových koeficientov je teda $\lceil n/2 \rceil$.

Naopak pre $\lceil n/2 \rceil$ už vieme poľahky skonštruovať potrebné polynómy.

Pre párne $n > 1$ vyhovuje napríklad $(x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - n/2)$.

Pre nepárne $n > 2$ vyhovuje $x(x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - \lfloor n/2 \rfloor)$.

Ako správny matematici nezabudneme ani na $n \in \{0, 1\}$: 1 respektíve x.

(Miro Psota)

[1] Základné poznatky o deriváciách poskytuje napríklad česká Wikipédia: `https://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace`

[2] ak nevieš prečo, pozri si pravidlá derivovania polynómov a skúmaj čo sa deje s poslednými členmi