Riešenia 2. série

Úloha A2. *Nech k je kladné celé číslo a nech bijekcia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ má nasledujúcu vlastnosť: Ak pre dvojicu celých čísel i, j platí $|i - j| \leq k$, potom tiež platí $|f(i) - f(j)| \leq k$. Ukážte, že pre ľubovoľnú dvojicu celých čísel i, j platí $|f(i) - f(j)| = |i - j|$.*

Riešenie. Uvažujme funkční hodnoty v bodech i a $i + 1$ pro nějaké $i \in \mathbb{Z}$. Nejprve předpokládejme, že $f(i + 1) > f(i)$. Označme $n = f(i)$ a $c = f(i + 1) - f(i)$, z předpokladu plyne $c > 0$. Pro zvolené i definujme $J = \{i - k + 1, i - k + 2, \ldots, i + k - 1, i + k\}$. Pro každé $j \in J$ platí $|i - j| \leq k$, takže ze zadání $|f(i) - f(j)| \leq k$. Z toho speciálně $f(j) \leq n + k$. Obdobně pro každé $j \in J$ platí $|i+1-j| \leq k$, ze zadání $|f(i+1)-f(j)| \leq k$. Pro každé $j \in J$ tedy $f(j) \geq n+c-k$.

Dohromady pro každé $j \in J$ platí $n + c - k \leq f(j) \leq n + k$. Každé $f(j)$ je celé číslo, takže různých hodnot $f(j)$ pro $j \in J$ je nejvýše $n + k - (n + c - k) + 1 = 2k - c + 1$. Zároveň f je bijekce, takže počet různých hodnot $f(j)$ pro $f(j) \in J$ je roven $|J| = i + k - (i - k + 1) + 1 = 2k$. Platí tedy $2k \leq 2k - c + 1$, z toho $c \leq 1$. Z definice je c přirozené, takže $c = 1$.

Případ $f(i + 1) = f(i)$ nastat nemůže, protože f je bijekce. Ve zbylých případech $f(i) < f(i+1)$. Zde označme $n = f(i+1)$ a $c = f(i) - f(i+1)$, takže opět $c > 0$. Obdobným způsobem jako v prvním případě opět získáme $c = 1$.

Pro každé $i \in \mathbb{Z}$ tedy platí $|f(i) - f(i + 1)| = 1$. Pokud existují celá čísla x, y taková, že $f(x + 1) = f(x) + 1$ a $f(y) = f(y + 1) + 1$, existuje mezi nimi (včetně) celé číslo z takové, že $f(z + 2) = f(z + 1) + 1 = f(z)$, což je spor s prostotou f.

Platí tedy buď $f(i + 1) = f(i) + 1$ pro každé i nebo $f(i + 1) = f(i) - 1$. V prvním případě induktivně $f(i) = f(0) + i$, takže $|f(i) - f(j)| = |f(0) + i - f(0) - j| = |i - j|$. Ve druhém případě induktivně $f(i) = f(0) - i$, dosazením opět $|f(i) - f(j)| = |i - j|$.

Poznámky opravovateľa. Většina řešení byla správná, případně s důkazními nedostatky. Několik řešitelů bohužel nepochopilo zadání a dokazovali úlohu z platnosti podmínky pro všechna k místo jednoho pevného. *(Tomáš Flídr)*

Úloha C2. *Nech X je množina všetkých vrcholov n-rozmernej kocky, teda nech obsahuje všetkých 2^n bodov tvaru $(\pm1, \pm1, \ldots, \pm1)$. Ukážte, že ktorákoľvek jej podmnožina $Y \subseteq X$ s viac ako $\frac{2^{n+1}}{n}$ prvkami obsahuje trojicu bodov, ktoré sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka.*[1]

Riešenie. Uvažme libovolný prvek $x \in X$ a označme $N(x)$ množinu prvků X, které se od x liší v právě jedné souřadnici. Vzdálenost libovolných dvou různých prvků $y_1, y_2 \in N(x)$ je $2\sqrt{2}$. Bude nám stačit ukázat, že existuje prvek $x \in X$ takový, že $|Y \cap N(x)| \geq 3$. Nyní uvažme součet

$$\sum_{x \in X} |Y \cap N(x)|.$$

Každý prvek z Y má n sousedů, takže do tohoto součtu přispěje právě n krát. Dostáváme

$$\sum_{x \in X} |Y \cap N(x)| = n|Y| > n \cdot \frac{2^{n+1}}{n} = 2^{n+1},$$

čímž jsme hotovi, protože z Dirichletova principu musí být jeden ze sčítanců aspoň 3.

(Pepa Minařík)

[1] Vzdialenosť bodov x, y je daná obvyklým vzťahom $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.

Úloha G2. *Je daný trojuholník ABC, ktorého kružnica vpísaná sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch X, Y, Z. Nech ω_1, ω_2, ω_3 sú kružnice s tetivami po rade YZ, XZ, XY také, že ω_1 sa pretne s ω_2 na priamke CZ a ω_1 s ω_3 na priamke BY.*

Predpokladajme, že ω_1 pretla XY, ZX druhýkrát v bodoch J, M, zatiaľ čo ω_2 pretla YZ, XY druhýkrát v bodoch L, I a konečne ω_3 pretla YZ, ZX druhýkrát v bodoch K, N. Dokážte, že body I, J, K, L, M, N ležia na jednej kružnici.

Riešenie. Zo zadania vieme, že bod C leží na chordále CZ kružníc ω_1, ω_2 a bod B leží na chordále BY kružníc ω_1, ω_3. Dokážeme, že AX je chordálou kružníc ω_2, ω_3, vďaka čomu bude úloha symetrická pre vrcholy A, B, C.

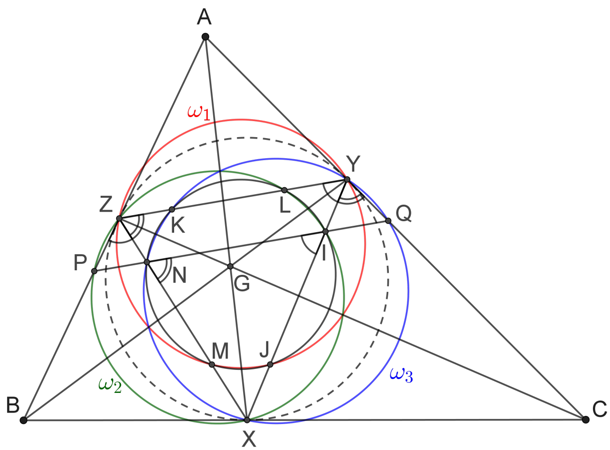
Priamky AX, BY a CZ sa pretínajú v jednom bode (Gergonnovom bode), označme ho G (To vyplýva z Cevovej vety, pretože platí $|AY| = |AZ|$, $|BX| = |BZ|$ a $|CX| = |CY|$). Tento bod je potečným stredom kružníc ω_1, ω_2 a ω_3, pretože CZ je chordálou kružníc ω_1, ω_2 a BY je chordálou kružníc ω_1, ω_3. Keďže bod X leží na kružniciach ω_2, ω_3, priamka GX, na ktorej leží bod A, je chordálou týchto kružníc.

Dokážeme, že body N, M, J, I ležia na kružnici. Zo symetrie bude platiť, že aj body J, I, L, K ležia na kružnici a podobne aj body L, K, N, M budú ležať na kružnici. Ak by sa jednalo o 3 rôzne kružnice, ich chordály NM, JI a LK by sa buď museli pretnúť v jednom bode alebo by museli byť rovnobežné. Avšak priamky NM, JI a LK tvoria strany trojuholníka XYZ, nemôžu sa teda pretínať v jednom bode ani nemôžu byť rovnobežné a preto sa nemôže jednať o tri rôzne kružnice.

Body M, J, Z, Y ležia na kružnici ω_1. Ak dokážeme, že priamky YZ a NI sú rovnobežné, dostaneme, že aj body N, M, J, I ležia na kružnici. Označme P druhý priesečník AB s kružnicou ω_2 a Q druhý priesečník AC s kružnicou ω_3. Dokážeme, že P, N, I, Q ležia na priamke rovnobežnej s ZY. Budeme využívať orientované uhly. Kružnica opísaná trojuholníku XYZ sa dotýka priamky BZ, takže s využitím úsekového uhlu a uhlov v kružnici ω_2 dostávame:

$$\measuredangle(ZY, YX) = \measuredangle(BZ, ZX) = \measuredangle(PZ, ZX) = \measuredangle(PI, IX)$$

Z čoho dostávame, že priamky ZY a PI sú rovnobežné. Analogicky dokážeme, že aj primaky ZY a QN sú rovnobežné.



Bod A leží na chordále kružníc ω_2, ω_3 a preto $|AZ| \cdot |AP| = |AY| \cdot |AQ|$, pričom trojuholník AZY je rovnoramenný, preto musí byť aj trojuholník APQ rovnoramenný. Z toho vyplýva, že priamky ZY a PQ sú rovnobežné, čo spolu s rovnobežnosťou priamok ZY s QN a ZY s PI dáva, že body P, N, I, Q ležia na priamke rovnobežnej s XY. Body Z, Y, M, J ležia na ω_1 a ZY je rovnobežné s NI a preto:

$$\measuredangle(MN, NI) = \measuredangle(MZ, ZY) = \measuredangle(MJ, JY)$$

Takže body N, M, J, I skutočne ležia na kružnici a ako bolo spomenuté predtým, analogicky vieme dokázať, že body J, I, L, K a L, K, N, M ležia na kružniciach a vieme, že sa nemôže jednať o tri rôzne kružnice a preto body I, J, K, L, M, N ležia na jednej kružnici.

Poznámky opravovateľa. Veľká časť riešení bola správna a väčšina postupovala podobne ako vzorové riešnie. *(Michal Pecho)*

Úloha N2. *Nájdite všetky kladné celá čísla n, pre ktoré platí*

$$\tau(n) \mid 2^{\sigma(n)} - 1,$$

kde $\tau(n)$ značí počet kladných deliteľov čísla n a $\sigma(n)$ značí súčet týchto deliteľov.

Riešenie. Pro $n = 1$ dělitelnost zjevně platí, jelikož $\tau(1) = 1 = 2^{\sigma(1)} - 1$. Dále ukážeme, že pro $n > 1$ dělitelnost neplatí. Pro důkaz si zaveďme následující značení: pro $n > 1$ označíme nejmenšího prvočíselného dělitele čísla n jako $f(n)$. Pro $n > 1$ dokážeme $f(\tau(n)) < f\left(2^{\sigma(n)} - 1\right)$, čímž bude ukázáno, že nějaké prvočíslo (konkrétně to nejmenší) v rozkladu $\tau(n)$ se vůbec nevyskytuje v rozkladu $2^{\sigma(n)} - 1$, takže dělitelnost nemůže platit.

Lemma 1. *Pro celá číslo $a, n > 1$ platí $f\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right) \geq f(n)$. Pro $a = 2$ je navíc nerovnost vždy ostrá.*

Dôkaz. Stačí ukázat, že když prvočíslo p dělí

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1},$$

pak má n taky nějakého prvočíselného dělitele menšího nebo rovného p. Rozlišme dva případy: Pokud $p \mid a - 1$, pak máme

$$0 \equiv \frac{a^n - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} \equiv n \cdot 1 \equiv n \pmod{p},$$

tedy $p \mid n$, což značí $f(n) \leq p$.

Jako druhý případ uvažujme $p \nmid a - 1$. Potom je dělitelnost $p \mid \frac{a^n-1}{a-1}$ ekvivalentní $a^n \equiv 1 \pmod{p}$. Je-li r řád a modulo p, pak je předchozí kongruence ekvivalentní $r \mid n$. Přitom ale díky malé Fermatově větě $r \mid p-1$ a z předpokladu $a \not\equiv 1 \pmod{p}$ je $r > 1$. Dohromady to znamená, že r, a tedy i n, má nějakého prvočíselného dělitele ostře menšího než p

Dokonce jsme tedy zjistili, že rovnost v $f\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right) \geq f(n)$ může vznikat pouze z případu $p \mid a - 1$. Pro $a = 2$ není $p \mid 1$ možné, takže zde dokonce dostaneme ostrou nerovnost, jak jsme chtěli. □

Vyzbrojeni lemmatem uvažujme n s prvočíselným rozkladem

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}.$$

Potom jsou pro $\tau(n)$ a $\sigma(n)$ známy předpisy

$$\tau(n) = (k_1 + 1) \cdots (k_m + 1),$$
$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_m^{k_m+1} - 1}{p_m - 1}.$$

Potom postupně odhadneme

$$f\left(2^{\sigma(n)} - 1\right) > f(\sigma(n)) = f\left(\frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_m^{k_m+1} - 1}{p_m - 1}\right) = \min_{1 \le i \le m} f\left(\frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}\right) \ge$$
$$\ge \min_{1 \le i \le m} f(k_i + 1) \ge f\Big((k_1 + 1) \cdots (k_m + 1)\Big) = f(\tau(n)).$$

První (ostrá) nerovnost je lemma pro $a = 2$, dále upravujeme s využitím očividné vlastnosti $f(n_1 \cdots n_m) = \min_{1 \le i \le m} f(n_i)$ a následně znovu použijeme lemma s $a = p_i$.

Důkaz, že dělitelnost nemůže platit pro $n > 1$, je tak hotov.

(Matěj Doležálek)