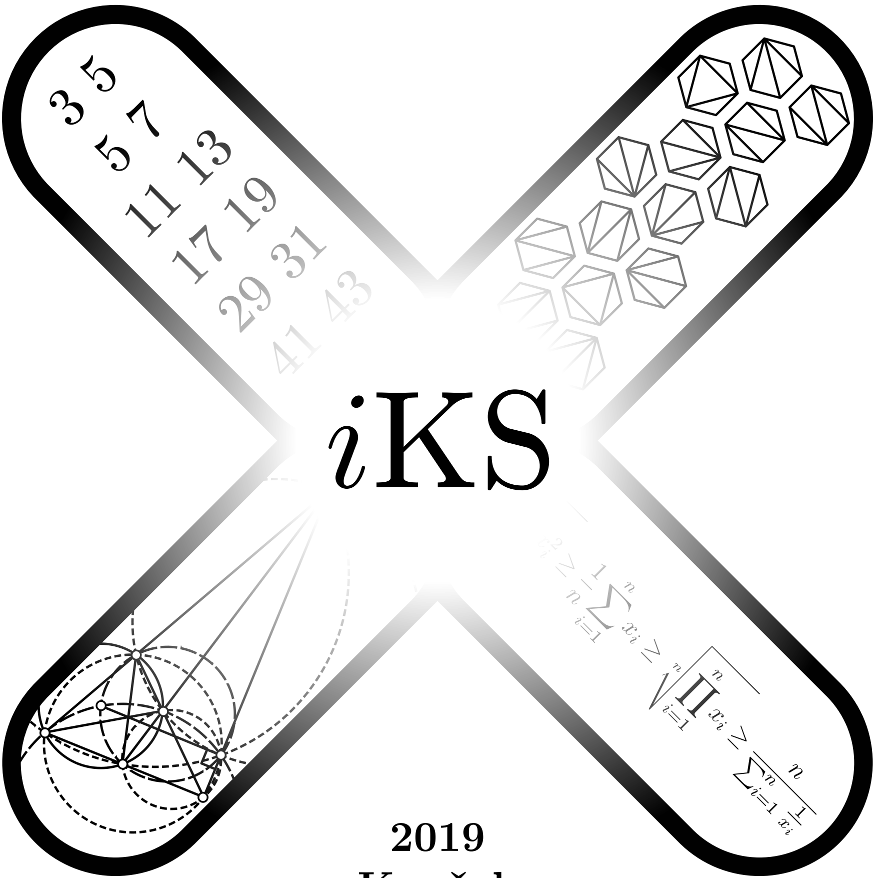

*i*KS

2019

Kunžak

Pavel Hudec
Danil Koževnikov
Jakub Löwit
Martin Raška
Tomáš Sásik
Rado van Švarc
Pavel Turek
Ákos Záhorský

Odmocniny z jedničky

Pavel Hudec

Abstrakt. Příspěvek seznamuje s vlatnostmí odmocnin z jedničky a jejich použitím v olympiádních úlohách, zejména v v úlohách, kde ať už přímo, nebo nepřímo, se vyskytují pravidelné mnohoúhelníky. Část příspěvku je věnována pokročilejším cyklotomickým polynomům a použití vytvořujících funkcí spolu s odmocninami z jedničky.

Rychlý úvod do komplexních čísel

V novověku začalo matematikům vadit, že některé polynomiální rovnice, včetně některých velmi jednoduchých, jako třeba $x^2+1=0$, nebo $x^n-1=0$, se nedají v reálných číslech rozložit na součin lineárních polynomů. A tak se zrodila geniální myšlenka – matematici si označili jako i řešení rovnice $x^2+1=0$ a uvážili obor čísel tvaru $a+bi$, kde a, b jsou reálná, který dnes nazýváme komplexními čísly. V komplexních číslech pak každý nenulový polynom stupně n má právě n komplexních kořenů a dá se rozložit na součin n závorek stupně jedna.

Komplexní čísla tedy můžeme chápat jako body roviny takové, že na ose x jsou reálná čísla, na ose y imaginární. Sčítání komplexních čísel probíhá standardně po složkách, sčítáme samostatně reálnou a imaginární část.

Zajímavější operací s komplexními čísly je jejich násobení. K tomu je dobré zavést goniometrický tvar komplexního čísla.

Definice. Goniometrickým tvarem komplexního čísla $z=a+bi$ rozumíme vyjádření

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde $r\in\mathbb{R}$ a $\varphi\in[0,2\pi)$. Takové vyjádření je jednoznačné. Číslo r pak nazýváme absolutní hodnotou z.

Tvrzení (Násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru). Pro libovolná nenulová komplexní čísla platí:

$$r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r_2(\cos\psi + i\sin\psi) = r_1r_2(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Definice. Exponenciálním tvarem komplexního čísla $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ rozumíme zkrácený zápis [1] z ve tvaru $z=r\cdot e^{i\varphi}$.

[1] Ve skutečnosti existují dobré důvody, proč se definuje umocňování na komplexní exponent právě takto. Těmi se však na této přednášce zabývat nebudeme.

Tvrzení (Násobení v exponenciálním tvaru). Pro libovolná nenulová komplexní čísla platí:

$$(r_1 \cdot e^{i\varphi}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\psi}) = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$$
$$(r \cdot e^{i\varphi})^n = (r^n \cdot e^{i(n\varphi)}).$$

Definice. Nechť je $z = a + bi$ libovolné komplexní číslo. Komplexně sdruženým číslem k číslu z rozumíme číslo $\overline{z} = a - bi$.

Definice. Komplexní jednotkou rozumíme komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je 1.

Tvrzení (Vlastnosti komplexních jednotek a komplexního sdružení). Nechť α, β jsou komplexní jednotky a z libovolné komplexní číslo. Potom platí:

- $z + \overline{z}$ a $z \cdot \overline{z}$ jsou reálná, navíc $z + \overline{z} = 2Re(z)$.
- $\alpha \cdot \beta$ je komplexní jednotka.
- α^c je komplexní jednotka pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.
- $\overline{\alpha} = \alpha^{-1}$

Definice. Odmocninami z jedničky řádu n rozumíme kořeny rovnice $x^n - 1 = 0$.

Úmluva. Pokud bude z kontextu jasné, jakého řádu odmocniny z jedničky jsou, budeme ozačení řádu obvykle vynechávat.

Tvrzení. Odmocninami z jedničky řádu n jsou právě čísla tvaru $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ pro $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Definice. Odmocninu z jedničky ω řádu n nazveme primitivní, pokud pro žádné přirozené $m < n$ neplatí, že $\omega^m = 1$.

Tvrzení. Nechť ω je primitivní odmocnina z jedničky řádu n. Potom posloupnost $(\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1})$ obsahuje právě všechny odmocniny z jedničky.

Tvrzení. Primitivními odmocninami z jedničky jsou právě komplexní čísla ve tvaru $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ pro $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, kde k a n jsou nesoudělná.

Úmluva. V situaci, kdy nespecifikujeme primitivní odmocninu z jedničky, ze kterou pracujeme, bude ω značit $e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Na primitnivní odmocniny z jedničky se tedy lze dívat jako na ty, které mají ty nejlepší vlastnosti – například jejich umocňováním umíme generovat všechny ostatní.

Konečně úlohy

Úloha 1. Nechť m a n jsou různá přirozená čísla taková, že rovnice

$$z^{m+1} + z^m + 1 = 0 \quad \text{a} \quad z^{n+1} + z^n + 1 = 0$$

mají alespoň jeden společný kořen. Dokažte, že $m \equiv n \equiv 1 \pmod 3$.

Úloha 2. Nechť P, Q, R, S jsou polynomy takové, že pro každé $x \in \mathbb{C}$ platí

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Dokažte, že $P(1) = 0$. (USA 1976)

Úloha 3. Nechť n je přirozené číslo a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce taková, že pro libovolný pravidelný n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ platí

$$f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n) = 0.$$

Dokažte, že f je nulová funkce. (Rumunsko 1996, iKS 5-C3)

Úloha 4. Máme dána přirozená čísla $m, n > 1$ a celá čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, z nichž žádné není násobkem m^{n-1}. Ukažte, že existují celá čísla $e_1, e_2, \dots, e_n$, ne všechna nulová, pro která platí $|e_i| < m$ pro každé $1 \le i \le n$, taková, že

$$m^n \mid e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n.$$

(ISL 2002)

Úloha 5 (těžší). Nechť a, b, c, d jsou primitivní n-té odmocniny z jedné. Určete hodnotu n, platí-li $a + b + c + d = 1$.

Sumy a součiny

Úloha 6. Nechť $A_1, A_2, \dots, A_n$ je pravidelný n-úhelník vepsaný do kružnice o středu O a poloměru R. Na polopřímce OA_1 najdeme bod P takový, že A_1 leží mezi O a P. Dokažte, že

$$\prod_{i=1}^{n} |PA_i| = |PO|^n - R^n.$$

(Putnam 1955)

Úloha 7. Dokažte, že $\prod_{i=1}^{n-1} \left|1 - \omega^i\right| = n$.

Úloha 8. Dokažte, že

$$\sum_{\omega} \frac{1}{4^k \left|1 - \omega\right|^2} = \frac{1}{16},$$

kde suma probíhá přes všechny primitivní 2^k-té odmocniny z jedničky.

Úloha 9. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Basilejský problém)

Dělitelnost polynomů

Definice. Polynom P dělí polynom R, právě když existuje polynom Q takový, že $PQ = R$. Zapisujeme $P \mid R$.

Věta (Gaussovo lemma). Nechť P, R jsou monické polynomy s celočíselnými koeficienty takové, že $P = QR$. Potom Q má také celočíselné koeficienty.

Cvičení 10. Dokažte, že polynom $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ dělí polynom $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$.

Úloha 11. Která z čísel v posloupnosti $101, 10101, 1010101, ...$ jsou prvočísla?

Úloha 12. Dokažte, že polynom

$$P(x) = x^n + 2^p$$

můžeme zapsat jako součin dvou nekonstantních polynomů s celočíselnými koeficienty, právě když n je dělitelné p.

Roots of unity filter

Značení. Pro polynom P označme $[p^n]$ jeho koeficient u x^n.

Tvrzení. Nechť P je polynom a ω primitivní n-tá odmocnina z jedničky. Potom platí:

$$P(1) + P(\omega) + \cdots + P(\omega^{n-1}) = n\big(\big[p^0\big] + [p^n] + \big[p^{2n}\big] + \cdots\big).$$

Úloha 13. Najděte hodnotu výrazu $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$, kde $n \in \mathbb{N}$ je dělitelné třemi.

Úloha 14. Kolik n-ciferných čísel, které se skládají z číslic $1, 3, 4, 6, 7$ a 9, má ciferný součet dělitelný sedmi?

Úloha 15. Je dáno n bodů na jednotkové kružnici takových, že součin vzdáleností libovolného bodu na jednotkové kružnici od daných bodů je nejvýše 2.

a) Dokažte, že daných n bodů musí být vrcholy pravidelného n-úhelníku.
b) Najděte příklad takové konfigurace.

Úloha 16. Nechť $S = \{1, \ldots, 100\}$ a pro libovolné přirozené n definujme

$$T_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in S^n \mid a_1 + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod{100}\}.$$

Určete všechna n s následující vlastností: pokud obarvíme libovolných 75 prvků S červeně, potom alespoň polovina uspořádaných n-tic z T_n obsahuje sudý počet červeně obarvených souřadnic. (USA TSTST 2018-6)

Úloha 17. Ať S_n značí množinu permutací posloupnosti $(1, 2, \ldots, n)$. Pro každou takovou permutaci $\pi \in S_n$ označme $\mathrm{inv}(\pi)$ počet dvojic $1 \leq i < j \leq n$ takových, že $\pi(i) > \pi(j)$. Nechť $f(n)$ je počet permutací $\pi \in S_n$, pro které je $\mathrm{inv}(\pi)$ dělitelné $n+1$.

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$ a nekonečně mnoho p takových, že $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$. (IMC 2016-5)

Lemma. Nechť p je prvočíslo a $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ jsou racionální čísla, pro něž platí

$$a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{p-1}\omega^{p-1},$$

potom $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$.

Úloha 18. Nechť $p > 2$ je prvočíslo. Označme A množinu $\{1, 2, \ldots, 2p\}$. Určete počet podmnožin A, které mají p prvků jejichž součet je dělitelný p.
(IMO 1995-6)

Cyklotomické polynomy

Definice. Jako n-tý cyklotomický polynom označujeme monický polynom, který má kořeny právě primitivní n-té odmocnin z jedničky. Tento polynom značíme $\Phi_n(x)$.

Tvrzení (Vlastnosti cyklotomických polynomů).

- $\Phi_n(x)$ je polynom stupně $\varphi(n)$ s celočíselnými koeficienty.
- $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$
- $\Phi_n(x)$ je nerozložitelný v racionálních číslech, tedy v racionálních číslech se $x^n - 1$ rozkládá na $\prod_{d|n} \Phi_d(x)$.
- Cyklotomické polynomy jsou po dvou nesoudělné.

Lemma (Počítání s cyklotomickými polynomy).

- $\Phi_n(x) = \Phi_{p_1 \cdots p_s}(x^{p_1^{r_1-1} \cdots p_s^{r_s-1}})$, kde $n = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ je prvočíselný rozklad čísla n.
- $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ pro liché $n \geq 3$.
- $\Phi_{pn}(x) = \frac{\Phi_n(x^p)}{x}$ pro p prvočíslo a $p \nmid n$.

Cvičení 19. Spočítejte několik prvních cyklotomických polynomů. Můžete využít lemma nahoře.

Cvičení 20. Rozložte polynom $x^n + 1$ na součin cyklotomických polynomů.

Cvičení 21. Dokažte, že $\Phi_{p^k}(x) = x^{(p-1)\cdot p^{k-1}} + \cdots + x^{p^{k-1}} + 1$.

Úloha 22. Řešte v $\mathbb{Z}$: $\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$.

Úloha 23. Najděte všechna přirozená $n > 1$ taková, že $2^n + 1$ je dělitelné n^2.
(IMO 1990)

Úloha 24. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (m, n), pro které platí $1 + x + \ldots + x^m \mid 1 + x^n + \ldots + x^{mn}$. (USAMO 1977)

Fast Fourier transform

V této sekci si představíme pěkný trik, jak lze násobit dlouhé polynomy stupně $n-1$. Jeden způsob je na to jít podle definice, což nám zabere asi n^2 násobení, neboť obecně potřebujeme lineárně násobení už na zjištění hodnoty jednoho koeficientu. To ale není nejefektivnější způsob, jak násobit polynomy. Představme si, že umíme rychle vypočítat hodnoty polynomu v n bodech. Potom můžeme hodnoty těchto polynomů v bodech vynásobit jako čísla. Pak už jenom potřebujeme výsledný polynom zpátky přehodit do klasického tvaru.

Ukazuje se, že pokud si jako body, ve kterých chceme vyhodnotit polynom, zvolíme dostatečně mnoho odmocnin z jedničky, tyto problémy překonat dokážeme. Při tom se pro jednoduchost omezíme na případ, kdy je n mocnina dvojky.

Definice. *Diskrétní Fourierovou transformací*, zkráceně DFT, rozumíme zobrazení $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, které vektoru $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ přiřadí vektor $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ takový, že pro všechna j platí

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \omega^{jk},$$

kde ω je nějaká pevně zvolená primitivní n-tá odmocnina z jedničky. Budeme značit $DFT_\omega(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

K čemu je nám dobré takové abstraktně zadefinované zobrazení? Můžeme se na něj dívat jako na krabičku, která z polynomu s koeficienty $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ vyrobí jeho hodnoty ve všech n-tých odmocninách z jedničky. Takové zobrazení má tu pěknou vlastnost, že je samo sobě téměř inverzním až na komplexní sdružení odmocniny z jedničky a konstantu $\frac{1}{n}$.

Tvrzení. Jestliže $DFT_\omega(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$, potom platí také

$$DFT_{\overline{\omega}}(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \frac{1}{n}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Zbývá nám tedy najít způsob, jak rychle spočítat DFT, tedy jak vyhodnotit polynom $P(x)$ ve všech odmocninách z jedničky najednou. K tomu si zapíšeme polynom $P(x)$ takto:

$$\begin{aligned}
P(x) &= E(x) + O(x) \\
E(x) &= a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} \\
O(x) &= a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Lemma. Polynom $P(x)$ můžeme rychle vyhodnotit, pokud máme hodnoty $E(x)$ a $O(x)$ v $\frac{n}{2}$-tých odmocninách z jedničky.

Lemma. DFT libovolného vektoru o n složkách lze spočítat s použitím nejvýše $cn \log n$ aritmetických operací pro $c \in \mathbb{R}$ nezávislé na n.

Věta. Dva polynomy stupně n lze mezi sebou vynásobit s použitím nejvýše $cn \log n$ aritmetických operací pro $c \in \mathbb{R}$ nezávislé na n.

[1] https://imosuisse.ch/smo/skripte/imovorbereitung/rootsofunity/en-rootsofunity.pdf
[2] Danil Koževnikov; *Cyklotomické polynomy*, Paseky 2018
[3] Andreescu T, Ganesh A; 108 Algebra Problems; 2014; XYZ Press
[4] Mareš M, Valla T; Průvodce labyrintem algoritmů; 2017; CZ.NIC z.s.p.o
[5] https://www.youtube.com/channel/UCYO_jab_esuFRV4b17AJtAw
[6] artofproblemsolving.com
[7] http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel

Hinty

Hint 1. Určete, co může být společným kořenem.

Hint 2. Co musíme dosadit, aby se pravá strana rovnala nule?

Hint 3. Zvolte $z \in \mathbb{R}^2$ a dosaďte $z + \omega^i$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Sečtěte rovnice a geometricky interpretujte, že jste dostali kupu pravidelných n-úhelníků a $n \cdot f(z)$.

Hint 4. Podívejte se na rozdíly všech takových součtů pro e_i nezáporná. Zbyde pouze jeden patologický případ. Vzpomeňte si na název přednášky a vysporujte ho.

Hint 5. Pro $(k, n) = 1$ uvažte automorfismy f_k z $\mathbb{Q}[\omega_n]$, které zobrazí ω_n na ω_n^k. Po sečtení $f_k(L) = f_k(P)$ přes všechna k dostaneme, že musí platit $4\mu(n) = \phi(n)$.

Hint 6. BÚNO jsou to odmocniny z jedničky.

Hint 7. Podívejte se na levou stranu jako na hodnotu vhodného polynomu v jedničce.

Hint 8. Použijte indukci a porovnejte odpovídající si členy.

Hint 9. Použijte předchozí příklad. Nemusíte být zcela formální.

Hint 11. Liché členy posloupnosti jsou dělitelné 101. Sudé členy si zapište jako hodnotu nějakého polynomu v destíce. Jaké ten polynom má kořeny?

Hint 12. Jaké kořeny můžou mít takové polynomy? Dokažte, že pak nemůžou mít všechny koeficienty celočíselné.

Hint 13. Přímočará aplikace tvrzení na polynom $(1 + x)^n$.

Hint 14. Je to součet koeficientů u $x^7, x^{14}, \ldots$ polynomu $(x + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^9)^n$. Použijte tvrzení a rozeberte dva případy podle dělitelnosti n sedmi.

Hint 15. Zapište si součin jako polynom a dosaďte do něj odmocniny z jedničky. Z tvrzení odhadněte $\sum_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$.

Hint 16. Fungují právě sudá n. Uvažujte polynom $P(x) = \sum_{i=1}^{100} r_i x^i = r_{100}x^{100} + \ldots + r_1 x$, kde $r_i = -1$, když i není obarvené červeně, jinak $r_i = 1$. Zajímá nás součet koeficientů u x^{100m} u jeho n-té mocniny. Liché n vyřešte šikovným obarvením, díky kterému hodnota polynomu ve většině odmocnin z jedničky bude nula. Pro sudá n zapište $P(x)$ jako $-\left(\sum_{i=1}^{100} x^i\right) + 2Q(x)$ a odhadněte každou část zvlášť.

Hint 17. Dokažte, že koeficient polynomu $P(x) = 1 \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdots (1+x+\cdots+x^{n-1})$ u x^k reprezentuje počet $\pi \in S_n$ takových, že $\mathrm{inv}(\pi) = k$. Použijte tvrzení, upravte a všimněte si, že v sumě jsou dva členy výrazně větší než všechny ostatní.

Hint 18. Najděte polynom takový, že po roznásobení členy cx^p odpovídají p-prvkovým podmnožinám A, přičemž c by mělo být závislé na součtu těchto prvků. Potom tento koeficient spočítejte dvěma způsoby a použijte lemma výše.

Hint 22. Počítejte modulo 7.

Hint 23. Nejprve dokažte, že $3 \mid n$ a pomocí rozkladu na cyklotomické polynomy $9 \nmid n$. Potom zvolte nejmenší $q > 3$, keré dělí n a vysporujte.

Hint 24. Rozložte oba polynomy nad komplexními čísly a určete jejich kořeny.

Analýza v MO

Danil Koževnikov

Abstrakt. Po stručném a neformálním úvodu do základů matematické analýzy si předvedeme řadu její aplikací v řešení nerovností. Přesto, že důraz bude kladen především na nerovnosti olympiádního typu, si předvedeme i několik vysokoškolských uplatnění.

„I suppose it is tempting, if the only tool you have is a hammer, to treat everything as if it were a nail.“

— Abraham Maslow

Základy analýzy

Na začátek si, bohužel, budeme muset pro pořádek zavést celou řadu definicí. Ačkoliv jejich přesné znění není většinou moc důležité, tak je zcela nezbytné mít o nich dobrou intuitivní představu, obzvlášť když se později budeme dostávat k čím dál komplikovanějším konceptům. Některé z pojmů si pro pohodlí zavedeme rovnou pro $\mathbb{R}^n$.

Úmluva. Jakékoliv tučné písmenko značí vektor (například $\mathbf{x}$). Složky vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ budeme značit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Úmluva. „Důkazy“, které si ukážeme, budou většinou poněkud neformální, respektive budou platit jen pro velmi speciální případy zmíněných tvrzení. Smiřte se s tím. Je to pro vaše dobro.

Úmluva. BÚNO jsou všechny funkce, se kterými pracujeme, dost hezké.

Definice. O $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ řekneme, že je *limitou posloupnosti* bodů $(\mathbf{x}_n)$, pokud pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje N takové, že $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| < \epsilon$ pro všechna $n > N$. Pak píšeme $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ a říkáme, že $(\mathbf{x}_n)$ konverguje k $\mathbf{x}$.

Definice. O reálném číslu c řekneme, že je *limitou funkce* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}_0$, pokud pro libovolné kladné ϵ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ je $|f(\mathbf{x}) - c| < \epsilon$. Pak píšeme $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = c$.

Definice. Funkci $f(\mathbf{x})$ je *spojitá* v bodě svého definičního oboru $\mathbf{x}_0$, pokud pro ni platí $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Definice. Bod $\mathbf{x}_0$ nazveme *lokálním maximem* funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pokud existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro všechna $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \epsilon$ je $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$. Lokální minima definujeme obdobně, souhrnně je označujeme jako lokální extrémy.

Na první pohled se může zdát, že výše uvedené definice jsou velmi neohrabané a poněkud matoucí, třeba proto, že obsahují spoustu kvantifikátorů. Jejich zavedení však kdysi posloužilo jako skutečný průlom ve vývoji matematiky, protože konečně umožnily formalizovat intuitivní představu, že se funkce nebo posloupnost něčemu blíží.

V tuhle chvíli už máme všechny potřebné nástroje k tomu, abychom mohli popisovat chování řady hezkých funkcí. Nesmíme však zapomínat, že je každá funkce daná mimo jiné svým definičním oborem. Definiční obory funkcí, které budeme zkoumat, spadají do jedné z následujících kategorií:

Definice. Mějme množinu $M \subset \mathbb{R}^n$, potom o ní řekneme, že je:

- *uzavřená*, pokud pro libovolnou konvergentní posloupnost bodů z M leží i jejich limita v M.
- *otevřená*, pokud pro libovolný bod $\mathbf{x} \in M$ leží i nějaké jeho okolí v M.
- *omezená*, pokud je podmnožinou nějaké koule s konečným poloměrem.
- *kompaktní*, pokud je uzavřená a omezená.

Definice. *Uzávěr* množiny U je nejmenší uzavřená množina $\bar{U}$, která obsahuje U jako podmnožinu. Množinu $\bar{U} \setminus U$ nazýváme *hranicí* U.

Poznámka. Technicky vzato je vždy zapotřebí uvádět, vzhledem k jaké množině je M uzavřená/otevřená, my to ale dělat nebudeme, protože to bude jasné z kontextu.

Cvičení. Rozmyslete si, že průnik, sjednocení a kartézský součin konečně mnoha uzavřených (resp. otevřených) množin je uzavřená (resp. otevřená) množina.

Cvičení. Rozmyslete si, že doplněk otevřené množiny je uzavřená množina (a naopak).

Pokud je oborem hodnot zkoumané funkce otevřená nebo uzavřená množina, tak o ní platí spousta užitečných tvrzení.

Věta. Každá spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nabývá globálního maxima a minima.

Důsledek. Každá spojitá funkce z kompaktní množiny $M \subset R^n$ do reálných čísel nabývá globálního maxima a minima.

Tvrzení. Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá, pak množina $M = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = c\}$ je uzavřená pro libovolné reálné c. Obecněji platí, že vzor libovolné uzavřené množiny je uzavřená množina.

Nerovnosti jedné proměnné

Teď už se konečně dostáváme ke hlavnímu tématu přednášky: hledání extrémů. Začneme hezky zlehka: zaměříme se na funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, jež už vám nejspíš budou celkem povědomé. Nejdůležitějším nástrojem, který budeme potřebovat, budou derivace:

Definice. Pro funkci f definujeme *derivaci* f v x jako $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (pokud je funkce definovaná na okolí x a daná limita existuje). O funkci, která má derivaci na nějaké množině M, říkáme, že je *diferencovatelná* na M (typicky bude M otevřený interval).

Ačkoliv se častěji používá tato klasická definice, tak o něco lepší představu o tom, co derivace vlastně je, dává následující tvrzení:

Tvrzení. Pokud je f diferencovatelná v x, pak $f'(x)$ je reálné číslo takové, že pro $h \in \mathbb{R}$ platí $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\alpha(h)$ pro funkci α, která splňuje $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$.

Tím pádem derivace funkce úzce souvisí s její nejlepší *lokální* aproximací přímkou, protože na pravé straně rovnosti máme právě rovnici přímky plus zbytek, který je v blízkém okolí x zanedbatelný. Občas se vyplatí nekoukat se na derivaci jako nějakou konkrétní limitu v daném bodě, nýbrž jako na tzv. *operátor*: objekt, který funkci f přiřadí jinou funkci f' (občas psáno $\frac{df}{dx}$).

Pro pořádek dodejme, že diferencovatelnost funkce je strašně silná podmínka (například každá diferencovatelná funkce musí být spojitá), takže vlastně teď omezujeme svoji pozornost na velmi úzkou a specifickou množinu funkcí. Není však třeba zoufat, protože všechny funkce, se kterými se běžně setkáte v běžném životě nebo v olympiádě, skoro všude diferencovatelné jsou!

Derivace má spoustu zajímavých a užitečných vlastností, například existuje několik jednoduchých pravidel, pomocí kterých můžeme zderivovat prakticky cokoliv pouze ze znalosti derivace základních funkcí, jako třeba $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro přirozené n, $(e^x)' = e^x$, $(\sin(x))' = \cos(x)$ a $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

Cvičení. S využitím výše uvedeného tvrzení dokažte, že pokud jsou f a g diferencovatelné ve správných bodech, tak platí:

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ (linearita derivace)
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (derivace součinu)
- $(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$ („řetízkové pravidlo“, $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx}\frac{df}{dg}$)

Cítíte-li se v derivování nejistí, tak si ho můžete procvičit na následujících příkladech:

Úloha 1. Zderivujte následující funkce: $x^3 - 4x + 3$, $(e^x + e^{-x})/2$, $\ln(x)$, x^r pro racionální r, $\tan(x)$, x^x, $\arcsin(x)$ a $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Úloha 2. Pokud $P(x)$ je reálný polynom stupně $n \geq 1$, čemu se rovná hodnota výrazu $\frac{P'(x)}{P(x)}$?

Úloha 3. Ukažte, že funkce f, definovaná jako $f(x) = x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$, je všude diferencovatelná a platí $f'(0) = 1$, přesto však f není rostoucí na žádném intervalu okolo nuly.

Následující věty ukazují, jak přesně souvisí derivace s hledáním extrémů:

Tvrzení. Diferencovatelná funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je na daném intervalu neklesající právě když má nezápornou derivaci.

Poznámka. Pokud je derivace dokonce kladná, tak je funkce rostoucí; opačná implikace však neplatí.

Důsledek. Pokud diferencovatelná funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě x_0 lokálního extrému, pak $f'(x_0) = 0$.

Proč je výše uvedené tvrzení tak super? V podstatě nám říká, že můžeme problém hledání extrémů převést na výrazně jednodušší problém řešení rovnice $f'(x) = 0$. Všimněte si ovšem, že zatím nic nevíme o existenci extrému, ani o tom, zda je podmínka $f'(x)$ postačující (není, vymyslete si protipříklad). Druhý ze zmíněných problémů se dá vyřešit tím, že se podíváme na znaménko derivace v okolí x, nebo můžeme použít následující kritérium, které už postačující je:

Tvrzení. Pokud f je v x dvakrát diferencovatelná a platí $f'(x) = 0$, $f''(x) < 0$, pak x_0 je lokální maximum.

Problém s existencí extrémů je však o něco komplikovanější. Je třeba dát pozor hned na několik věcí; řekněme, že hledáme maximum a minimum diferencovatelné funkce $f : M \to \mathbb{R}$, pak:

- pokud M není kompaktní, tak funkce vůbec nemusí extrémů nabývat: například $x^2 : (0, 1) \to (0, 1)$, $1/x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a $\arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ maxima nenabývají; proto je vždy nutné vyšetřit i limity f pro x jdoucí k hranici M resp. k nekonečnu .
- i pokud M kompaktní je, tak nám podmínka s derivací neříká nic o chování v krajních bodech: například $x^2 : [-1, 1] \to [0, 1]$ nabývá maxima na okraji svého definičního oboru; proto je vždy třeba zkontrolovat krajní body M.

Vzhledem k tomu, jak strašně rádi vás budou mít opravovatelé, pokud se rozhodnete něco uderivovat, tak je zapotřebí dát si pozor nejen na správnost všech algebraických úprav, ale i na dodržení těchto drobností.

To, co jsme si zde předvedli, je postačující k řešení optimizačních úloh, ve kterých máme jen jeden stupeň volnosti. Občas musíme udělat nějakou práci, abychom úlohu na tento tvar zredukovali, například zbavit se nějaké podmínky či udělat nějaké BÚNO prohlášení. Ani potom však vždycky nejlepší rovnou začít bezhlavě derivovat, často totiž existují nějaké užitečné úpravy, které nám můžou velmi ulehčit práci.

Úloha 4. Najděte maxima a minima následujících funkcí:

- $x + \frac{1}{x}$ na $\mathbb{R}^+$
- $\cos(x) + \sin(x)$ na $[-\pi, \pi]$
- $x - \sin(x)$ na $\mathbb{R}$
- $\ln(x) - x$ na $\mathbb{R}^+$
- x^x na $\mathbb{R}^+$
- $\pi^{\sin^4(x^2+1)+\cos^4(x^2+1)}$ na $\mathbb{R}$

Úloha 5. Najděte definiční obor a obor hodnot funkce $y(x) = \frac{x-3}{x^2-x-2}$.

Úloha 6 (Bernoulliho nerovnost). Pro $x > -1$ a $r \geq 1$ dokažte nerovnost $(1 + x)^r \geq 1 + rx$.

Úloha 7. Pro libovolné přirozené n a $x \geq 0$ dokažte nerovnost $e^x \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$. Pro která n platí nerovnost dokonce pro všechna $x \in \mathbb{R}$?

Úloha 8 (podmínka pro konvexitu). Ukažte, že pokud je f dvakrát diferencovatelná na (a, b) a má nezápornou druhou derivaci, pak je konvexní, neboli pro libovolná $x, y \in (a, b)$ a $t \in [0, 1]$ platí $tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$.

Vzhůru do vyšších dimenzí

Jak jste si jistě všimli, tak jsme se zatím nesetkali s moc příklady z olympiád. Jejich zadavatelé totiž (z jakéhosi zcela nepochopitelného důvodu) nemají moc rádi řešení pomocí derivací, takže se snaží, aby nebyly zadané úlohy snadno řešitelné pomocí klasických technik pro funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Abychom mohli podobn0 postupy aplikovat v olympiádě, je zapotřebí je zobecnit pro $\mathbb{R}^n$.

První věc, kterou k tomu potřebujeme udělat, je definovat, co vůbec v daném případě znamená derivace f. Můžeme například zjednodušit situaci na nějakou, se kterou bychom si už uměli poradit. Funguje například to, že na chvíli zapomeneme, že funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ závisí na více než jedné proměnné a všechny z nich kromě x_i budeme vnímat pouze jen jako zafixované parametry, neboli se soustředíme jen na to, jak se funkce chová na přímkách rovnoběžných s osou x_i. To přirozeně vede na následující definici:

Definice. *Parciální derivací* funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle x_i (značeno $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) myslíme obyčejnou derivaci podle proměnné x_i, přičemž všechny ostatní proměnné považujeme za konstanty.

Příklad. $\frac{\partial}{\partial z}(z + z^2x + y^3) = 1 + 2zx$, $\frac{\partial}{\partial y}(e^x) = 0$

Znalost všech parciálních derivací nám tedy dává představu o tom, jak se funkce chová při změnách ve směru jednotlivých os souřadné soustavy, což zdánlivě určuje její chování při pohybu libovolným směrem. Existuje však několik problémů: jak určit derivaci v nějakém jiném směru, než osy naší soustavy? A nerozbije se náhodou něco, pokud zvolíme jinou soustavu souřadnic? Oba však můžeme vyřešit, když se na parciální derivace budeme koukat tím správným způsobem:

Definice. *Gradientem* funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ myslíme vektor $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Tvrzení. Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v $\mathbf{x}$, pak platí $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + |\mathbf{h}|\alpha(\mathbf{h})$ pro funkci $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která se blíží nule pro $|\mathbf{h}| \to 0$.

Poznámka. Formálně se diferencovatelnost funkce f definuje právě přes existenci takového vektoru $\nabla f(\mathbf{x})$ a pak platí, že se gradient rovná výše uvedenému výrazu s parciálními derivacemi. Ani existence všech parciálních derivací však nezaručuje, že je funkce diferencovatelná, postačující podmínkou je však spojitost všech parciálních derivací.

Důsledek. Derivace funkce f v $\mathbf{x}$ ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{n}$, neboli $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{x} + t\mathbf{n}))$, je $\mathbf{n} \cdot \nabla f(\mathbf{x})$.

Důsledek. Gradientu ukazuje směrem, ve kterém funkce f roste nejrychleji.

Důsledek. Gradient je kolmý na množinu bodů $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = c\}$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Dříve, než se pustíme do hledání extrémů, si můžete v následujících cvičeních vyzkoušet derivování funkcí více proměnných:

Úloha 9. Najděte gradient následující funkcí:

- $f(x, y) = \sin(x)y + x\sin(y)$
- $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$
- $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^n$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a $n \in \mathbb{Z}$
- $f(x, t) = e^{-t}g(x)$ pro diferencovatelnou funkci g

Úloha 10. Dokažte, že pro diferencovatelné funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ platí následující identity:

- $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
- $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$
- $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t))) = \frac{d\mathbf{c}}{dt} \cdot \nabla f(\mathbf{c}(t))$ (zobecněné „řetízkové pravidlo“)

Derivování funkcí více proměnných se tedy sice koncepčně liší od klasické derivace, ale samotný výpočet vypadá skoro stejně. Obdobně je tomu i při hledání extrémů: funguje to skoro stejně, ale existuje řada technických detailů, které celou situaci můžou značně zkomplikovat. Potíže se skrývají především za tím, že věty, na něž spoléháme, mají komplikovanější předpoklady:

Tvrzení. Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $f : M \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, nabývající lokálního extrému v $\mathbf{x}_0$, pak platí $\nabla f = \mathbf{0}$.

Opět dodejme, že se jedná o nutnou, ale nikoliv postačující podmínku, pokud na přednášce zbyde čas, tak si ukážeme i postačující podmínku s druhými derivacemi.

Opět se nám tedy povedlo pomocí derivací zredukovat optimizační problém na jednodušší problém řešení rovnic (tentokrát se ovšem jedná o soustavu). Můžou se rozbít úplně stejné věci jako v $\mathbb{R}^n$, akorát jejich řešení může být o něco komplikovanější, takže pokud chceme optimalizovat f na nějaké množině M, pak je třeba dát pozor na případy, kdy:

- M není kompaktní: pak funkce vůbec nemusí nabývat maxima/minima, tudíž musíme vyšetřit její chování na hranici nebo v nekonečnu (pokud M není omezená); tentokrát se však nemusí jednat o izolované body, nýbrž o nějaké komplikovanější množiny!
- pokud M kompaktní je, tak nám podmínka s gradientem něco říká pouze o chování f uvnitř M, takže musíme zvlášť ošetřit případ, kdy jsou body na hranici

Pro rozumné množiny (neboli všechny, se kterými se setkáme), se často vyplatí podívat na uzávěr definičního oboru $\bar{M}$, abychom zaručili existenci extrému, a pak zvlášť vyšetřit chování na hranici. Hledáme-li například minimum $a^3 + 2b^3 - 3ab^2$

pro $a, b > 0$, tak je snadnější úlohu místo toho vyřešit pro $a, b \geq 0$ a pak říct, co se stane pro $a = 0$ a $b = 0$. Vyšetřit chování v nekonečnu je ve většině případů rovněž poměrně jednoduché, protože je dokazovaná nerovnost typicky buď homogenní, nebo zjevná pro velká čísla, například pro $a^2 + b^2 + c^2 > 10^{12}$.

Tvrzení o otevřených a uzavřených množinách, která jsme si předvedli na úplném začátku, poskytují dostatek informací k tomu, abychom o definičním oboru hodnot mohli říct, že se jedná o otevřenou či uzavřenou množinu. U běžných množin (například jednotková sféra či její povrch), nebo tam, kde je to zřejmé, ani není třeba nic dokazovat, ale i pro složitější množiny obvykle stačí pouze stručné zdůvodnění (samozřejmě jen pokud je správné :D).

Třešnička na dortu

Už jsme si ukázali, jak se pomocí analýznických technik dají řešit prakticky libovolné nerovnosti, může se ale stát, že k nerovnosti dostaneme i nějaké dodatečné informace, které je obvykle zapotřebí při důkazu využít.

Pokud narazíte na nerovnost s podmínkou, tak je v řadě případů nejjednodušší se jí ihned zbavit přímým vyjádřením nějaké proměnné, nebo nějakou trikovou substitucí, například $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ pro $abc = 1$.

Poměrně často se ovšem stává, že vyjádření jedné z proměnných vede k poměrně nehezkým výrazům a žádná šikovná substituce člověka zrovna nenapadá. Ale netřeba zoufat, i v takových případech můžeme úlohu vyřešit pomocí následujícího tvrzení:

Věta (Lagrangeovy multiplikátory). Mějme množinu $M \subset \mathbb{R}^n$, danou soustavou $m < n$ rovnic $g_1(\mathbf{x}) = \ldots = g_m(\mathbf{x}) = 0$ pro spojitě diferencovatelné funkce $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že spojitě diferencovatelná funkce $f : M \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $\mathbf{x}_0 \in M$ lokálního extrému. Potom nastává jedna ze dvou následujících možností:

- vektory $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$ jsou lineárně závislé
- existují reálná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takové, že $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0)$

Obvykle používáme Lagrangeovy multiplikátory pro množinu M danou jako $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) = 0\}$. Potom výše uvedená věta říká, že v každém lokálním extrému spojitě diferencovatelné funkce $f : M \to \mathbb{R}$ platí buď $\nabla g = 0$, nebo $\nabla f = \lambda \nabla g$ pro nějakou reálnou konstantu λ. Dostáváme tedy soustavu $n+1$ rovnic (porovnání jednotlivých složek gradientů a původní podmínku) v $n+1$ proměnných $x_1, \ldots, x_n, \lambda$. Můžeme na danou podmínku pohlížet tak, že v extrémech musí mít tzv. Lagrangián $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x})$ nulový gradient: parciální derivace podle x_i dají výše odvozenou lineární závislost, zatímco parciální derivace podle λ dá původní podmínku.

Pamatujte však, že použití Lagrangeových multiplikátorů má ta samá omezení, jako standardní analytické metody v $\mathbb{R}^n$: je zapotřebí dát si pozor na existenci extrémů a všemožné limity, přibývá nám navíc ještě jeden degenerovaný případ $\nabla g = \mathbf{0}$ (kritické body podmínky). I zde si můžeme zjednodušit život kompaktností: pokud chceme optimalizovat něco na množině $S = \{\mathbf{x} \in U | g(\mathbf{x}) = 0\}$, tak se můžeme místo toho podívat na uzavřenou množinu $\bar{S} = \{\mathbf{x} \in \bar{U} | g(\mathbf{x}) = 0\}$.

Nyní už nezbývá nic jiného, než si nově nabyté znalosti vyzkoušet na různých úlohách! Dříve, než se pustíte do řešení, tak si můžete ještě přečíst několik tipů:

- *dejte si pozor na detaily*: pokud se rozhodnete, že nějakou úlohu uderivujete, tak tím většinou neuděláte opravovatelům moc velkou radost, takže vám můžou chtít strhnout body i za snadno opravitelné drobnosti (například nějaké hraniční případy)
- *šetřete si práci*: dříve, než se vrhnete do derivování a roznásobování, tak si rozmyslete, jestli náhodou nejde udělat nějaká substituce, BÚNO prohlášení či odhad známou nerovností, které by situaci značně zjednodušili; totéž platí i při řešení výsledné rovnice resp. soustavy
- *kombinujte s jinými metodami*: pokud vám po provedení nějakých odhadů klasickými nerovnostmi (nebo třeba v indukčním kroku) zbyde nějaká jednoduše vypadající nerovnost, tak se nebojte řešení dokončit pomocí derivací; občas se naopak stane, že se vám sice nepodaří úlohu analýzou dořešit, ale přesto dostanete nějakou užitečnou informaci (například o případech rovnosti)

Úložky na rozcvičení

Úloha 11 (AG nerovnost). Pro kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ dokažte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

Úloha 12. Pro kladná reálná čísla, která splňují $ab+bc+ca=16$ a $a \geq 3$, najděte minimum výrazu $2a+b+c$. (kraj MO 2015)

Úloha 13. Pro $n \geq 2$ a $x_i \geq 0$ dokažte $\sum_{i=1}^n x_i^i + \binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^n ix_i$. (slovenské výběrko 2013)

Úloha 14. Pro reálná x, y, z, splňující $x+y+z=12$, $x^2+y^2+z^2=54$, dokažte $9 \leq xy, yz, zx \leq 25$. (celostátko 2011)

Úloha 15. Pro kladná reálná čísla platí $(a+c)(b^2+ac)=4a$. Najděte všechny trojice čísel, pro které je hodnota $b+c$ maximální. (celostátko 2016)

Úloha 16. Pro reálná čísla, která splňují $a \geq 1$, $a+b+c=0$, minimalizujte $a^4+b^4+c^4-3abc$. (slovenské výběrko 2012)

Úloha 17. Pro $x_i \geq 1$ dokažte $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n}{1+(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}$ (IMO shortlist 1998)

Úloha 18. Pro nezáporná čísla se součtem 1 najděte maximum výrazu $a^2b+b^2c+c^2a$. (Kanada 1999)

Úloha 19. Pro kladná a, b, c, která splňují $(a+b)(b+c)(c+a)=1$, dokažte $ab+bc+ca \leq \frac{3}{4}$ (TRiKS)

Úloha 20. Pro reálná čísla, splňující zároveň $a+b+c+d=6$ a $a^2+b^2+c^2+d^2=12$, dokažte: $36 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-a^4-b^4-c^4-d^4 \leq 48$. (IMO shortlist 2010)

Pořádné úlohy

Úloha 21 (Jensenova nerovnost). Pro funkci f s kladnou druhou derivací na (a, b), libovolná reálná čísla z daného intervalu $x_1, \ldots, x_n$ a nezáporná λ_i se součtem 1 dokažte nerovnost $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$.

Úloha 22. Pro kladná reálná čísla, která splňují $abcd = 4$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$ maximizujte hodnotu $ab + bc + cd + da$. (CPS 2012)

Úloha 23. Pro kladná a, b, c se součinem 1 dokažte $\sum_{cyc} \frac{1}{1+a+b} \leq 1$. (staré USAMO)

Úloha 24. Pro kladná a, b, c, která jsou různá od 1 a mají součin 1, dokažte nerovnost $\sum_{cyc} \frac{a^2}{(a-1)^2} \geq 1$. Ukažte, že v ní nastává rovnost pro nekonečně mnoho trojic racionálních čísel (a, b, c). (IMO 2008, 2)

Úloha 25. Pro kladná čísla, splňující $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, dokažte nerovnost $\sum_{cyc} \frac{1}{(2a+b+c)^2} \leq \frac{3}{16}$. (IMO shortlist 2009)

Úloha 26. Pro kladná a, b, c se součinem 1 dokažte $\sum_{cyc} \sqrt{9 + 16a^2} \geq 3+4(a+b+c)$. (MEMO 2012)

Úloha 27. Najděte maximální hodnotu výrazu $\left|\sum_{cyc} ab(a^2 - b^2)\right|$ pro reálná reálná čísla, splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. (IMO 2006, 3)

Co mi Wolfram nezchroustal

Úloha 28. Jsou-li $a_1, \ldots, a_{100}$ nezáporná reálná čísla, pro něž platí $a_1^2+\cdots+a_{100}^2 = 1$, pak dokažte $a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \cdots + a_{100}^2 a_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$. (IMO 2007 shortlist)

Úloha 29. Pro reálná čísla, splňující $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, najděte extrémní hodnoty výrazu $\sum_{i=1}^n x_i x_{i+1}$.

[1] Jakub „Xellos“ Šafin; *Derivácie, hľadánie extrémov*, Kunžak 2015

[2] Evan Chen; *Lagrange Murderpliers Done Correctly*, `http://web.evanchen.cc/handouts/LM/LM.pdf`

[3] AoPS

Hinty

Hint 1. Pomocí základních vzorečků si můžete odvodit i vzorce pro derivaci podílu funkcí nebo inverzní funkce.

Hint 2. Vyjde $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i}$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny P.

Hint 5. Funkce je definována na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ a $(2, \infty)$; porovnáním extrémů na nich dostaneme, že funkce nenabývá pouze hodnot z $(\frac{1}{9}, 1)$.

Hint 6. $(1+x)^r - rx$ je rostoucí na $(-1, 0)$ a klesající na $(1, \infty)$.

Hint 7. Indukce.

Hint 8. Vhodným posouváním lze BÚNO zvolit $y = 0$, $x = 1$; nerovnost $tf(1) \geq f(t)$ už je pro tebe snadnou kořistí.

Hint 11. Položte si BÚNO $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Hint 14. Ukázková úloha na multiplikátory se dvěma podmínkami.

Hint 15. Multiplikátory sice rychle odhalí případ rovnosti a hledané maximum, pokud trikově upravíte výslednou soustavu a dá se snadno říct $b, c < 2$, pak už jen zbývá limita pro a v nekonečnu.

Hint 16. Pro $a > 1$ stačí použít multiplikátory, bez vyřešení soustavy se dá říct, že minimum bude 0. Pro případ rovnosti dosaďte a použijte multiplikátory.

Hint 17. Zafixujte si součin, pak multiplikátory. Ale pak možná zjistíte, že se velmi špatně argumentuje kompaktnost. Alternativní řešení s trochou analýzy je použít Jensenovu nerovnost na $\frac{1}{1+e^x}$.

Hint 18. Multiplikátory; překvapivě rovnost nenastane v symetrickém případě.

Hint 19. Multiplikátory; nezapomeňte na limity v nekonečnu.

Hint 20. Jde to celkem v pohodě i přímo, ale substituce $x = a - 1$ etc. může značně ulehčit život.

Hint 21. Zafixujte si hodnoty λ_i a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, pak použijte multiplikátory.

Hint 22. Multiplikátory; zatněte zuby, vyjde totiž $\sqrt{82}$.

Hint 23. Vyplatí se odhadnout jmenovatele pomocí AG a přejít k novým proměnným $x = \sqrt{ab}$ etc., pak mutiplikátory.

Hint 24. Udělejte substituci $x = 1/a$ etc., multiplikátory dají podmínku rovnosti $x+y+z = 3$.

Hint 25. Můžete si zavést novou proměnnou s podmínkou $s = a + b + c$ a pak použít multiplikátory. Také funguje nerovnost zhomogenizovat, vymyslet si lepší podmínku a použít multiplikátory.

Hint 26. Pomocí multiplikátorů dokažte, že se nějaká dvě čísla rovnají. A pak se to dá dvakrát umocnit na druhou, zbývající polynom bude jen pátého stupně a s dvojnásobným kořenem v jedničce.

Hint 27. Někdo na AoPS to udělal přímo multiplikátorama. Pokud ale chcete řešení pod pět stránek, tak si všimněte, že se vyraz dá pěkně rozložit vytknutím $(a - b)$ etc., pak přejděte ke čtyřem novým proměnným s extra podmínkou.

Hint 28. Dořešit pomocí multiplikátorů se mi to nepovedlo, ale alespoň pomohly odhalit poněkud bizarní případ rovnosti. Pak stačí chytře použít Cauchy-Schwarze, aby se zachoval, a zbytek už jsou jen rutinní odhady.

Hint 29. Ta úloha je tady jen proto, abyste si nemohli stěžovat, jak moc jsou ty ostatní kencr. Ve srovnání s touhle totiž nejsou. Ale kdo to vyřeší, tak má u mě lízátko / Kofolu / whatever.

Kombinatorická geomerie

Kuba Löwit

Abstrakt. Úlohy z kombinatorické geometrie se objevují napříč olympiádní i vysokoškolskou matematikou. Mohou být hravé, zajímavé, těžké i poučné. Jejich krása a prokletí tkví v tom, že v geometrickém zadání často dostáváme víc informací, než potřebujeme (a než chceme). Na nás samotných pak zůstává břemeno určit, co je v úloze ve skutečnosti důležité, a toto prozření využít k jejímu zdárnému vyřešení.

„Mathematics is the art of forgetting.“

Tipy

Řešení úloh z kombinatorické geometrie je zábavné, ale může být i dost těžké. Celá úloha totiž mnohdy stojí pouze na povšimnutí si, co je v ní důležité.

V celé přednášce si vystačíme „jenom“ s kombinatorickou geometrií v rovině – zábavná je na to dost. A ve všemožných soutěžích se typicky vyskytují hlavně rovinné úlohy. Například nejtěžší úlohy na IMO bývají nezřídka právě kombinatorické geometrie.

Na olympiádní úlohy z kombinatorické geometrie neexistují žádné všespásné postupy. Proto i my budeme trénovat jejich řešení téměř bez jakékoli teorie. Přece jen se ale hodí zformulovat pár myšlenek, které mohou pomoct.

- *spojitost*
  V mnoha případech je intuitivní něčím začít spojitě hýbat – např. posouvat, otáčet či nafukovat. Pouze je potřeba dávat pozor, aby naše argumenty opravdu byly pravdivé a přehledné. Speciálně se může hodit takzvaná *diskrétní spojitost*: umíme-li s něčím hýbat, aby se celočíselný výsledek měnil vždy pouze o ± 1, a umíme-li dosáhnout nějakých hodnot m, n, umíme dosáhnout i libovolné hodnoty mezi nimi.
- *extremální princip*
  Občas je prostě potřeba odněkud začít – tak proč třeba nezačít od toho nejmenšího? Nebo největšího? Zprava? Zleva? Zeshora? Nebo odjinud? Přijít na dobrý začátek je občas většina řešení.
- *invarianty*
  Když má člověk dokázat, že něco nenastane, je šikovné najít inariant či monovariant, který to zakáže.
- *chytré počítání*
  Čas od času je nutné na obrázku něco spočítat. Pointou ale bývá spočítat to chytře. Různé triky připomínající počítání dvěma způsoby často ušetří dost práce.

- *konvexní obaly*
  Má-li člověk divnou množinu bodů v rovině, uvážení konvexního obalu může situaci výrazně zpřehlednit.
- *triangulace*
  Každý mnohoúhelník lze rozřezat na trojúhelníky. To někdy opět pomůže při práci s body uvnitř. (Pokud zrovna nemáš co dělat, důkladně si rozmysli, že i nekonvexní mnohoúhelníky skutečně nějakou triangulaci mají.)
- *obarvování*
  Udělat si v úloze pořádek šikovným obarvením je často všechno, co je potřeba.
- *Dirichletův princip*
  Používá se tak, jak by člověk čekal – jakmile mámě několik bodů v uzavřené oblasti, z Dirichletova principu jsou některé z nich blízko.
- *algoritmizace*
  Nejjednoduší způsob, jak sepsat řešení, někdy může být nalezení jednoduchého algoritmu, který úlohu řeší.
- *pravděpodobnost*
  Konečná pravděpodobnost je jen kombinatorika v plesových šatech. Triková práce s pravděpodobností může zpřehledit nejedn úvahu.
- *indukce*
  Ta se hodí vždycky. Občas ji ale můžeme provádět i podle netradičních paramatrů. Zároveň se někdy hodí induktivně dokazovat silnější tvrzení, než jaké nás zajímá.

  … a cokoli dalšího.

Folklor

Pro začátek si dáme pár provařených úložek, které mají celkem pěkná řešení. Pokud ale řešení některé z nic neznáte, vymyslet ho může chvíli trvat…

Úloha 1. Rozdělte čtverec na 13 shodných částí.

Úloha 2. Na opačných stranách úsečky délky d jsou mraveniště s m a n mravenci. Ti vybíhají proti sobě ve vteřinových intervalech. Když se dva mravenci srazí, oba se otočí a běží zpět. Když některý přeběhne kraj úsečky, spadne na zem. Za jak dlouho všichni mravenci popadají?

Úloha 3. Z tabulky $2^n \times 2^n$ někdo ukradl jedno políčko. Dokažte, že zbytek tabulky umíme pokrýt pomocí rohových triomin ze třech čtverečků.

Úloha 4. V rovině je několik bodů, které neleží na jedné přímce. Ukažte, že existuje kružnice procházející alespoň třemi z nich, která ve svém vnitřku neobahuje žádný další.

Úloha 5. Uvnitř $2n$ úhelníka sedí liška. Ze všech vrcholů po ní najednou vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokažte, že některá strana byla zasažena dvakrát.

Úloha 6. Na kružnici jsme náhodně vyznačili n bodů. Jaká je šance, že všechny leží na jedné půlkružnici?

Úloha 7. Po kruhovém rybníčku plave kachnička. Na obvodu číhá liška, která je čtyřikrát rychlejší, ale bojí se do vody. Kachnička umí vzlétnout a uletět jen ze souše. Podaří se jí mlsné lišce uniknout?

Úloha 8. Je možné rozdělit čtverec na několik ostroúhlých trojúhelníků?

Úloha 9. Rozřezali jsme obdélník na menší obdélníky a shledáváme, že každý má alespoň jednu stranu celočíselnou. Dokažte, že i původní obdélník měl alespoň jednu stranu celočíselnou.

Úloha 10. Je dána konvexní množina M v rovině, jejíž kolmý průmět na libovolnou přímku je úsečka délky 1. Musí být M jednotkový kruh?

Úloha 11. Kruhovou studnu s průměrem 1 metr chceme zakrýt dřevěnými prkny širokými 10 centimetrů. Kolik jich je nejméně potřeba?

Přímočařejší úložky

Úloha 12. Na kluzišti trénuje hokejista. Má tři puky, které leží ve vrcholech nedegenerovaného trojúhelníku. Pokaždé si jeden vybere a odpálí ho tak, aby proletěl mezi zbylými dvěma. Může je 2019-tým odpalem vrátit do původní polohy?

Úloha 13. Čtvercový dort s rozměry 6×6 je pokrytý kousky čokolády 2×1. Dokažte, že ho vždy můžeme rozkrojit, aniž bychom krájeli kousek čokolády.

Úloha 14. Body roviny jsou obarveny dvěma barvami. Najděte rovnostranný trojúhelník se stejně barevnými vrcholy.

Úloha 15. V rovině leží několik mnohoúhelníků tak, že se každé dva protínají. Najděte přímku, která je protíná všechny.

Úloha 16. Martin k narozeninám dostal kruhový dort a hned se rozhodl polovinu z něj darovat Zuzce. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků – $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že Martin i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (MKS 33-5-5)

Úloha 17. V rovině je konečná množina bodů S taková, že každý trojúhelník s vrcholy v S má obsah nejvýše 1. Dokažte, že celá S se dá schovat do trojúhelníku o obsahu 4. (Putnam 2016)

Úloha 18. Uvnitř konvexního mnohoúhelníku M je dán bod O. Dokažte, že kolmá projekce bodu O na některou stranu M leží uvnitř této strany.

Úloha 19. Dostali jste hromadu čtverečků s celkovým obsahem 1. Naskládejte je do čtverce s obsahem 2 tak, aby se nepřekrývaly.

Úloha 20. V rovině je dán bod A a několik mnohoúhelníků, přičemž každé dva z nich se protínají. Dokažte, že existuje kružnice se středem v A, která je protíná všechny.

Úloha 21. V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů v obecné poloze. Uvažujme vnitřní úhly trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech, velikost toho nejmenšího označme ϕ. Pro dané n najděte největší možné ϕ. (MO 64-A-II)

Úloha 22. Máme dvě kružnice s obvodem 1000. Na jedné je vyznačeno 1000 bodů, na druhé několik oblouků s celkovým součtem délek nejvýše 1. Dokažte, že na sebe umíme kružnice položit tak, aby všechny vyznačené body ležely mimo vnitřky vyznačených oblouků.

Úloha 23. Pejsek rozkousal pravidelných $4n$-úhelník na konečně mnoho rovnoběžníků. Dokažte, že některý z nich je ve skutečnosti obdélník. (Brkos XXI-6-4)

Zajímavější úložky

Úloha 24. V rovině leží body O, A_1, A_2, …, A_{2018} tak, že žádné tři z nich neleží na společné přímce. Ukažte, že počet trojúhelníků $A_iA_jA_k$, které obsahují bod O, je sudý.

Úloha 25. Konečně mnoho bodů roviny je obarveno žlutě. Každé tři žluté body lze navíc zakrýt páskem šířky 1. Dokažte, že lze všechny žluté body zakrýt páskem šířky 2.

Úloha 26. V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů. Zabodněte do roviny $2n - 5$ špendlíků tak, aby propíchly vniřek každého trojúhelníku s vrcholy v daných bodech.

Úloha 27. V obdélníku R je dáno n růžových bodů tak, že spojnice žádných dvou z nich není rovnoběžná s žádnou stranou R. Rádi bychom rozřezali R na obdélníčky se stranami rovnoběžnými se stranami R tak, aby žádný z nich neobsahoval růžový bod ve svém nitřku. Kolik nejméně jich musí být? (IMO Shortlist 2014)

Úloha 28. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazveme *kolumbijským*, jestliže je 2013 z nich červených, 2014 modrých a žádné tři neleží v přímce. Skupina přímek pro takové rozmístění je *dobrá*, pokud neprochází žádným bodem rozmístění a žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev. Najděte nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění existuje skupina k dobrých přímek. (IMO 2013-2)

Úloha 29. Ať S je konečná množina bodů v rovině v obecné poloze. Pro každý konvexní mnohoúhelník P s vrcholy v S označme $a(P)$ počet jeho vrcholů a $b(P)$ počet bodů z S ležících mimo P. Úsečky, body i prázdnou množinu považujeme za konvexní mnohoúhelníky. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dokažte

$$\sum_{P} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1,$$

kde sčítáme přes všechny konvexní mnohoúhelníky P s vrcholy v S.

(IMO Shortlist 2006)

Úloha 30. Nechť n je přirozené číslo. V rovině se pase n bodových kraviček a n bodových oveček. Žádná tři zvířátka neleží na jedné přímce. Balanční přímkou nazveme přímku procházející jednou ovečkou a jednou kravičkou tak, že na každé straně od přímky je stejně oveček jako kraviček. Ukažte, že existují alespoň dvě balanční přímky. (USAMO 2005)

Úloha 31. Obdélník R s lichými celočíselnými délkami stran je rozřezán na menší obdélníky s celočíselnými délkami stran. Dokažte,že existuje malý obdélník, jehož vzdálenosti od všech čtyř stran toho velkého mají stejnou paritu.

(IMO Shortlist 2017)

Úloha 32. V zátoce je 18 majáků, každý dokáže osvítit úhel $20°$. Dokažte, že je lze natočit tak, aby osvítily celou zátoku.

Úloha 33. V rovině je 2017 přímek tak, že žádé tři z nich neprochází jedním bodem. Šnek Turbo sedí v nějakém bodě na právě jedné z nich a začne se po nich plazit následujícím způsobem: pohybuje se daným směrem po jedné přímce dokud nenarazí na první průsečík; v něm zahne po druhé přímce doprava či doleva, přičemž výběr toho směru střídá střídá. Může se stát, že Turbo projede nějakou úsečku postupně v obou směrech? (EGMO 2017-3)

Úloha 34. V rovině leží $n \geq 2$ úseček tak, že se každé dvě protínají a žádné tři neprochází stejným bodem. Pepa si vybere jeden konec každé úsečky a posadí do něj žábu čelem ke druhému konci. Pak $n-1$ krát tleskne. Při každém tlesknutí žáby skočí do následujících průsečíků na svých úsečkách. Pepa by chtěl žáby rozmístit tak, aby žádné dvě z nich nikdy neseděly na stejném místě.

(i) Dokažte, že pro liché n se to Pepovi vždy podaří.
(ii) Dokažte, že pro sudé n Pepa nemá šanci.

(IMO 2016-6)

Další zajímavé úložky

Následuje hromada dalších úloh, ke kterým se na přednášce nemáme šanci stihnout. Přesto stojí za řešení a vyskytují se v nich celkem trikové triky. Některé úlohy na konci příspěvku už mohou být dcela těžké – i malé hinty ale často dost pomohou. Přestože jsem se i úlohy v této části snažil seřadit podle obtížnosti, vůbec to nemusí být vypvídající.

Úloha 35. Konečná množina M bodů v rovině se nazývá *vyvážená*, pokud pro libovolné dva různé A, $B \in M$ existuje $P \in M$ splňující $|AP| = |BP|$. Říkáme, že M je *středuprostá*, pokud pro žádné tři různé body A, B, $C \in M$ neexistuje $P \in M$ splňující $|AP| = |BP| = |CP|$.

(i) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vyvážená M velikosti n.
(ii) Určete všechna $n \in \mathbb{N}$, pro něž existuje vyvážená středuprostá M velikosti n.

(IMO 2015-1)

Úloha 36. Je dán konvexní mnohoúhelník $A_1A_2\ldots A_n$, ve kterém žádné dvě strany nejsou navzájem rovnoběžné. Označme $A_{n+1} = A_1$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ označme A_{k_i} vrchol nejvzdálenější od přímky A_iA_{i+1}. Velikost úhlu $A_iA_{k_i}A_{i+1}$ označme α_i. Ukažte, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$.

Úloha 37. Ukažte, že každý mnohoúhelník o obsahu alespoň n lze nakreslit do roviny, aby pokrýval alespoň $n+1$ mřížových bodů.

Úloha 38. Na bílý kruh jsou náhodně kápnuty čtyři černé tečky. S jakou pravděpodobností lze kruh rozdělit na čtvrtkruhy tak, aby v každém byla právě jedna?

Úloha 39. Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem a rozdělují jej na konečně mnoho obdélníkových čtvrtí. *Centrem* nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Předpokládejme, že existuje alespoň jedna hlavní ulice. Dokažte, že město má centrum. (ISL 2007)

Úloha 40. Do terče o poloměru 12 centimetrů jsme vystřeli 19 nábojů. Dokažte, že některé dva z nich jsou od sebe vzdáleny nanejvýš 7 centimetrů. (MO-59-A-III)

Úloha 41. Romeo a Julie jeli na výlet do rumunských hor. Stojí na opačných stranách pohoří ve stejné nadmořské výšce a chtějí se pohybovat tak, že stále budou mít stejnou nadmořskou výšku. Cesta mezi nimi tvoří graf lineární lomené funkce. Každý bod cesty je alespoň tak vysoko jako počáteční nadmořská výška Romea a Julie. Dokažte, že se mohou setkat. (MKS 24-1-7)

Úloha 42. Nechť S je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. Větrným mlýnem rozumíme následující proces. Na počátku je vybrána nějaká přímka l procházející právě jedním bodem $P \in S$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se středem otáčení P, dokud nenarazí na další bod množiny S, označme jej Q. Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q, dokud nenarazí na další bod množiny S, a tak dále. Dokažte, že lze zvolit bod $P \in S$ a přímku l procházející bodem P tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít každý bod z S za střed otáčení nekonečněkrát.

(IMO 2011-2)

Úloha 43. David si na kružnici nakreslil $4n$ různých bodů a pak je po směru hodinových ručiček střídavě obarvil modře a červeně. Červené body nějakým způsobem rozdělil do n dvojic a body v každé dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně n modrými úsečkami pospojoval modré body. Všiml si, že žádné tři barevné úsečky neprocházejí jedním bodem a že každý průsečík modré a červené úsečky je fialový. Dokažte, že na obrázku našel alespoň n fialových bodů. (MKS 34-1-7)

Úloha 44. V temném lese rostou tenké stromy, jejichž výška nepřekračuje 1007 metrů. Žádné dva stromy od sebe nejsou dál, než kolik činí rozdíl jejich výšek. Dokažte, že je možné celý les obehnat zdí dlouhou 2015 metrů. (MKS 26-1-7)

Úloha 45. V rovině je dáno několik bodů, přičemž všechny neleží na jedné přímce. Ukažte, že existuje přímka, na které leží právě dva z nich.

Úloha 46. V rovině je trojúhelník RGB. Rozdělíme jej na menší trojúhelníčky, aby žádný z nich neměl vrchol uvnitř strany jiného. Vrcholy obarvěme červeně, zeleně a modře, přičemž vrcholy původního velkého trojúhelníka dostanou různé barvy. Vrcholy na stranách velkého trojúhelníka navíc musí dostat barvu jedoho z krajních vrcholů dané strany. Dokažte, že některý z malých trojúhelníčků má vrcholy tří různých barev. (Spernerovo lemma)

Úloha 47. Půdorys galerie má tvar (ne nutně konvexního) n úhelníka. Kolik strážníků je v zvislosti na n potřeba, aby společně viděli celou galerii? (Art Gallery Problem)

Úloha 48. Na kruhovém ostrově je v písku nakreslen n-úhelník se stejně dlouhými stranami. Ve středu každé strany čekají zády k sobě dva ptakopysci. Najednou se všichni rozběhnou po stranách, na kterých stojí, a po přímce pokračují až k pobřeží. Ukažte, že můžeme ptakopysky rozdělit do dvou skupin tak, že součet uběhnutých vzdáleností v obou skupinách bude stejný. (MKS 36-1j-7)

Úloha 49.

(i) Na kolik nejvýše části může n přímek rozdělit rovinu?
(ii) Ukažte, že v tomto případě je mezi nimi pro $n \geq 4$ alespoň $\frac{2n-2}{3}$ trojúhelníků.

Úloha 50. V jednotkovém kruhu leží 60 bodů. Ukažte, že existuje bod na jeho hranici, jehož součet vzdáleností od červených bodů nepřevyšuje 80. (ČPS 2009/2010)

Úloha 51. Konečný soubor čtverečků má celkový obsah 4. Dokažte, že jimi umíme pokrýt jednotkový čtverec.

Úloha 52. V rovině leží 100 bodů tak, že žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Ukažte, že mezi všemi trojúhelníky, které tyto body tvoří, je nejvýše 70% procent ostroúhlých. (IMO 1970-6)

Úloha 53. Dokažte existenci konstanty $0 < c < 1$ splňující: každý mnohoúhelník P s obsahem 1 lze posunout o $\frac{1}{100}$ nějakým směrem tak, aby výsledný mnohoúhelník Q pronikal P v ploše s obsahem nejvýše c. (USA TSTST 2018/2019)

Úloha 54. V rovině je dáno $2n+1$ bodů v obecné poloze. Kružnice k procházející třemi z nich se nazývá modrá, pokud uvnitř k leží stejně zbylých bodů jako vně k. Dokažte že počet modrých kružnic má stejnou paritu jako n.

Úloha 55. V rovině je n přímek, přičemž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Tyto přímky rozdělují rovinu na oblasti. Dokažte že pro n dostatečně velké lze obarvit alespoň $\sqrt{n}$ přímek namodro tak, aby žádná z konečných oblastí neměla celou hranici modrou. (IMO 2014-6)

Úloha 56. Je možné přiřadit nenulová reálná čísla bodům roviny tak, aby součet hodnot ve vrcholech každého pravidelného 2015-úhelníku byl nulový? (iKS 5-C3)

Úloha 57. Ukažte, že existuje konvexní 1990-úhelník, který má všechny všechny úhly stejné, a délky jeho stran jsou v nějakém pořadí rovny $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1990^2$. (IMO 1990-6)

Úloha 58. Nechť S je čtverec se stranami délky 100 a L je lomená čára uvnitř S, která se neprotíná (ani nedotýká). Předpokládejme, že pro každý bod P na hranici S je možné nalézt bod na L, který není od P dál než $\frac{1}{2}$. Dokažte, že je možné na L najít dva body X, Y takové, že $|XY| \leq 1$, ale délka L mezi X a Y je alespoň 198. (IMO 1982-6)

Úloha 59. Čtverec je rozřezán na trojúhelníky tak, že žádné tři vrcholy těchto trojúhelníků neleží na přímce. Pro každý vrchol včetně původních vrcholů čtverce si zapamatujeme počet z něj vycházejících úseček. Mohou být všechna tato čísla sudá? (iKS 5-C1)

Úloha 60. V rovině postává 24 robotů. Každý z nich má zorný úhel o velikosti 70° stupňů. Kolik nejvýše mezi nimi může být uspořádaných dvojic různých robotů (R_1, R_2) takových, že robot R_1 vidí robota R_2?

Úloha 61. Najděte všechny reálná čísla $k \geq 1$, pre které se obdélník $1 \times k$ nedá rozdělit na dva podobné neshodné mnohoúhelníky. (iKS 5-C4)

Úloha 62. Několik identických papírových čtverečků n různých barev leží na obdélníkovém stole, strany čtverečků jsou rovnoběžné se stranami stolu. Mezi každou n-ticí různobarevných čtverečků lze najít dva, které se překrývají. Dokažte, že všechny čtverečky některé barvy umíme přišpendlit ke stolu pomocí $2n-2$ špendlíků. (ARO 2003)

Úloha 63. V rovině je daných konečne mnoho pásů se součtem šířek X a kruh s poloměrem 1. Dokažte, že pro $X = 7$ pásy umíme posunout tak, aby pokryly celý kruh. Jak moc umíte tuto konstantu vylepšit? (iKS 4-C3)

Úloha 64. Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven dvojnásobku obsahu mnohoúhelníku P. (IMO 2006-6)

Závěrem

No, úloh je tu snad je na zabavení dost. Samozřejmě se ale člověk může zkusit zabývat sofistikovanějšími technikami. Existuje celá řada vět o vlastnostech konvexních množin v $\mathbb{R}^d$ jako například *Hellyho věta*. Pomocí nich se pak dají řešit i některé úlohy s olympiádním nádechem – víc se dá dozvědět třeba v příspěvku Davida Hrušky. Jiný zajímavý směr tvoří výsledky okolo *Pickovy formule* a *Minkowského věty*, které se zabývají vlastnostmi mřížových bodů.

A samozřejmě je tu toho mnohem víc – k problémům kombinatorické geometrie se obloukem vrací mnoho hlubokých výsledků analýzy, algebry i topologie. Ale teď už je čas popřát si dobrou noc, zavřít oči a spát.

Literatura a zdroje

[1] David Hruška; *Kombinatorická geometrie*, Sborník *i*KS, 2015
[2] Mirek Olšák; *Kombinatorická geometrie*, 2011 Blansko-Obůrka
[3] Mirek Olšák; *Kdopak by se IMO šestky bál?*, 2014 Uhelná Příbram
[4] Pepa Tkadlec; *Provárky*
[5] *http://www.artofproblemsolving.com*
[6] Radovan Švarc; *Dvě neobvyklé existenční techniky* 2016 Hojsova Stráž
[7] Djukic, Jankovic, Matic, Petrovic; *The IMO Compendium*
[8] Libor Barto; *Kombinatorická geometrie*, 2000

Hinty

Hint 1. Projeďte ho skartovačkou.
Hint 2. Co kdyby skrz sebe uměli proběhnout?
Hint 3. Indukce.
Hint 4. Konvexní obal a nafukování.
Hint 5. Liška sedí uvnitř nějakého trojúhelníka nějaké triangulace.
Hint 6. Nejdřív vždy náhodně vyberte průměr a pak až jeden z jeho krajních bodů.
Hint 7. Na vnitřním rybníčku se čtvrtinovým poloměrem je kachnička rychlejší.
Hint 8. Ano.
Hint 9. Položte obdélník na šachovnici se čtverečky o straně $\frac{1}{2}$.
Hint 10. Ne. Připevněte k rovnostrannému trojúhelníku tři úzké oblouky.
Hint 11. Zacpěte studnu sférou.
Hint 12. Orientace trojúhelníka.
Hint 13. Každý řez krájí sudý počet čokolád.
Hint 14. Trojúhelníková síť.
Hint 15. Promítněte na přímku.
Hint 16. Diskrétní spojitost.
Hint 17. Začněte s trojúhelníkem s vrcholy v S s maximálním obsahem.
Hint 18. Nejbližší strana.
Hint 19.
Hint 20. Nafukujte.
Hint 21. Vezměte bod na konvexním obalu s velkým úhlem.
Hint 22. Na druhé kružnici si vyberme bod O. Které polohy bodu O na první kružnici zakazují vyznačené body?
Hint 23. Cesty z rovnoběžníků spojují protilehlé strany.
Hint 24. Co se stane s paritou, když O překročí úsečku?
Hint 25. Nejvzdálenější dvojice bodů.
Hint 26. Dvakrát vhodně posuňte původní body a nakonec ještě něco ušetřete.
Hint 27. Každému růžovému bodu přiřaďte rohy křižovatek tvaru T, které vidí.
Hint 28. Dva body jde oddělit od zbytku dvěma přímkami. Zkuste naopak střídavě rozmístit všechny body na kružnici.
Hint 29. Pro $0 \leq x \leq 1$ interpretujte levou stranu jako pravděpodobnost nějakého jistého jevu.
Hint 30. Búno jsou na konvexním obalu jenom ovečky. Diskrétní spojitost.
Hint 31. Šachovnicové obarvení.
Hint 32.
Hint 33. Dvojobarvení oblastí, barva odpovídá směru obcházení.
Hint 34. Seřaďte si úsečky podle jejich směrů.
Hint 35. Konstrukce: n-úhelník; šikovné body na kružnici se středem. Spočtěte, že druhá konstrukce pro sudá n nejde.
Hint 36. Otáčejte přímkou kolem jednotlivých A_{k_i}.
Hint 37. Nakrájejte mnohoúhelník mřížkou a vzniklé dílky naskládejte na sebe.
Hint 38. Při kapání nejdřív zvolte pravoúhlý kříž, potom bod obvodu.

Hint 39. Vjeďte do města a zatáčejte tak, abyste z něj nevyjeli.
Hint 40. 18 částí a Dirichletův princip.
Hint 41. Vytvořte graf, jehož vrcholy jsou ty body pohoří, jejichž nadmořská výška je stejná jako nějaký vrchol, údolí, či kraj. Jaké jsou stupně jeho vrcholů?
Hint 42. Vezměte přímku l, která téměr půlí ostatní body.
Hint 43. Vyrazte na procházku po modrých úsečkách; na modrých křižovatkách zahněte doprava, ve fialovém bodu se zastavte.
Hint 44. Pospojujte stromy sestupně podle velikosti.
Hint 45. Vezměte přímku, jejíž vzdálenost od jiného vyznačeného bodu je minimální.
Hint 46. Zamyslete se nad stupni vrcholů rovinného grafu, jehož vrcholy jsou oblasti a hrany odpovídají jejich sousedství.
Hint 47. Triangulujte. Vrcholy obarvěte třemi barvami tak, aby trojúhelníky byly trojbarevné.
Hint 48. Mocnost z vrcholů.
Hint 49. Pro první část indukce. Pro druhou část se u každé přímky podívejte na nejbližší průsečíky.
Hint 50. Vezměte libovolný rovnostranný trojúhelník vepsaný do kruhu a ukažte, že jeden z jeho vrcholů vyhovuje.
Hint 51. Čtverce zmenšete tak, aby měly strany délek $\frac{1}{2^n}$ a celkový obsah alespoň 1.
Hint 52. Co kdyby byly jen 4? A co 5?
Hint 53. Stačí dokázat, že střední hodnota obsahu průniku je malá.
Hint 54. Dokažte, že počet kružnic procházejících dvěma pevnými body je lichý.
Hint 55. Hladově obarvujte modře. (Taky funguje pravděpodobnostní metoda, která dává lepší odhad.)
Hint 56. Vyberte si 2015-úhelník a rotujte ho okolo jednoho jeho vrcholu.
Hint 57. Protějším směrům dejte následující čísla, což převede problém na hledání nějakého $5 \cdot 199$-úhelníku. Směry rozdělte pětiúhelníky a jim dejte čísla opět postupně podle velikosti.
Hint 58. Postupně kreslete L. Po uspokojení první stěny čtverce budou k ní přilehlé stěny neuspokojené.
Hint 59. Ne. Obarvěte stěny dvěma barvami, spor poplyne spočtením hran.
Hint 60. Optimální jsou roboti ve vrcholech zanořených rovnostranných trojúhelníků.
Hint 61. Zkuste jej rozdělit lomenou čárou pro daný koeficient podobnosti. Pro která k to zafunguje?
Hint 62. Indukce, vezměte obdélník nejvíce vlevo.
Hint 63. Setřiďte pásky podle směru, objeďte obvod kružnice.
Hint 64. Nejdřív převeďte na: V $2n$ úhelníku o obsahu S se dá najít takový trojúhelník s obsahem alespoň $\frac{S}{n}$. To pak dokažte dokreslením hlavních diagonál a uvažováním pokrytí „motýly“ tvořenými vedlejšími diagonálami.

Komplexní geometrie

Martin Raška

Abstrakt. Příspěvek popisuje základní principy použití komplexních čísel pro řešení geometrických úloh.

„Geometrie je algebra s obrázkem.“

Vlastnosti komplexních čísel

Úmluva. Množinu reálných čísel budeme značit $\mathbb{R}$ a komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Definice. Nechť je $z = a + bi$ libovolné komplexní číslo. Komplexně sdruženým číslem k číslu z rozumíme číslo $\overline{z} = a - bi$ a jeho absolutní hodnotou reálné číslo $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tvrzení. Pro operaci komplexního sdružení platí několik pěkný pravidel, které značně usnadňují početní operace. Jmenovitě $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$ a $\overline{\frac{a}{b}} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$.

Definice. Definujeme *reálnou část* čísla $z = a + bi$ jako $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} = a$ a *imaginární část* čísla z jako $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2} = bi$. Pokud platí $\mathrm{Re}(z) = 0$, nazýváme číslo z ryze imaginární. Množinu ryze imaginárních čísel budeme značit $i\mathbb{R}$.

Poznámka. Důležité pozorování je, že komplexní číslo z je reálné právě tehdy, když $z = \overline{z}$. Obdobně $z \in i\mathbb{R} \iff z + \overline{z} = 0$.

Tvrzení (Goniometrický tvar komplexního čísla). Pro každé komplexní číslo $z \neq 0$ existuje jednoznačně určené číslo $\varphi \in [0, 2\pi)$ takové, že $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Úhel φ nazýváme *argumentem* čísla z a značíme $\mathrm{Arg}(z) = \varphi$.

Tvrzení (Násobení komplexních čísel). Platí

$$|x|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot |y|(\cos\beta + i\sin\beta) = |xy|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Důsledek. Platí rovněž $(|x|(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = |x|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ a

$$\frac{|x|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{|y|(\cos\beta + i\sin\beta)} = \left|\frac{x}{y}\right|(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)).$$

Geometrická tvrzení

Každému bodu v rovině můžeme jednoznačně přiřadit komplexní číslo – x-ová souřadnice reprezentuje reálnou část, y-ová tu imaginární. Body budeme značit velkými písmeny (například Z), jim příslušné komplexní číslo příslušnými malými písmeny (například z). Z již zavedených pojmů lze absolutní hodnotu chápat jako vzdálenost čísla od počátku (absolutní hodnotu rozdílu dvou čísel jako jejich vzdálenost) a argument komplexního čísla jako orientovaný úhel, který svírá přímka procházející jím a počátkem s osou x.

Tvrzení (O úhlu). Buď A, B, X takové body, že $A \neq X$ a $B \neq X$. Pak polopřímky XA, XB svírají orientovaný úhel

$$\angle BXA = \operatorname{Arg}\left(\frac{a-x}{b-x}\right).$$

Tvrzení (O kolmosti). Buď A, B, C, D body, že $A \neq B$ a $C \neq D$. Pak jsou přímky AB a CD kolmé právě tehdy, když $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$, neboli

$$\frac{d-c}{b-a} + \overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} = 0.$$

Tvrzení (O kolinearitě). Buď A, B, C po dvou různé body. Pak A, B, C leží na jedné přímce právě tehdy, když $\frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$, neboli

$$\frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.$$

Poznámka. Stejně tak jsou přímky AB a CD rovnoběžné právě když $\frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Tvrzení. Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení (O podobnosti). Dva trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou přímo podobné právě tehdy, když

$$\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1} = \frac{b-a}{c-a}.$$

Poznámka. Pro nepřímou podobnost platí analogický vzorec $\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}$.

Tvrzení. Buď AB a CD různoběžné přímky. Pak se AB a CD protínají v bodě

$$\frac{(\overline{a}b-a\overline{b})(c-d)-(a-b)(\overline{c}d-c\overline{d})}{(\overline{a}-\overline{b})(c-d)-(a-b)(\overline{c}-\overline{d})}.$$

Jednotková kružnice

Spousta vzorců a tvrzení, která mohou být při počítání zdlouhavá a komplikovaná, se velmi zjednoduší, pokud body, se kterými počítáme, leží na jednotkové kružnici. Proto je často klíčem k úspěchu zvolit si hlavní kružnici v obrázku jako jednotkovou. Speciálně pokud máme trojúhelník, tak se jako jednotková volí nejčastěji jeho kružnice opsaná.

Definice. Jednotkovou kružnicí v komplexní rovině nazveme kružnici se středem v počátku a poloměrem 1, neboli množinu bodů z s vlastností $|z| = 1$.

Tvrzení. Pokud bod z leží na jednotkové kružnici, potom $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

Tvrzení. Nechť A, B, C, D leží na jednotkové kružnici a $AB \nparallel CD$. Pak se přímky AB a CD protínají v bodě

$$\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}.$$

Tvrzení. Nechť je ABC trojúhelník a označme T jeho těžiště a H jeho průsečík výšek. Poté $t = \frac{a+b+c}{3}$ a leží-li navíc trojúhelník ABC na jednotkové kružnici, poté $h = a + b + c$.

Poznámka. Tvrzení o průsečíku výšek platí obecněji v případě, že $|a| = |b| = |c|$.

Tvrzení. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané, Λ jeho kružnici opsanou a D, E, F středy těch oblouků BC, AC, AB neobsahující příslušný třetí vrchol trojúhelníka. Pokud je Λ jednotkovou kružnicí, pak existují x, y, $z \in \mathbb{C}$ takové, že

$$a = x^2, b = y^2, c = z^2, \qquad d = -yz, e = -zx, f = -xy.$$

Bod I je pak reprezentován číslem $-(xy + yz + xz)$ a střed A-kružnice připsané jako $xy - yz + xz$ (a ostatní pomocí cyklických permutací).

Poznámka. Jistě $|x| = |y| = |z| = 1$. Je potřeba dát pozor na to, že tvrzení je pouze existenční. Nejednoznačnost odmocniny komplexního čísla způsobuje značné problémy a bez dalších informací nelze rozhodnout, které z odmocnin mají být hledaná čísla.

Komplexnější tvrzení

Tvrzení (Obsah trojúhelníka). Mějme libovolné body A, B a C. Trojúhelník ABC má orientovaný obsah roven

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

Tvrzení. Nechť je vepsaná kružnice trojúhelníku ABC jednotková a označme P, Q, R její body dotyku se stranami trojúhelníka, H ortocentrum a O střed kružnice opsané. Poté platí

$$h = \frac{2(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)},$$

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

Tvrzení. Uvažujme trojúhelník, ve kterém je jeden z vrcholů reprezentován 0 a zbylé dva čísly x a y. Označme H ortocentrum a O střed kružnice opsané. Platí

$$h = \frac{(\overline{x}y + x\overline{y})(x - y)}{x\overline{y} - \overline{x}y}, \qquad o = \frac{xy(\overline{x} - \overline{y})}{\overline{x}y - x\overline{y}}.$$

Příklady k seznámení

Úloha 1. Nechť je obdélník AGHD, kde $|AD| : |AG| = 1 : 3$, rozdělen na tři shodné čtverce $ABCD$, $BEFC$ a $EGHF$. Spočtěte $|\angle GAH| + |\angle GAF| + |\angle GAC|$.

Úloha 2 (Eulerova přímka). V trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané, H průsečík výšek a T těžiště. Dokažte, že tyto tři body leží na přímce. V jakém poměru dělí bod T úsečku OH? Jakým komplexním číslem je reprezentován střed Feuerbachovy kružnice? Čemu je obecně roven součet $h + 2o$?

Úloha 3 (Zobrazení). Jsou dány body A, B a C, určete komplexní čísla reprezentující následující body:

1) posunutí bodu A o vektor $(B - C)$
2) obraz bodu A ve stejnolehlosti z počátku
3) obraz bodu A při rotaci okolo počátku
4) předchozí dva body se středem zobrazení v B
5) jak je to se spirální podobností?
6) obraz bodu A ve středové symetrii v bodě B
7) obraz bodu A v osové symterii podle reálné osy, přímky procházející počátkem a B, přímky BC

Úloha 4 (Vlastnosti jednotkové kružnice). Na jednotkové kružnici se středem O jsou dány body A a B, dále buď X libovolný bod. Určete v co nejzjednodušenějších formách:

1) obraz bodu X v kruhové inverzi podle jednotkové kružnice
2) průsečík tečen z bodů A a B
3) obraz bodu X v osové symetrii podle AB, rovnici sečny AB
4) patu kolmice z X na AB
5) rovnici tečny z bodu A (ověřte, že může být vnímána jako sečna AA)
6) průsečíky jednotkové kružnice s osou úsečky AO

Úloha 5. Na jednotkové kružnici je dán trojúhelník ABC. Označme $s_1 = a+b+c$, $s_2 = ab + bc + ac$, $s_3 = abc$. Dokažte, že trojúhelník ABC je:

1) rovnostranný právě když $s_1 = 0$.
2) pravoúhlý právě když $s_1 s_2 = s_3$

Úloha 6. Body $[0, 0]$, $[a, 11]$ a $[b, 37]$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka (v kartézských souřadnicích). Určete hodnotu součinu ab. (AIME 1994)

Imaginární úlohy

Úloha 7. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a označme postupně E, F, G, H ortocentra trojúhelníků ABD, ACD, ABC a BCD. Dokažte, že

- $BCFE$, $ABHF$, $AGHD$, $CDEG$ jsou rovnoběžníky,
- přímky AH, BF, CE, DG se protínají v jednom bodě,

Úloha 8. Mějme tečnový čtyřúhelník a jemu vepsanou kružnici. Ukažte, že střed vepsané kružnice a středy úhlopříček čtyřúhelníku leží v jedné přímce.

Úloha 9. V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme O střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD. Dokažte, že přímky OS a CT jsou rovnoběžné. (celostátko MO 2013)

Úloha 10. Mějme dva čtverce $ABCD$ a $BNMK$, které se neprotínají a označme E střed AN a F patu kolmice z B v trojúhelníku CBK. Dokažte, že body F, B a E leží v přímce.

Úloha 11. Mějme přímku AB a v jedné z polorovin jí určenou si zvolme bod C. Na strany BC a AC trojúhelníka ABC z vnějšku připišme čtverce $ACDE$ a $CBFG$. Ukažte, že přímka EF prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C v dané polorovině. (MKS 29-4-5)

Úloha 12. Je dán rovnoběžník $ABCD$ takový, že paty K, L kolmic z bodu D po řadě ke stranám AB, BC jsou jejími vnitřními body. Dokažte, že $KL \parallel AC$, právě když $\angle BCA + \angle ABD = \angle BDA + \angle ACD$. (celostátko MO 2013)

Úloha 13 (Napoleonova věta). V trojúhelníku ABC sestrojme nad každou stranou rovnostranný trojúhelník (všechny směrem ven, nebo všechny dovnitř). Dokažte, že těžiště těchto rovnostranných trojúhelníků tvoří rovněž rovnostranný trojúhelník.

Úloha 14 (van Aubelova věta). Stranám AB, BC, CD, DA čtyřúhelníka $ABCD$ z vnějšku připíšeme čtverce a jejich středy označíme postupně U, V, X, Y. Ukažte, že úsečky UX a VY jsou na sebe kolmé a stejně dlouhé.

Úloha 15. Nad stranami trojúhelníka ABC jsou z vnější strany sestrojeny podobné trojúhelníky ABK, BCL a CAM. Dokažte, že těžiště trojúhelníků ABC a KLM splývají.

Úloha 16 (Pascalova věta). Nechť je $ABCDEF$ tětivový šestiúhelník, ve kterém nejsou žádné dvě protější strany rovnoběžné. Označme postupně G, H, I průsečíky přímek AB a DE, BC a EF, CD a FA. Dokažte, že body G, H a I jsou kolineární.

Úloha 17 (Simsonova přímka). Na opsané kružnici trojúhelníku ABC zvolme bod P. Nechť jsou D, E, F paty kolmic z P na přímky BC, CA, AB. Ukažte, že body D, E, F leží na jedné přímce a navíc tato přímka půlí úsečku PH, kde H je ortocentrum ABC.

Úloha 18. V rovnostranném trojúhelníku ABC protne přímka rovnoběžná s AC strany AB a CB v bodech M a P. Označme D těžiště trojúhelníka PMB a E střed úsečky AP. Určete úhel DEC.

Úloha 19. Na delším oblouku AB kružnice opsané čtverci $ABCD$ leží bod P. Označme B' osový obraz bodu B podle přímky AP a dále X, Y, Z středy úseček AB, BP a $B'C$. Určete velikost úhlu XZY.

Reálné úlohy

Úloha 20. Označme postupně r a r_a poloměry kružnice vepsané a kružnice připsané straně BC trojúhelníku ABC. Ukažte, že pokud platí $r + r_a = |BC|$, je trojúhelník pravoúhlý. (celostátko MO 2016)

Úloha 21. V trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek. Dále buď body D, E, F na kružnici opsané ABC takové, že $AD \parallel BE \parallel CF$. Označme postupně S, T, U zobrazení bodů D, E, F v osové symterii podle BC, CA a AB. Dokažte, že body S, T, U a H leží na jedné kružnici. (MOP 2006)

Úloha 22. V trojúhelníku ABC označme γ vepsanou kružnici a I jako její střed. Body dotyku γ se stranami BC, CA, AB pojmenujme D, E, F a buď D' obraz bodu D ve středové souměrnosti podle I. Dále nechť EF protíná tečny na γ z bodů D a D' v bodech P a Q. Ukažte, že $\angle DAD' + \angle PIQ = 180°$. (PUMaC)

Úloha 23. Buď BC průměr kružnice se středem O a A bod na této kružnici takový, že $\angle AOC > 60°$. Dále nechť je EF tětiva získaná z osy úsečky AO, D je střed menšího z oblouků AB. Přímka procházející O rovnoběžná s AD protíná AC v bodě J. Ukažte, že J je střed kružnice vepsané trojúhelníku CEF. (IMO 2002/2)

Úloha 24. V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná se středem I dotýká stran AC a AB v bodech E, F. Obrazy bodů E, F ve středové symterii přes I označme G, H. Buď Q průsečík GH a BC a M střed BC. Dokažte, že jsou přímky IQ a IM na sebe kolmé. (Taiwan TST 2014)

Úloha 25. Buď ABO rovnostranný trojúhelník se středem s a nechť $A'B'O$ je další stejně orientovaný rovnostranný trojúhelník takový, že $S \neq A'$, $S \neq B'$. Označme postupně N a M středy úseček $A'B$ a AB'. Dokažte, že jsou trojúhelníky $SB'M$ a $SA'N$ podobné. (IMO 1989 shortlist)

Úloha 26. Mějme trojúhelník ABC a libovolně v rovině bod P a přímku γ, která jím prochází. Buď A', B', C' postupně body, ve kterých obrazy přímek PA, PB, PC v osové symterii podle γ protínají přímky BC, AC, AB. Dokažte, že body A', B', C' leží na jedné přímce. (USAMO 2012)

Úloha 27. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme postupně středy stran AB, BC, CD, DA jako E, F, G, H. Pojmenujme ortocentra trojúhelníků AHE, BEF, CFG, DGH jako W, X, Y, Z. Dokažte, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $WXYZ$ mají stejný obsah. (USA TST 2014)

Úloha 28 (Schifflerův bod). V trojúhelníku označme střed vepsané kružnice jako I. Dokažte, že se Eulerovy přímky trojúhelníků ABC, AIB, BIC, CIA protínají v jednom bodě.

Úloha 29. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník a Ω kružnice jemu opsaná. Dále necht l je tečna kružnice Ω a l_a, l_b, l_c jsou po řadě obrazy přímky l v osové symetrii podle přímek BC, CA, AB. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami l_a, l_b, l_c se dotýká kružnice Ω. (IMO 2011/6)

Zdroje

[1] Evan Chen; *Bashing Geometry with Complex Numbers*, `hhttp://web.evanchen.cc/handouts/cmplx/en-cmplx.pdf`

[2] David Hruška; *Komplexní geometrie*, *i*KS sborníček 2016

[3] Yi Sun; *Complex Numbers in Geometry,* `http://yisun.io/notes/complex.pdf`

[4] Marko Radovanovic; *Complex Numbers in Geometry*

Hinty

Hint 1. Co dělá násobení s úhly?
Hint 3. Skládejte zobrazení

1) $a + b - c$
2) $t \cdot a, t \in \mathbb{R}$
3) $a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
4) $(a-b)t + b$, $(a-b)(\cos\alpha + i\sin\alpha) + b$
5) $x(a-b) + b, x \in \mathbb{C}$
6) $a + (a-b)$
7) $\overline{a}$, $\overline{a}b/\overline{b}$, $(\overline{a}(b-c) + \overline{b}c - b\overline{c})/(\overline{b} - \overline{c})$

Hint 4.

1) $1/\overline{x}$
2) inverz středu tětivy, $2/(\overline{a} + \overline{b})$
3) $a + b - ab\overline{x}$, $x = a + b - ab\overline{x}$
4) střed úsečky X a obrazu X v osové symetrii, $1/2(x + a + b - ab\overline{x})$
5) $x = 2a - a^2\overline{x}$,
6) rovnostranné trojúhelníky

Hint 5. $(a+b)(b+c)(a+c) = s_1s_2 - s_3$
Hint 6. Otočte obrázek o 60 stupňů.
Hint 7. Vepište si čtyřúhelník do jednotkové kružnice. Kde se protínají úhlopříčky rovnoběžníku?
Hint 8. Zvolte si vepsanou kružnici jako jednotkovou.
Hint 9. Zvolte si zmíněnou vepsanou kružnici jako jednotkovou a dopočítejte.
Hint 10. Umístěte si jeden čtverec rovnoběžně s osami, vrcholy čtverce na sebe lze zobrazit rotací o $90°$.
Hint 11. Co takhle střed EF?
Hint 12. Zvolte si ABC jako jednotkovou kružnici a zapište si podmínky pro daná tvrzení.
Hint 13. Vyjádřete nové vrcholy pomocí otočení o $60°$.
Hint 15. Body K, L, M lze vyjádřit pomocí spirální podobnosti se stejnými parametry z různých vrcholů ABC.
Hint 16. Vydržte upravovat!
Hint 17. Použijte úlohu 4, část 5.
Hint 18. Fakt, že bod M leží na úsečce AB, je ekvivalentní s tím, že existuje $k \in [0; 1]$, že $M = kA + (1-k)B$.
Hint 20. Využijte tvrzení pro středy kružnic a uvedené vzdálenosti chytře reprezentujte vhodnými vektory, k jejich porovnání využijte jejich kolmost.
Hint 21. Zvolte si BÚNO, ať je AD kolmé na reálnou osu.
Hint 22. Vepsanou kružnici jako jednotkovou.
Hint 23. Udělej několik syntetických pozorování. Např. $ADOJ$ je rovnoběžník. Co trojúhelník AOF?.
Hint 24. Vezměte si vepsanou kružnici jako jednotkovou a využijte její výhody na maximum.
Hint 26. Zvolte si γ jako reálnou přímku a použijte vzorec pro průnik přímek.

Hint 27. Ortocentrum AHE lze spočítat z ortocentra ABD pomocí stejnolehlosti. Výpočty obsahu může usnadnit fakt, že $WXYZ$ je rovnoběžník (což už není těžké dokázat, pokud to víte).

Hint 28. Využijte vzorec pro I a jednotkovou kružnici. Kde je střed kružnice opsané AIB?

Hint 29. Nakreslete si fakt dobrý obrázek, všimněte si pár věcí, zatněte zuby a počítejte.

Dirichletov princíp

Tomáš Sásik

Abstrakt. Příspěvek ukazuje typy příkladů na Dirichletův princip.

Tvrzení (Dirichletův princip). Nechť k, n jsou přirozená čísla. Pak, kdykoli umístíte $kn + 1$ objektů do n přihrádek, tak alespoň v jedné přihrádce bude alespoň $k + 1$ těchto objektů.

Toto tvrzení není slavné svou objevností, ale širokou použitelností.

Úloha 1. Dokažte, že kdykoli umístíme na šachovnici 33 šachových věží, můžeme z nich vybrat 5 věží, které se vzájemně neohrožují. (PraSe 00/01, 3. série)

Úloha 2. Je dána 52-prvková množina přirozených čísel. Dokažte, že v ní najdeme dvě čísla, jejichž rozdíl nebo součet je dělitelný 100.

Úloha 3. V prostoru je dáno 9 mřížových bodů. Dokažte, že uvnitř některé úsečky dané těmito body leží další mřížový bod (ne nutně jeden z devíti daných).

Úloha 4. Buď n přirozené číslo a M množina některých vrcholů daného pravidelného n-úhelníku. Dokažte, že pokud $|M| \geq \lfloor\sqrt{2n + 1/4} + 3/2\rfloor$, tak z M můžeme vybrat čtyři body tvořící vrcholy lichoběžníka.

Úloha 5. Je daná 20-prvková množina přírozených čísel menších než 70. Dokažte, že mezi všemi rozdíly tvořenými dvojicemi z této množiny se některé číslo vyskytne čtyřikrát.

Úloha 6. Rostoucí posloupnost přirozených čísel $(a_n)_1^\infty$ splňuje pro všechna přirozená čísla n nerovnost $a_{n+1} - a_n \leq 2012$. Dokažte, že je možné najít dva různé její prvky a_i, a_j, taková že $a_i \mid a_j$

Velká čísla

Úloha 7. Dokažte, že je možné najít 10000 deseticiferných násobků sedmi lišících se jen pořadím číslic. (Československé střetnutí 1995)

Úloha 8. Dokažte, že rovnice $\lfloor x^{3/2}\rfloor + \lfloor y^{3/2}\rfloor = a$ má pro nekonečně mnoho hodnot a alespoň 2012 řešení v přirozených číslech. (Rusko 1980)

Úloha 9. Dokažte, že existuje číslo, které je možné napsat alespoň 100 způsoby jako součet 2012-ti 2011-tých mocnin. Zápisy lišící se jen pořadím sčítanců považujeme za stejné. (Prase 11/12, myšmaš)

Odčítací trik

Často není použití Dirichletova principu finálním krokem, ale pouze prostředním. Po nalezení dvou stejných hodnot často bývá třeba od sebe tyto dva výsledky odečíst pro získání požadovaného objektu.

Příklad. Přirozené číslo n je nesoudělné s desítkou. Dokažte, že existuje násobek n, jehož zápis (v desítkové soustavě) je složený ze samých jedniček.

Uvažujme $n+1$ čísel tvaru 1, 11, 111, ... Dle Dirichletova principu najdeme dvě taková čísla, které dávají stejný zbytek po dělení n. Jejich odečtením získáme násobek n, který začíná samými jedničkami a pokračuje samými nulami. Jinými slovy je to číslo tvaru $k \cdot 10^l$, kde k je číslo tvořené samými jedničkami a l je přirozené. Pak díky tomu, že n je nesoudělné s desítkou máme že i k je násobek n.

Úloha 10. Je daná n-prvková množina přirozených čísel. Dokažte, že některá její neprázdná podmnožina má součet prvků dělitelný n.

Úloha 11. Je dána množina deseti dvojciferných čísel. Dokažte, že můžem najít dvě její disjunktní podmnožiny se stejným součtem prvků. (IMO 1972)

Úloha 12. Dokažte, že libovolnému dostatečně velkému (Tento obrat znamená, že můžeme najít n takové, že tvrzení platí pro všechna čísla větší než n.) číslu neobsahujícímu v ciferném zápisu nulu můžeme odebrat některé cifry ze začátku a z konce a získat tak nenulový násobek čísla 2011. (Kanadská MO 2011)

Úloha 13. Dokažte, že z šestnácticiferného čísla můžeme vybrat několik po sobě jdoucích cifer, jejichž součin je druhou mocninou přirozeného čísla. (PraSe 08/09, 5. série)

Úloha 14. Do tabulky $n \times 2^n$ jsou do řádků napsány všechny n-tice čísel $1, -1$. Po té jsou některá políčka nahrazena nulami. Dokažte, že je možné zvolit neprázdnou množinu řádků, která v součtu (sčítá se po složkách) dává nulový řádek. (Turnaj měst 1996)

Úloha 15. Je dáno přirozené číslo n. Předpokládejme, že existuje celé číslo s takové, že $n \mid s^2+1$. Dokažte, že pak je možné n napsat jako součet druhých mocnin celých čísel.

Úloha 16. Šachista trénuje 77 dní, každý den alespoň jednou, celkem nejvýše 132-krát. Dokažte, že několik dní po sobě trénoval v součtu přesně 21-krát.

Částečná uspořádání

Definice (Částečné uspořádání). Relace $\leq$ na množině M se nazývá částečné uspořádání, pokud pro libovolné prvky x, y, z množiny M platí:

- $x \leq x$. (reflexifita)
- Pokud $x \leq y$ a současně $y \leq x$, pak už nutně musí $x = y$. (slabá antisymetrie)
- Pokud $x \leq y$ a současně $y \leq z$, pak platí $x \leq z$. (tranzitivita)

Příkladem částečných uspořádání může být dělitelnost na přirozených číslech (definujeme, $a \leq b$ jako a dělí b) nebo inkluze na množině všech podmnožin dané množiny (definujeme, $a \leq b$ jako a je podmnožina b).

Definice (Porovnatelnost). Definice částečného uspořádání nevyžaduje, aby ze dvou různých prvků byl nutně některý větší. Řekneme tedy, že dva různé prvky x, y množiny M jsou *porovnatelné*, pokud $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V opačném případě jsou *neporovnatelné*.

Definice (Řetězec, antiřetězec). Podmnožinu X částečně uspořádané množiny nazveme *řetězcem*, pokud každé dva prvky množiny X jsou porovnatelné. Pokud jsou naopak všechny dvojice prvků množiny X neporovnatelné, nazýváme ji *antiřetězcem*.

Úloha po nás může chtít dokázat, že kdykoli vybereme k prvků ze zadané uspořádané množiny M, tak některé dva z nich jsou porovnatelné. To může být dokázáno tak, že pokryjeme celou M pomocí $k-1$ řetězců, dle Dirichletova principu pak musí dva prvky spadnout do jednoho řetězce. Následující tvrzení říká, že takový postup dává nejlepší odhad.

Tvrzení (Dilworthova věta). Buď k počet prvků největšího antiřetězce v M. Pak je možné pokrýt množinu M pomocí k řetězců.

Odebereme nějaký takový prvek a, který nad sebou nemá žádné další prvký (je tzv. maximální). Z indukčního předpokladu pro nějaké k ve zbytku existuje k-prvkový antiřetězec a současně je tento zbytek pokrytelný k řetězci. V každém z těchto řetězců najděme největší prvek, který je prvkem nějakého k-prvkového antiřetězce. Dokažte, že tato množina je opět antiřetězcem. Pokud je nějaký prvek b tohoto antiřetězce porovnatelný s a, tak je možné vzít řetězec složen z prvku a, b a všech prvků pod b uvnitř příslušného řetězce (z pokrytí). Po odstranění takto sestrojeného řetězce v množině nenajdeme k-prvkový antiřetězec a tak (indukční předpoklad) pokryjeme zbytek $k-1$ řetězci.

Úloha 17. Dokažte, že mezi $n+1$ čísly z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ najdete taková dvě různá čísla, že jedno dělí druhé.

Úloha 18. Je dáno 1001 obdélníků s celočíselnými délkami stran nepřesahujícími 1000. Dokažte, že je možné najít 3 obdélníky, které se do sebe vejdou (jeden do druhého, druhý do třetího). Obdélníky je možné otáčet, stejně velké obdélníky se do sebe vejdou.

Úloha 19. Koľko najviac prvkov môže mať množina S, ktorá obsahuje len delitele čísla 2004^{100} a žiadny prvok z S nie je násobkom iného prvku?

Úloha 20. 49 studentů řešilo test skládající se ze tří úloh. Za každou úlohu bylo možné získat 0 až 7 bodů. Dokažte, že existují dva studenti takoví, že první získal z každé úlohy aspoň tolik bodů, co druhý.

A na závěr můžem z Dilworthovy věty odvodit ještě jedno známé tvrzení.

Úloha 21 (Erdös, Szekeres). Jsou dána přirozená čísla a, b. Z každé prosté (neopakující se) posloupnosti délky $ab+1$ je pak možné vybrat rostoucí délky $a+1$ nebo klesající délky $b+1$.

Dělení oblasti

Další typický výskyt Dirichletova principu je v úlohách typu „Je hodně bodů na malém prostoru, dokažte, že nejsou od sebe příliš daleko." Takové úlohy bývají řešitelné rozdělením oblasti na části tak, aby v každé části si byly body blízko.

Příklad. V kruhu o poloměru 1 je 7 bodů. Dokažte, že vzdálenost některých dvou z nich je 1 nebo méně.

Rozdělíme kruh na šestiny (jako koláč). Dle Dirichletova principu musí být v některé části dva body. Vzdálenost těchto dvou bodů pak musí být menší rovna jedné.

Úloha 22. Na okraji čtverce o straně délky 1 je 5 bodů. Dokažte, že vzdálenost některých dvou je menší než $\sqrt{2}/2$.

Úloha 23. Na stole 1×1m leze 51 much. Dokažte, že pomocí kruhového hrnce s poloměrem $\frac{1}{7}$m můžeme chytit 3 mouchy najednou.

Úloha 24. New York je kromě jiného znám i pravidelností svých ulic – má 151 severojižních a 151 východozápadních ulic, které se vždy po 100 metrech kříží. V městě je na ulicích celkem rozmístěných 11401 telefonních automatů. Dokážeme najít dva automaty, které jsou vzdálené maximálně 200 metrů chůze po chodníku?

Úloha 25. V rovině je $2n+1$ bodů rozmístěno tak, že žádný trojúhelník s vrcholy v těchto bodech nemá všechny strany větší než 1. Dokažte, že $n+1$ z těchto bodů je možné pokrýt kruhem o poloměru 1.

Úloha 26. V kruhu o poloměru 1 je šest bodů. Dokažte, že některé dva jsou vzdáleny maximálně 1.

Úloha 27. Dokažte, že kdykoli rozdělíme kruh na 5 částí, v některé budou dva body vzdálené víc jak jedna.

Úloha 28. Kruhový terč o poloměru 12cm zasáho 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7cm. (Celostátní kolo MO 2009/2010)

Literatura a zdroje

Príspevok je kópiou príspevku z iKS 2012 od Mirka Olšáka. Týmto by som chcel poďakovať za možnosť využitia tohto kvalitne spísaného materiálu a uľahčenie práce.

[1] Mirek Olšák, *iKS 2012, Hostětín*
Pôvodné zdroje:
[2] Paul Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving.*
[3] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book.*
[4] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies.*

[5] Peter Korscok, *O hranici neporiadku.*
[6] Ondrej Budáč, Tomáš Jurík, Ján Mazák, *Zierka úloh KMS.*
[7] Martin Aigner, Gütner M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK.*

Hinty

Hint 1. V alespoň jedné z osmi posunutých osmipolíčkových úhlopříček bude alespoň 5 věží.
Hint 2. Rozdělte čísla podle posledních dvou cifer a popárujte (01-99), (02-98), ...
Hint 3. Mají-li dva body stejnou paritu všech tří souřadnic, pak je jejich střed opět mřížovým bodem.
Hint 4. Úhlopříčky n-úhelníku mají pouze n různých směrů. Kolik úhlopříček je možné sestrojit z bodů z M?
Hint 5. Stačí použít 19 rozdílů sousedních čísel. Tyto rozdíly v součtu dávají nejvýše 68. Bylo by to možné, kdyby bylo každé hodnoty nabyto maximálně třikrát?
Hint 6. Kdykoli si vezmeme posloupnost 2012 po sobě jdoucích čísel, najdeme mezi nimi prvek posloupnosti. Myšlenka řešení je sestrojit rostoucí posloupnost takovýchto „pastí“, ve které se pro každé k navzájem dělí k-té prvky.
Hint 7. Kolik je deseticiferných násobků sedmi? A kolik je možností, která cifra bude kolikrát obsažena v daném čísle (bez ohledu na pořadí)?
Hint 8. Zvolme přirozené číslo n. Vezměme všechny dvojice (x, y) z množiny $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$. Kolik možných dvojic to je? A kolika různých hodnot může nabývat $\lfloor x^{3/2} \rfloor + \lfloor y^{3/2} \rfloor$?
Hint 9. Volme přirozené číslo n. Kolik je 2012-tic čísel menších než n? A kolika různých hodnot mohou nabývat součty 2011-tých mocnin se základy menšími než n?
Hint 10. Očíslujme si prvky a_1, a_2, ..., a_n. Pak mezi množinami

$$\{\}, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots \{a_1, \ldots, a_n\}$$

najdeme dvě se stejným zbytkem po dělení n.
Hint 11. Podmnožin je více než možných součtů, tedy najdeme dvě (ne nutně disjunktní) se stejným součtem. Pak zbývá od obou odečíst jejich průnik.
Hint 12. Předpokládejme, že číslo je alespoň 2013-ciferné. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 2011$ uvažujme číslo složené z posledních k cifer. Některá dvě taková čísla mají stejný zbytek po dělení 2013.
Hint 13. Mezi součiny prvních k cifer najdete dva takové, které se shodují paritou exponentů v prvočíselném rozkladu u prvočísel 2, 3, 5, 7.
Hint 14. Sestrojte posloupnost n-tic nul a jedniček. Začněte samými nulami a každý další definujte rekurentně z předchozí n-tice X takto: Y je n-tice, která vznikne z X nahrazením minus jedničky za jedničku a jedničky za nulu. V Y nahraďte některá políčka nulami tak, aby se jednalo o některý řádek tabulky a přičtěte ho k X. V takto definované posloupnosti najdete dva stejné prvky.
Hint 15. Z dirichletova principu najdeme dvě dvojice (x, y) nezáporných celých čísel nepřevyšující $\sqrt{n}$, se stejnou hodnotou $x - sy \pmod{n}$. Odečtením najdeme nenulovou dvojici (x, y) nezáporných celých čísel nepřevyšujících $\sqrt{n}$ takovou, že $x \equiv \pm sy \pmod{n}$. Umocněním dostáváme kýžený výsledek.
Hint 16. Označme h_i počet tréninků do i-tého dne (včetně). Mezi 154 čísly

$$a_1, a_2, \ldots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \ldots, a_{77} + 21$$

najdete 2 stejná, protože nejvyšší možná hodnota je 153.

Hint 17. Volte řetězce ve tvaru $l \cdot 2^k$, kde l je pevné liché číslo.

Hint 18. Definujte k-tý řetězec jako množinu obdélníků, ve kterých se výška od šířky liší právě $k-1$. Takto pokryjete množinu všech obdélníků 500-ti řetězci

Hint 19. Množina S bude najväčšia, keď obsahuje všetky delitele, ktoré majú súčet exponentov v prvočíselnom rozklade 200.

Hint 20. Představte si množinu všech možných bodových zisků jako krychli $8 \times 8 \times 8$. Jedno patro až na 16 bodů pokryjete čtyřmi řetězci. Toto pokrytí použijte na každé patro, zbytek krychle pokryjete 16 řetězci a máte tak $4 \times 8 + 16 = 48$ řetězců.

Hint 21. Posloupnost ze zadání označme $(x_n)_1^{ab+1}$. Tuto posloupnost můžem chápat jako množinu dvojic (x_n, n). Zvolte uspořádání, aby rostoucí podposloupnost byla řetězcem a klesající antiřetězcem. Předpokládejte, že největší antiřetězec má délku b a za použití Dilworthovy věty a Dirichletova principu odvoďte dolní odhad pro nejdelší řetězec.

Hint 22. Rozdělte okraj čtverce na 4 „rohy“. Pozor na přesné zadání množin, aby vyloučilo rovnost (v úloze je ostrá nerovnost).

Hint 23. Rozdělte na čtverečky o straně $\frac{1}{5}$m.

Hint 24. Strážník stojící na křižovatce dohlédne každým směrem 100 metrů. Rozmístěte na křižovatky šachovnicově strážníky a najděte strážníka, který vidí dva automaty.

Hint 25. Pokud žádná vzdálenost není větší než jedna, dá se celá množina pokrýt jedním kruhem. V opačném případě, jsou-li A, B body s vzdáleností větší než jedna, pak celou množinu pokryjete dvěma kruhy se středy v A, B.

Hint 26. Uvažujte stejné rozkrájení jako v příkladu a natočte si ho tak, aby některý bod ležel na hranici dvou oblastí.

Hint 27. Vezměte na okraji kruhu pět bodů, jejichž vzájemná vzdálenost je větší než 1. Natočte je tak, aby bylo možné přidat blízoučko k jednomu z nich ještě jeden ale do jiné oblasti.

Hint 28. Rozdělte kruh s poloměrem 7 na šestiny (jako v příkladu) a zbylé mezikruží rozdělte na dvanáctiny. Poznámka: otáčecím trikem z předchozích dvou úloh je opět možné zmenšit počet potřebných bodů o jedna.

Isogonály a kamarádi

Rado van Švarc

Abstrakt. Isogonal conjugates a práce s nimi je oblíbené téma moderní eukleidovské geometrie. V příspěvku jsou popsána některá základní tvrzení, po kterých následuje několik úloh, které se isogonal conjugates buď zabývají, nebo je přímo využívají.

„Dyť ty přiblblý citáty stejně nikoho nezajímaj'.“

— Rado, psa seriál ve čtyři ráno

Definice. Nechť ℓ je přímka procházející skrze vrchol V úhlu XVY. Řekneme, že přímka ℓ' je její *isogonála* (slova isogonála a izogonála jsou záměnná), pokud se jedná o obrazy přes osu úhlu XVY.

Definice. Nechť bod P leží v rovině trojúhelníku ABC. Pokud se isogonály přímek AP, BP a CP protínají v jednom bodě Q, pak tento bod nazveme *isogonal conjugate*, neformálně též *kamarád*, bodu P vzhledem k $\triangle ABC$.

Tvrzení. Pokud P neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$, pak vzhledem k $\triangle ABC$ má P isogonal conjugate.

Tvrzení (Six feet theorem). Nechť P a Q jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$. Nechť P_a je projekce bodu P na BC. Analogicky definujme P_b, P_c, Q_a, Q_b a Q_c. Pak P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b a Q_c leží na jedné kružnici, jejíž střed splývá se středem PQ.

Úmluva. Budeme používat *opsiště*, *vepsiště* a *připsiště* jako zkrácený pojem pro střed kružnice opsané, kružnice vepsané a kružnice připsané. Navíc budeme místo „ortocentrum“ používat pojem *kolmiště*.

Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, pak v trojúhelníku ABC bude I, O a H označovat vepsiště, opsiště a kolmiště.

Příklad. V trojúhelníku ABC je I svůj vlastní kamarád. Dále pokud E je připsiště, pak i ono je svým vlastním kamarádem.

Příklad. Body O a H jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$.

Tvrzení. V trojúhelníku ABC označíme body dotyku kružnice vepsané s BC, CA, AB jako D, E, F. Body dotyku kružnic připsaných se stranami BC, CA a AB si označíme jako X, Y, Z. Pak trojice přímek AD, BE a CF se protíná v jednom bodě a stejně tak i trojice přímek AX, BY, CZ.

Definice. Ve výše použitém značení se průsečík AD, BE a CF nazývá *Gergonnův bod*. Pro průsečík AX, BY, CZ se používá označení *Nagelův bod*.

Příklad. Nechť H^- je střed záporné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom H^- je isogonal conjugate Gergonnova bodu.

Příklad. Nechť H^+ je střed kladné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom H^+ je isogonal conjugate Nagelova bodu.

Příklad (Brocardovy body). Uvnitř $\triangle ABC$ leží dvojice bodů P a Q tak, že

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \phi \quad \text{a} \quad \angle QBA = \angle QCB = \angle QAC = \varphi.$$

Potom tyto dva body jsou isogonal conjugates.

Příklad. Kamarád devítiště (tj. středu kružnice devíti bodů) je průsečík přímek AO_A, BO_B, CO_C, kde O_A, O_B, O_C jsou opsitě trojúhelníků BOC, COA, AOB.

OH, oni jsou kamarádi!

Úloha 1. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ si označme průsečík úhlopříček jako P. Dále si označme opsiště čtyřúhelníku $ABCD$ jako O a opsiště trojúhelníků APB, BPC, CPD a DPA jako O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že přímky PO, O_1O_3 a O_2O_4 se protínají v jednom bodě. (Čína 1990)

Úloha 2. Ukažte, že rovnost $IH = IO$ platí právě tehdy, když jeden z úhlů trojúhelníku je roven $60°$.

Úloha 3. V $\triangle ABC$ výška a těžnice z B dělí úhel ABC na třetiny. Určete úhly trojúhelníka ABC.

Úloha 4. V $\triangle ABC$ osa úsečky BH protíná strany AB a BC v bodech D a E. Ukažte, že $\angle BOD = \angle BOE$. (Crux)

Úloha 5. V $\triangle ABC$ leží body D a E na stranách AB a BC tak, že čtyřúhelník $ADEC$ je tětivový. Kružnice opsaná $\triangle DBE$ protne stranu AC ve dvou bodech X a Y. Nechť M je střed XY. Ukažte, že $BM \perp AC$. (Baltic Way 2010)

Úloha 6. Kružnice k_1 a k_2 se středy I_1 a I_2 se protínají ve dvou bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D. Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

Úloha 7. V ostroúhlém nerovnoramenném trojúhelníku ABC na výšce BB_0 leží bod X. Přímka AX protne stranu BC v A_1 a přímka CX protne stranu AB v C_1. Ukažte, že AC_1A_1C je tětivový čtyřúhelník právě když X je ortocentrum $\triangle ABC$. (CK MO 2007)

Symediány

Definice. Symediána je isogonála k těžnici. Kamarád těžiště se nazývá Leominův bod.

Tvrzení. B-symediána prochází průsečíkem tečen k opsané v bodech A a C.

Úloha 8. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AC. Dále nechť P je jeho vnitřní bod takový, že $\angle PAC = \angle PCB$. Označme M střed AC. Ukažte, že $\angle APM + \angle BPC = 180°$. (Polsko 2000)

Úloha 9. Je dán trojúhelník ABC, v němž $AC = 2AB$. Ke kružnici k jemu opsané sestrojme tečny v bodech A a C a jejich průsečík označme P. Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici k. (ČR TST 2013)

Úloha 10. Trojúhelník ABC je vepsaný do kružnice ω. Tečny k ω v bodech A a C se protínají v T . Bod S leží na polopřímce AC tak, že $BS \perp BT$. Body A_1 a C_1 leží na polopřímce ST (s C_1 mezi A_1 a S) tak, že $A_1T = AT = C_1T$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a A_1BC_1 jsou podobné. (USA TST 2007)

Definice. Uvažujme trojúhelník ABC s opsištěm O a kolmištěm H. Jako H_a, H_b a H_c označíme paty kolmic z H na příslušné těžnice a jako O_a, O_b a O_c označíme paty kolmic z O na příslušné symediány.

Tvrzení. H_b leží na následujících křivkách:

- Kružnice nad průměrem BH
- Těžnice
- Kružnice nad průměrem HG, kde G je těžiště
- Kružnice opsaná AHC
- Kružnice dotýkající se AC v A a procházející B. (resp. dotýkající se v C)
- Kružnice opsané $AC'M_B$ a $CA'M_B$, de A', C' jsou paty kolmic z A a C a M_B je střed AC.

  O_b leží na následujících křivkách:

- Kružnice nad průměrem BO
- Symediána
- Kružnice nad průměrem OK, kde K je Lemoinův bod (průsečík symedián)
- Kružnice opsaná AOC
- Kružnice dotýkající se BA v B a procházející C. (resp. dotýkající se v BC v B procházející A)

Tvrzení. O_b je střed spirální stejnolehlosti převádějící BA na BC.

Tvrzení. O_b a H_b jsou kamarádi.

Úloha 11. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. O kružnici k řekneme, že je *šikovná*, pokud prochází bodem B, protíná strany BA a BC (průsečíky označíme postupně X_k, Y_k) a navíc průsečík úseček AY_k a CX_k leží na k. Dokažte, že všechny šikovné kružnice prochází pevným bodem různým od B. (iKS 3 – G5)

Další hrátky s isogonal conjugates

Úloha 12. Elipsa s ohnisky P a Q se dotýká stran $\triangle ABC$. Ukažte, že P a Q jsou isogonal conjugates.

Úloha 13. Uvnitř $\triangle ABC$ leží bod P takový, že pokud si jeho průměty na strany BC, CA, AB si označíme jako D, E, F, pak $DE \perp EF$. Nechť Q je ortocentrum DBF. Ukažte, že P a Q jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$.

Úloha 14. Nechť P a Q jsou kamarádi v trojúhelníku ABC. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům APC a AQC jsou navzájem obrazy v inverzi přes kružnici opsanou ABC.

Úloha 15. V rovině trojúhelníku ABC leží kružnice k se středem X. Tato kružnice protíná stranu AC v bodech B_1 a B_2. Kružnici nad průměrem B_1B_2 nazveme k_b. Analogicky vytvoříme kružnice k_a a k_c. Potenční střed k_a, k_b a k_c označme jako Y. Ukažte, že X a Y jsou isogonal conjugates. (zobecněné IMO 2008)

Úloha 16. Nechť M a N jsou kamarádi v trojúhelníku ABC. Ukažte, že

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 17 (General Feuerbach Theorem). Body P a Q jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ a přitom platí, že P, Q a O leží na přímce. Ukažte, že kružnice opsaná projekcím bodů P a Q na strany trojúhelníku se dotýká kružnice devíti bodů.

Úloha 18. Nechť P a Q jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ s kružnicí opsanou Ω. Průsečík BP s Ω různý od B označme D. Přímka DO protne AC a Ω v M a N. Pokud $BA < BC$, ukažte, že $\angle AMP = \angle QNB$. (Zobecněné Rusko 2005)

Úloha 19. Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká strany ABC v bodě E. Koule jemu připsaná vzhledem k vrcholu D se dotýká strany ABC v bodě F. Ukažte, že E a F jsou kamarádi v trojúhelníku ABC. (MKS 33-7-7)

Lemma o isogonále

Lemma. Nechť BP, BS a BQ, BR jsou dvě dvojice isogonál v trojúhelníku ABC. Průsečík PR a QS označme jako X, průsečík PQ a SR jako Y. Pak BX a BY jsou isogonály.

Úloha 20. Nechť BB' je osa úhlu v trojúhelníku ABC. Buď X libovolnýbod na BB'. Průsečík AX a BC, resp. CX a BA, označme A', resp. C'. Nechť AX protíná $B'C'$ v P a CX protíná $B'A'$ v Q. Ukažte, že $\angle PBC = \angle QBA$.

(Turnaj měst 2006)

Úloha 21. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ s $AB \parallel CD$ se protínají v bodě P. Bod Q leží v pásu určeném AB a CD tak, že P a Q leží na opačných stranách od přímky

CB, a platí $\angle CQD = \angle AQB$. Ukažte, že $\angle DQP = \angle QAB$.

(IMO Shortlist 2007)

Úloha 22. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. V trojúhelníku ABC označme jako I a J jeho vepsiště a A-připsiště. V trojúhelníku ACD označme jako K a L jeho vepsiště a A-připsiště. Ukažte, že průsečík přímek IL a JK leží na ose úhlu BCD. (India Postals 2015)

Úloha 23. Nechť $ABCDE$ je konvexní pětiúhelník, ve kterém jsou trojúhelníky ABC, ACD a ADE podobné. Nechť P je průsečík úhlopříček BD a CE. Ukažte, že AP, je tečna v trojúhelníku ACD. (IMO Shortlist 2006)

Úloha 24. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Projekce bodu P na AB a CD označíme jako E a F. Nechť Q je průsečík CE a BF. Ukažte, že $QP \perp EF$. (USA TST 2012)

Úloha 25. Nechť X je libovolný bod v trojúhelníku na straně AC trojúhelníku ABC. Kružnice opsané trojúhelníkům AXB a BXC protínají strany AB a BC podruhé v bodech P a Q. Nechť B' je obraz bodu B přes stranu AC. Průsečík přímek AB' a PX označíme Y, průsečík přímek CB' a QX označíme jako Z. Ukažte, že se přímky AZ, BX a CY protínají v jednom bodě. (RMM 2016)

Úloha 26. Nechť ABC je různostranný ostroúhlý trojúhelník a M, N, P jsou středy stran BC, CA a AB. Osy stran AB a BC protínají přímku BN v bodech X a Y. Pokud se AX a CY protínají v bodě Z, ukažte, že $BMZP$ je tetivový čtyřúhelník.

(USAMO 2008)

Úloha 27. Nechť BH je výška v trojúhelníku ABC a H' je obraz H přes střed AC. Pokud se tečny ke kružnici opsané ABC v bodech A and C protínají v bodě X a kolmice na XH' v bodě H' protínají BA a BC postupně v Y a Z, ukažte, že $\angle ZXC = \angle YXA$. (Írán TST 2015)

Schovaní kamarádi

Úloha 28 (Pascalova věta). Nechť $ABCDEF$ je tětivový šestiúhelník. Nechť X, Y, Z jsou postupně průsečíky přímek AC a DB, CF a BE, FD a EA. Ukažte, že X, Y, Z leží na jedné přímce.

Úloha 29. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Nechť A', B', C' jsou paty kolmic z P na příslušné strany. Kružnice opsaná $\triangle A'B'C'$ protíná stranu BC podruhé v bodě A''. Na úsečce $A''B'$ nalezneme bod X takový, že $\angle XAC = \angle PAB$. Ukažte, že $\angle AXB = 90°$. (iKS 1 – G3)

Úloha 30. Je dán úhel o velikosti α s hlavním vrcholem A sevřený mezi polopřímkami u_1 a u_2 vycházejícími z A. Uvnitř úhlu u_1u_2 je dán bod B neležící na jeho ose a je dána velikost úhlu β, kde $\alpha < \beta < 180°$. Uvažme všechny možné dvojice bodů X, Y takové, že $X \in u_1$, $Y \in u_2$, A leží mimo úhel XBY a $\angle XBY = \beta$. Pak každý z bodů A, B má tu vlastnost, že vidí úsečku XY stále pod stejným úhlem. Ukažte, že existuje třetí bod s touto vlastností. (iKS 4 – G6)

Úloha 31. Je dán trojúhelník ABC a jeho kružnice opsaná. Bod P je středem oblouku BAC. Kružnice nad průměrem CP protíná osu úhlu BAC v bodech K a L, kde $AK < AL$. Bod M je obrazem bodu L v osové souměrnosti podle přímky BC. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BKM prochází středem BC.

(ČPS 2013)

Úloha 32. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že přímka BD nepůlí ani úhel $\angle ABC$, ani $\angle CDA$. Bod P ležící uvnitř $ABCD$ splňuje $\angle PBC = \angle DBA$ a $\angle PDC = \angle BDA$. Ukažte, že $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $AP = CP$.

(IMO 2004)

Úloha 33. Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme (ne nutně podobné) obdélníky $ABDE$, $BCFG$ a $CAHI$, které s daným trojúhelníkem sdílí pouze stranu. Ukažte, že osy úseček HE, DG a FI se protínají v jednom bodě. (MKS 38-2-8)

Úloha 34. Nechť ABC je různostranný ostroúhlý trojúhelník a M, N, P jsou středy stran BC, CA a AB. Osy stran AB a BC protínají přímku BN v bodech X a Y. Pokud se AX a CY protínají v bodě Z, ukažte, že $BMZP$ je tetivový čtyřúhelník.

(USAMO 2008)

Zdroje

[1] Michal Rolínek; *Antirovnoběžnost* , PraSe Oldřichov 2012, `https://mks.mff.cuni.cz/library/AntirovnobeznostMR/AntirovnobeznostMR.pdf`

[2] Michal Rolínek; *Trojúhelník tam, zpátky a ještě dál* , *i*KS Hostětín 2012, `http://iksko.org/files/sbornik1.pdf`

[3] András Hraskó; *The Isogonal Conjugate*

[4] Yufei Zhao; *Lemmas in Euclidean Geometry*

[5] Tran Quang Hung, Pham Huy Hoang; *Generalization of a Problem with Isogonal Conjugeta Points*

[6] `https://artofproblemsolving.com/community/c2771h1181729`

[7] `http://www.artofproblemsolving.com`

[8] `https://usamo.wordpress.com/2014/11/30/three-properties-of-isogonal-conjugates/`

Hinty

Hint 1. Díky isogonálnosti O s H a tětivovosti $ABCD$ je $O_1P \perp CD$ a analogicky pro ostatní, z čehož plyne, že O_1PO_3O a O_2PO_3O jsou rovnoběžníky.
Hint 2. Buď je $\triangle BIH \cong \triangle BIO$, nebo je $BOIH$ tětivový čtyřúhelník.
Hint 3. Opsiště leží na těžnici, takže ABC je buď rovnoramenný, nebo pravoúhlý - rozeberte.
Hint 4. Ukažte $\triangle BOC \sim \triangle BDH$ a použijte spirální podobnost.
Hint 5. Pokud S je opsiště $\triangle BDE$, pak $BS \perp AC$.
Hint 6. Vyúhlete, že E je opsiště $\triangle ACD$.
Hint 7. Nechť ACA_1C_1 je tětivový. Buď Y kamarád X. Pak Y leží na BO a zároveň je trojúhelník AYC rovnoramenný, takže Y je opsiště.
Hint 8. BA a BC jsou tečny ke kružnici opsané APC.
Hint 9. Dokreslete střed AC a vyúhlete.
Hint 10. Ukažte, že trojúhelníky BMC a BTC_1 jsou podobné, kde M je střed AC.
Hint 11. Je to bod H_b
Hint 12. Pokud se elipsa dotýká AC v D, pak $\angle PDA = \angle QDC$. Překlopte Q podle stran.
Hint 13. Najdi Thaletovku a pak použij Six feet theorem.
Hint 14. Když O, O_P a O_Q jsou opsiště příslušných kružnic, vyúhlete, že $\angle AO_PO = \angle OAO_Q$.
Hint 15. Dokreslete středy k_a, k_b a k_c. Chordála je kolmá na jejich spojnici. Střed k leží na osách B_1B_2 a dalších dvou analogických osách.
Hint 16. Dokreslete bod X takový, že BAM a BXC jsou podobné trojúhelníky. Dodělejte pomocí podobností a Ptolemaiovy věty na čtyřúelník $AMCX$.
Hint 17. Nechť PQ protíná kružnici opsanou $\triangle ABC$ v X a Y. Pak Simsonovy přímky X a Y jsou na sebe kolmé a protínají se právě v našem bodě dotyku.
Hint 18. Dokreslete $D' \in \Omega$ tak, že $DD' \parallel AC$. S trochou úhlení dostaneme $\triangle PAD \sim \triangle AQD'$. Potom dostaneme $\triangle PDM \sim \triangle ND'Q$ a $\triangle AMD \sim \triangle NAD'$.
Hint 19. Vepsaná a připsaná koule jsou stejnolehlé podle D. Pomocí toho a stejných tečen najděte shodné trojúhelníky a dopočítejte úhly.
Hint 20. BA' je isogonální s BC', BX je isogonální s BB'.
Hint 21. QD je isogonální s QA, QC je isogonální s QB.
Hint 22. CJ a CL jsou isogonály v trojúhelníku ICK.
Hint 23. Přímky BC a DE jsou tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ACD.
Hint 24. PE a PF jsou isogonály v úhlu BPC.
Hint 25. Vyúhlete, že $\angle AXZ = \angle ABC = \angle YXC$.
Hint 26. Ukažte, že chceme, aby Z ležel na B-symediáně. Vyrobte body R a Q tak, že $RB \perp BC$, $QA \perp BA$, a průsečík AQ a CR je Z. Použijte lemma na BX, BA, BC, BY.
Hint 27. Nechť P je pata výšky z X a BA. Ukažte, že PAH' je podobný XCB. Z toho vyvoďte, že XB a XH' jsou isogonály v CXY.
Hint 28. Trojúhelníky BYC a FYE jsou (nepřímo) podobné. Ukažte, že X a Z jsou v těchto trojúhelnících „jakoby“ kamarádi.
Hint 29. Dokreslete isogonal conjugate k P a použijte six feet theorem. Doúhlete.

Hint 30. Ten bod je isogonal conjugate k B vzhledem k (libovolnému) trojúhelníku XAY. Na dokázání toho, že je to pro všechny ten samý bod, použijte definici isogonal conjugate jako střed kružnice opsané obrazům přes strany.

Hint 31. Ukažte, že K a L jsou isogonal conjugates a doúhlete.

Hint 32. Body A a C jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle BPD$.

Hint 33. Opsiště AEH, BDG a CFI si označme O_A, O_B a O_C. Když H je střed stejnolehosti převádějící ABC na $O_AO_BO_C$, pak jeho kamarád v $O_AO_BO_C$ je hledaný bod.

Hint 34. Ukažte, že chceme, aby Z ležel na B-symediáně. Ukažte, že bod, ve kterém se protínají kružnice skrz B, které se dotýkají AC v A, resp. v C, je kamarád Z.

Konvergentní posloupnosti v $\mathbb{N}$

Pavel Turek

Abstrakt. Definujeme si konvergující posloupnosti a naučíme se základní metody, jak s nimi pracovat. Poté se podíváme jak zdánlivě jednoduché tvrzení o celočíselných posloupnostech dokáže pomoci při řešení úloh z teorie čísel. Na závěr se seznámíme s nekonečnými řadami, jež můžeme uplatnit v různých existenčních úlohách.

Limita posloupnosti

Definice. O posloupnosti reálných čísel (x_n) řekneme, že *konverguje k reálnému číslu* x, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené N takové, že pro všechna $n \geq N$ platí $|x_n - x| < \varepsilon$. V takovém případě se x nazývá *limitou posloupnosti* (x_n) a tuto skutečnost zapisujeme jako $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, popřípadě $x_n \to x$ pro $n \to \infty$.

Definice. Posloupnost (x_n) *je konvergentní/ konverguje*, pokud existuje reálné x, ke kterému (x_n) konverguje. V opačném případě říkáme, že (x_n) *je divergentní/ diverguje.*

Podstata limity je zjistit, jak se daná posloupnost chová pro větší a větší n. Pokud konverguje, tak bychom rádi, aby konvergovala jen k jednomu číslu, což souhlasí s naší definicí:

Cvičení. Rozmyslete si, že pro konvergující posloupnost existuje právě jedna její limita.

Dále by se hodilo, kdyby limity splňovaly jednoduché vztahy, které bychom mohli využít k vytváření nových složitějších konvergujících posloupností z jednodušších. Naštěstí naše definice toto umožnuje.

Tvrzení. Pro (a_n) a (b_n) konvergující posloupnosti s limitami a, respektive b, platí:

(i) $(a_n + b_n)$ konverguje k $a + b$;
(ii) $(a_n b_n)$ konverguje k ab;
(iii) pokud $b \neq 0$, pak (po vynechání konečně mnoho prvních členů) $(\frac{a_n}{b_n})$ konverguje k $\frac{a}{b}$;
(iv) libovolná podposloupnost posloupnosti (a_n) konverguje k a;
(v) pokud $a = b$ a (c_n) je posloupnost splňující $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro všechna dostatečně velká n, pak i (c_n) konverguje k a (sandwich theorem);
(vi) pokud je f spojitá funkce v a, tak $f(a_n) \to f(a)$ pro $n \to \infty$;
(vii) pokud (a_n) je posloupnost celých čísel, pak po vynechání prvních konečně mnoha členů je (a_n) konstantní.

Možná jste si všimli, že poslední část předchozího tvrzení se liší od ostatních tím, že nám nedává novou konvergující posloupnost. Nicméně jak za chvíli uvidíme, díky ní můžeme jednoduše propojit reálné konvergující posloupnosti s úlohami z teorie čísel. Ale v tuto chvíli zkusme radši pár jednoduchých příkladů na rozcvičení.

Úloha 1. Které z následujících posloupností konvergují? A pokud konvergují, tak jaké jsou jejich limity?

1) $\frac{p(n)}{q(n)}$ v závislosti na nenulových polynomech p a q,
2) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
3) $\frac{n^{2019}}{2^n}$,
4) $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, kde F_n je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

Úloha 2. Pokud (x_n) konverguje k x, určete, zda-li následující posploupnosti nutně konvergují a případně jaké jsou jejich limity:

1) $|x_n|$,
2) $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$,
3) $\lfloor x_n \rfloor$,
4) $y(n)$, posloupnost, která obsahuje stejná čísla jako x_n, ale v jiném pořadí.

Úloha 3. Neklesající posloupnost přirozených čísel (a_n) splňuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. Dokažte, že posloupnost $(\frac{n}{a_n})$ obsahuje všechna přirozená čísla.

Konečně se dostáváme k tomu důležitému, a to jak tohle vše využít. Určitě jste se setkali s úlohou, kde jste dokázali, že nějaká posloupnost přirozených čísel je nerostoucí, a tedy musí po čase být konstantní, a tím jste úlohu vyřešili (anebo jste se aspoň posunuli správným směrem). Ovšem proč se omezit pouze na nerostoucí posloupnosti přirozených čísel, když můžeme totéž udělat pro konvergující posloupnosti celých čísel. Následuje pár jednodušších úloh, ale předtím ještě pár tipů, jak a kdy konvergentní posloupnosti použít:

- Konvergentní posloupnosti pomáhají u úloh, u kterých víte, že nějaká podmínka (hodnoty polynomu, dělitelnost, …) platí pro nekonečně mnoho celých nebo racionálních čísel.
- Většinou hned po přečtění úlohy vám dojde, jaká je dobrá posloupnost celých čísel, a zbývá ji nějakými operacemi (např. rozdíl dvou následujících členů) převést na konvergující posloupnost celých čísel. Taková posloupnost se ovšem často dá odhadnout, připustíte-li, že dokazované tvrzení platí a najdete nějakou konstantní posloupnost.

Úloha 4. Celá čísla a a b jsou taková, že $a2^n + b$ je druhá mocnina celého čísla pro všechna přirozená n. Ukažte, že $a = 0$. (Polské výběrko)

Úloha 5. Mějme reálné polynomy f a g stejného stupně. Pro každé reálné x platí: pokud $f(x)$ je celé číslo, pak je i $g(x)$. Dokažte, že existují celá m, n, pro která $g(x) = mf(x) + n$ pro všechna reálná x. (Bulharská olympiáda)

Nekonečné řady

Definice. Pro reálnou posloupnost (x_n) *nekonečnou řadou* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ rozumíme posloupnost parciálních součtů $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Poté podmínka X (např. konvergence) platí pro řadu právě tehdy, když platí pro posloupnost parciálních součtů. Speciálně pokud $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, tak píšeme $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = s$.

Cvičení. Rozmyslete si:

- pokud $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ konverguje, tak $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$;
- pokud $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ konverguje, tak totéž platí pro $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Definice. O posloupnosti (x_n) řekneme, že *jde k nekonečnu*, pokud pro každé reálné k existuje přirozené N takové, že $|x_n| > k$ pro všechna $n \geq N$. Píšeme $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ popřípadě $x_n \to \infty$ pro $n \to \infty$. Ovšem v takovém případe (x_n) diverguje.

Tvrzení. Pro každou rostoucí posloupnost existuje jedinečné $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Důsledek. Pokud (x_n) a (y_n) jsou reálné posloupnosti takové, že pro každé n platí $|x_n| \leq y_n$, pak platí:

(i) existují $x \leq y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, pro které $\sum_{i=1}^{\infty} y_i = y$ a $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = x$;
(ii) pokud $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ konverguje, pak i $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ konverguje (v tomto případě stačí aby $|x_n| \leq y_n$ pro všechny dostatečně velké n).

Druhá část předcházejícího důsledku je klíčová pro několik existenčních úloh. Často stačí postupovat sporem a dostat dvě řady kladných reálných čísel, tak jako v důsledku a poté ukázat, že limity splňují $x = \infty$ a $y < \infty$, což dá spor. Tudíž bude se nám hodit znát nějaké řady, abychom se k tomu sporu dostali.

Úloha 6. Které z následujících řad konvergují?

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, v závislosti na x;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$ v závislosti na $m \in \mathbb{N}$ (pro $m = 1$ dostáváme takzvanou harmonickou řadu);
3) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$, kde F_n je n-té Fibonacciho číslo;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Úloha 7 (Cauchyovská posloupnost je konvergentní). O posloupnosti (x_n) řekneme, že je Cauchy(ovská), pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené N takové, že $|x_m - x_n| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq N$. Dokažte, že každá Cauchy(ovská) posloupnost konverguje.

Úloha 8. Celá čísla a a b jsou větší než 1. Ukažte, že existuje násobek a, který obsahuje všechny cifry $0, 1, \ldots, b-1$ ve svém zápisu v soustavě o základu b.

Úlohy

Úloha 9. Nechť (a_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel, která splňuje $a_n a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ pro všechna přirozená $n \geq 2019$. Dokažte, že existuje N, takové že $a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ pro všechna $n \geq N$. (Turnaj měst 2001)

Úloha 10. Přirozené číslo m nazveme trojúhelníkové, pokud existuje $k \geq 2$ takové, že $m = \binom{k}{2}$. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b), pro které $an + b$ je trojúhelníkové právě tehdy, když n je trojúhelníkové.

Úloha 11. Celočíselné nekonstantní polynomy f a g jsou takové, že $f(n)g(n)$ pro nekonečně mnoho přirozených n. Ukažte, že $g(x) = f(x)h(x)$ pro nějaký polynom h s racionálními koeficienty a všechna x reálná čísla.

Úloha 12. Kvadratický polynom f splňuje, že $f(n)$ je druhou mocninou celého čísla pro všechna přirozená n. Dokažte, že f je druhou mocninou polynomu s celočíselnými koeficienty.

Úloha 13. Ukažte, že v rostoucí posloupnosti (a_n) přirozených čísel splňující $a_n < 100n$, pro všechna n lze vybrat nekonečně mnoho členů, které obsahují 2019 po sobě jdoucích jedniček.

Úloha 14. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou kladná reálná čísla taková, že alespoň jedno není přirozené. Ukažte, že pro nekonečně mnoho přirozených čísel n platí: n a $\lfloor a_1 n \rfloor + \lfloor a_2 n \rfloor + \ldots + \lfloor a_k n \rfloor$ jsou nesoudělná.

Úloha 15. Dokažte, že neexistuje trojice celočíselných kvadratických polynomů p, q, r, které by splňovaly, že pro všechna celá čísla a, b existuje celé c vyhovující $p(a) + q(b) = r(c)$.

Úloha 16. Pro polynom p s celočíselnými koeficienty existuje posloupnost po dvou různých přirozených čísel (a_n), splňující: $p(a_1) = 0$, $p(a_2) = a_1$, $p(a_3) = a_2$,... Jaký je stupeň p? (Turnaj měst 2003)

Úloha 17. Mějme monický polynom p s celočíselnými koeficienty takový, že rovnice $p(x) = 2^n$ má celočíselné řešení pro všechna přirozená n. Ukažte, že p je lineární. (iKS 8-N2)

Úloha 18. Nechť b je celé číslo větší než 5 a definujme $x_n = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}5$ v soustavě o základu b. Dokažte, že x_n je druhá mocnina celého čísla pro všechna dostatečně velká n právě tehdy, když $b = 10$. (IMO shortlist 2003)

Úloha 19. Konečné množiny A a B kladných reálných čísel splňují, že pro každé přirozené n existuje přirozené m takové, že součet n-tých mocnin prvků A je roven součtu m-tých mocnin prvků B. Ukažte, že existuje celé číslo k takové, že prvky A jsou prvky B umocněné na k.

Úloha 20. Celá čísla a, b jsou větší než 1 a pro všechna přirozená n platí $a^n - 1 \mid b^n - 1$. Dokažte, že b je mocnina a.

Úloha 21. Najděte všechny reálné polynomy f takové, že pro přirozené n sestávajícího pouze z 1 platí, že i $f(n)$ se skládá pouze z jedniček. (Putnam 2007)

Úloha 22. Nechť $s_b(n)$ značí ciferný součet n zapsaného v soustavě o základu b. Ukažte, že pro každé přirozené n existuje přirozené N takové, že pro jakékoliv $2 \leq b \leq 2047$ $s_b(N) < n$. (Iránské výběrko 2010)

Úloha 23. Najděte všechny monické polynomy f, které splňují: pro každá a a b přirozená čísla existuje třetí přirozené číslo c vyhovující $f(a)f(b) = f(c)$.
(Iránské výběrko 2007)

Úloha 24. Najděte všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, které pro všechna přirozená n splňují $a \cdot 2^n + b \mid c^n + 1$.

Úloha 25. Definujme $\pi(n)$ jako počet prvočísel nepřesahujících n (například $\pi(20) = 8$). Dokažte, že pro nekonečně mnoho n platí, že $\pi(n)$ dělí n.

Úloha 26. Najděte všechna celá čísla a, b, c, pro která $a \cdot 4^n + b \cdot 6^n + c \cdot 9^n$ je druhou mocninou celého čísla, pro všechna dostatečně velká n.

Úloha 27. Nechť f a g jsou reálné polynomy splňující pro každé reálné y: $f(x) = y$ má racionální řešení právě tehdy, když $g(x) = y$ má racionální řešení. Ukažte, že existují racionální čísla a, b taková, že $f(x) = g(ax + b)$ pro všechna reálná x.

Literatura a zdroje

[1] Andreescu, Dospinescu: *Problem from the Book*, XYZ Press, 2010

[2] Navid Safaei: *Unexpected Applications of Mean Value Theorem(s) in Number Theory, Mathematical Reflection*, 2018

Hinty

Hint 1. 1) Důležité jsou stupně daných polynomů. 2) Rozdíl čtverců. 3) Mrkněte na podíl po sobě jdouch členů. 4) Pokud konverguje, tak k čemu, využijte sandwich theorem.
Hint 2. 1) ano $|x|$ 2) ano x 3) ne 4) ano x
Hint 3. Uvažte $A_m = \{n \in \mathbb{N} : \frac{a_{mn}}{mn} \geq \frac{1}{m}\}$, abyste našli m ve finální posloupnosti.
Hint 4. Využijme, že $a2^{n+2} + b$ je skoro $4(a2^n + b)$.
Hint 5. Získejte posloupnost x_n, ve které se f rovná n. Jaká bude posloupnost $g(x_n)$ pokud $g(x) = mf(x) + n$?
Hint 6. 1) Co je větší: $|x|$ nebo 1? 2) Pro $n = 1$ rozdělte do skupinek o $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ členech, pro $n = 2$ uvažte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. 3) Využijte 1) a $x = \frac{1}{2}$. 4) Využijte 2) a $n = 2$.
Hint 7. Začněte nalezením konvergující podposloupností: zvolte dobrou posloupnost (ε_n), aby jste se dostali ke konvergující řadě rozdílů.
Hint 8. Sporem, ukažte, že řada větší než harmonická konverguje.
Hint 9. $\frac{a_1+a_2+\ldots a_{n-1}}{a_n}$ klesá.
Hint 10. Zaměřte se na rozdíly následujících členů posloupnosti x_n získané z $\binom{x_n}{2} = a\binom{n}{2} + b$.
Hint 11. Vydělte g polynomem f a zaměřte se na podíl zbýtku a f.
Hint 12. Definujte rozumnou posloupnost celých čísel (x_n). Získejte konvergující posloupnost celých čísel z $x_n - a\sqrt{n}$, kde a je vedoucí koeficient f.
Hint 13. Sporem, využijte, že harmonická řada diverguje, takže musí i každá větší.
Hint 14. Zaměřte se na n prvočísla, aby se soudělnost změnila na dělitelnost.
Hint 15. Diskriminant $r(z) - p(a) + q(b)$ pro proměnou z společně s úlohou 6 pomůže.
Hint 16. Klasická vlastnost polynomů s celočíselnými koeficienty. Není třeba používat konvergující posloupnosti, stačí klesající.
Hint 17. Pro rozumnou posloupnost celých čísel (x_n) se zaměřte na limity sestávající z x_n a x_{n+k}, kde k je stupeň f. Nakonec použijte základní větu algebry.
Hint 18. Rozdíl odmocnin konverguje.
Hint 19. Nejdříve dokažte, že největší prvek A je k-tou mocninou největšího prvku B pomocí vhodné volby podílů součtů mocnin prvků jedné z množin a spojitosti logaritmu. Pak najděte vztah mezi m a n.
Hint 20. Najděte dobrou posloupnost v případě $b = a$ a $b = a^2$. Pokračujte z dalšími mocninami (posloupnosti vypadají celkem ošklivě, ale to nevadí :D), dokud nedostane první (po čase) nulovou posloupnost. Nakonec dokažte ab.
Hint 21. Číslo ze samých jedniček $= \frac{10^k-1}{9}$ a spojitost logaritmu.
Hint 22. Sporem, indukcí ukažte, že vhodná řada konverguje.
Hint 23. Vyřešili jste úlohu 17?
Hint 24. Vyřešili jste úlohu 20? Tentokrát se hodí využít, že jediný násobek 2^k menší než 2^{k+1} je 2^k. K nalezení a, b mějte přehled, jaké jsou limity vašich posloupností.
Hint 25. Nejdříve ukažte, že součet prvočísel menších n je menší než 4^{n-1}. Využijte úlohy 3.

P-adické hodnoty a Lifting The Exponent Lemma

Ákos Záhorský

Abstrakt. Pri dokazovaní deliteľnosti aj rovností sa nám hodí vedieť, jak moc jedno číslo delí to druhé. K určení tohoto nám slúži p-adická hodnota alebo p-valuácia čísla. Na prednáške sa podívame na niektoré vety a tvrdení, ktoré nám počítanie s p-valuáciami uľahčujú.

Definícia. $v_p(n) = k \iff p^k \mid\mid n$ ak $p^k \mid n$ a $p^{k+1} \nmid n$.

Tvrdenie. Rozmyslite si:

- $v_p(a \pm b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ a pre $v_p(a) \neq v_p(b)$ nastáva rovnosť.
- $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.
- ak $a \mid b$, tak $\forall p : v_p(a) \leq v_p(b)$.
- $v_p(\gcd(a_1, \ldots, a_n)) = \min\{v_p(a_1, \ldots, v_p(a_n))\}$.
- $v_p(\text{lcm}(a_1, \ldots, a_n)) = \max\{v_p(a_1, \ldots, v_p(a_n))\}$.

Lema. Nech máme x, y celé čísla, n prirodzené číslo a prvočíslo p také, že $\gcd(n, p) = 1$, $p \mid x - y$, $p \nmid x$, $p \nmid y$. Potom

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y).$$

A ďalej pre nepárne n a $p \mid x + y$ namiesto $p \mid x - y$ platí

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y).$$

Lema (Lifting The Exponent). Nech je $p > 2$ prvočíslo a x, y celé čísla také, že $p \mid x - y$ a $p \nmid x$, $p \nmid y$. Potom

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

A tiež pre nepárne n a $p \mid x + y$ namiesto $p \mid x - y$ platí

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n).$$

Lema (čo s dvojkou?). Nech x, y sú nepárne čísla také, že $4 \mid x - y$ a n prirodzené, potom

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n).$$

A pre $2 \mid x - y$ máme

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1.$$

Tvrdenie (Legendrova formula).

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Veta (Lagrange). Nech p je prvočíslo a $n = a_0p^k + a_1p^{k-1} \cdots + a_{k-1}p + a_k$ zápis čísla n v p-čkovom sústave. Potom

$$v_p(n!) = \frac{n - (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)}{p-1}.$$

Veta (Kummer). p-adická hodnota $\binom{n}{m}$ sa rovná počtu prenosov pri sčitaní čisla m a $n-m$ v p-čkovom sústave.

Veta. Nech p je prvočíslo, potom počet binomických koeficientov $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n}$ je

$$n + 1 - (n_0 + 1)(n_1 + 1) \cdots (n_k + 1).$$

kde $n_0, \cdots, n_k$ sú cifry n v p-čkovom sústave.

Tvrdenie.

$$v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor.$$

Ukážkové úlohy

Ukážka. Najdime Všetky prirodzené riešenie rovnice

a) $n! = 2^a + 2^b$.
b) $n! = 2^a - 2^b$.

(KöMaL B.4830,B.4839)

Ukážka. Určte všetky trojice prirodzených čisel (a, b, c) takých, že $ab - c$, $bc - a$, $ca - b$ sú celočíselné mocniny 2. (IMO 2015/2)

Ukážka. Nech $a_1, a_2, \cdots$ je nekonečná postupnosť prirodzených čísel. Predpokladajme, že existuje celé číslo $N > 1$ také, že

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

je celé pre všetky $n \geq N$, tak existuje M, že $a_m = a_{m+1}$ pre všetky $m \geq M$.

(IMO 2018/5)

Na rozhrievanie

- Dokáž $2^n \nmid n!$ a všeobecne pre prvočislo p platí $p^n \nmid ((p-1)n)!$.
- Nájdi všetky n také, že $2^{n-1} \mid n!$.
- Dokáž, že existuje nekonečne veľa prirodzených m takých, že $m - v_2(m!) = 2015$.
- Dokáž: $n + 1 \mid \binom{2n}{n}$.
- Nájdi všetky n pre ktoré $\binom{2n}{n}$ je párne, ale nedeliteľné 4.
- Dokáž, že počet nepárnych čísel v Pascalovom trojuholníku v každom riadku je mocnina dvojky. Nájdi všetky čisla n, pre ktoré $n!$ konči práve na 2015 núl.

Úlohy

Úloha 1. Dokáž, že keď sú a, n prirodzené a p je nepárne prvočíslo také, že $a^p \equiv 1 \pmod{p^n}$, tak $a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$. (Unesco competition)

Úloha 2. Nech $P_n = (19+92)(19^2+92^2)\cdots(19^n+92^n)$. Existuje m, že $33^{33} \mid P_m$?

Úloha 3. Pre prirodzené čísla a, b, c ukáž, že ak $c \mid a^c - b^c$, tak $c \mid \frac{a^c-b^c}{a-b}$.

Úloha 4. Dokáž pre n prirodzené identitu:

$$(n+1)\,\mathrm{lcm}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}\right) = \mathrm{lcm}(1, 2, \dots, n+1)$$

Úloha 5. Dokáž, že pre všetky nezáporné n, m je $\frac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$ celé číslo.

Úloha 6. Dokáž, že existuja konštanta c taká, že keď pre prirodzené čísla a, b, n platí $a! \cdot b! \mid n!$, potom $a + b < n + c \cdot \log(n)$

Úloha 7. Pre prvočíslo p a prirodzené n dokáž, že súčin

$$\frac{1}{p^{n^2}} \prod_{\substack{i=1 \\ 2\nmid i}}^{2n-1} \left(((p-1)i)!\binom{p^2 i}{pi}\right)$$

je celé čislo nedelitelné s p.

Úloha 8. Dokáž, že pre prirodzené a, b, c, d spĺňajúce $ab = cd$ platí

$$\gcd(a, c) \cdot \gcd(a, d) = a \cdot \gcd(a, b, c, d).$$

(Poľská MO)

Úloha 9. Nech p je prvočíslo a a prirodzené, nájdi všetky n také, že $2^p + 3^p = a^n$ (Irská MO)

Úloha 10. Nájdi všetky riešenie rovnice $(n-1)! + 1 = n^m$ na množine prirodzeních čísel.

Úloha 11. Nájdi všetky n, pre ktoré platí $2^n \mid 3^n - 1$

Úloha 12. Nech sú n, q prirodzené čísla také, že všetky netriviálne deliťele q sú väčšie ako n. Dokáž, že

$$(q-1) \cdot (q-1) \cdots (q^{n-1} - 1) \equiv 0 \pmod{n!}.$$

(Rumunská výberovka)

Úloha 13. Dokáž, že pre všetky n platí $n! \mid \prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k)$.

Úloha 14. Nech p je prvočíslo, nájdi všetky n, pre ktoré p nedelí $\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
(Luxemburská MO)

Úloha 15. Dokáž, že pro žiadne $n > 1$ neplatí $n \mid 2^{n-1} + 1$

Úloha 16. Najdi všetky a, n také, že $4(a^n + 1)$ je tretia mocnina.

Úloha 17. Nájdi všetky prirodzené n, pre ktoré existujú prirodzené x, y také, že $\gcd(x, y) = 1$, $k > 1$ a $3^n = x^k + y^k$. (Ruská MO)

Úloha 18. Nech $m > 1$ a n splňuje $n \mid a^m - 1$ pre všetky a nesúdeliteľné s n. Dokáž, že $n \leq 4m(2^m - 1)$ a nájdi všetky prípady rovnosti. (Rumunské výberko)

Úloha 19. Dokáž pre n prirodzené a a, b celé

$$n! \mid a(a+b)(a+2b)\cdots(a+(n-1)b)b^{n-1}$$

. (IMO ShortList)

Úloha 20. Nájdi všetky prirodzené n, pre ktoré je $\frac{2^n+1}{n^2}$ celé číslo.

Úloha 21. Existuje také n prirodzené, že n má presne 2000 prvočíselných delitelov a $n \mid 2^n + 1$ (IMO 2000)

Úloha 22. Nech $0 < a_1 < \cdots < a_n$ sú celé. Nájdi najväčšie m, pre ktoré existujú čísla $0 < b_1 < \cdots < b_m$ také, že splňujú

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{a_k} = \sum_{k=1}^{m} b_k$$

a zároveň

$$\prod_{k=1}^{n} (2^{a_k})! = \prod_{k=1}^{m} b_k!.$$

Úloha 23. Dokáž, že pre každé $n > 5$ platí, že $n!$ je deliteľné počtom svojich deliteľov. (Erdös Pál)

Úloha 24. Nájdi všetky prirodzené riešenia pre x, y, z rovnice $x^{2009} + y^{2009} = 7^z$.

Úloha 25. Rozhodni, či je pravda: Ako a je kladné celé číslo väčšie ako 1, tak $v_p(a^{q-1} - 1) = 1$ pre nekonečne vela q.

Je to pravdepodobne otvorený problém. (V 2015 to bol.)

Úloha 26. $m_0, m_1, \ldots, m_r$ a $n_0, n_1, \ldots, n_r$ sú cifry m respektíve n v zápisu v p-čkovom sústave. Dokáž

$$\binom{n}{m} = \prod_{i=0}^{r} \binom{n_i}{m_i} \pmod{p}.$$

(Lucas 1878)

Pár IMO srandiek pre nudiacich

Úloha 27. Nájdi najväčšiu mocninu 1991, ktorý delí

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$

(IMO ShortList 1991)

Úloha 28. Nech sú x, y, p, n, k prirodzené, že n je nepáne a p je nepárne prvočislo. Potom ak $x^n + y^n = p^k$, tak n je mocninou p. (Rusko 1996)

Úloha 29. Nech je p prvočíslo a $m > 1$ prirodzené. Ukáž, že ak pre nejaké $x, y > 1$ máme

$$\frac{x^p + y^p}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^m$$

tak $m = p$. (Balkan 1993)

Úloha 30. Nech je $p \neq 3$ prvočíslo, a celé čísla a, b také, že $p \mid a + b$ a $p^2 \mid a^3 + b^3$. Ukáž, že $p^2 \mid a + b$ alebo $p^3 \mid a^3 + b^3$. (Romanian Junior Balkan TST)

Literatura a zdroje

[1] Kuba Svoboda: p-valuace (iKS 2015, Kunžak)
[2] Amir Hossein Parvadi: Lifting the exponent lemma

Hinty

Hint 1. Pre nepárne prvočísla ide LTE dosť ľahko použiť... Ďalej $1 = 1^k$.
Hint 2. Proste na to hoď LTE a bude to.
Hint 3. Rozdeľ úlohu na dva prípady: $c \mid a - b$ a ten druhý.
Hint 4. Použitie Kummera ti pomôže.
Hint 5. Skús na to hodiť Lagrangea.
Hint 6. V prirodzených je dvojkový logaritmus prirodzenejšie, ako prirodzený.
Hint 7. Proste spočítaj v_p.
Hint 8. Proste evaluácia a rozoberanie prípadov.
Hint 9. $n = 1$.
Hint 10. No, zaujímavé, že každé p^α, ktoré delí n, delí ľavú stranu práve m-krát.
Hint 11. Priamočiaré použitie LTE!
Hint 12. Malý Fermat, trochu odhadovania.
Hint 13. Vezmi všetky $p \leq n$, pre ne spočítaj v_p oboch strán.
Hint 14. Vyskúšaj pre dvojku a odvoď niečo.
Hint 15. Rozlož na prvočísla a dívaj sa $v_2(p-1)$.
Hint 16. $a = 1$ je jediné.
Hint 17. $x + y = 3^m$.
Hint 18. Fermatove čísla 2^{2^n}.
Hint 20. Je to iba trojka.
Hint 21. Nájdi si pekné číslo s jedným prvočíselným deliteľom. Vytvor z toho číslo s viac deliteľmi.
Hint 22. $m \leq n$
Hint 23. Chceme si nejak dobre vyjadriť počet deliteľov. s tým by nám mohol pomôcť Lagrange... a pre každé prvočislo je to menšie, ako niečo.
Hint 24. Čo tak spočítať v_7?
Hint 26. Ak sa vám už nechce robiť teórie čísel, hoďte na to generujúci funkce. Ináč $(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p$.

Obsah