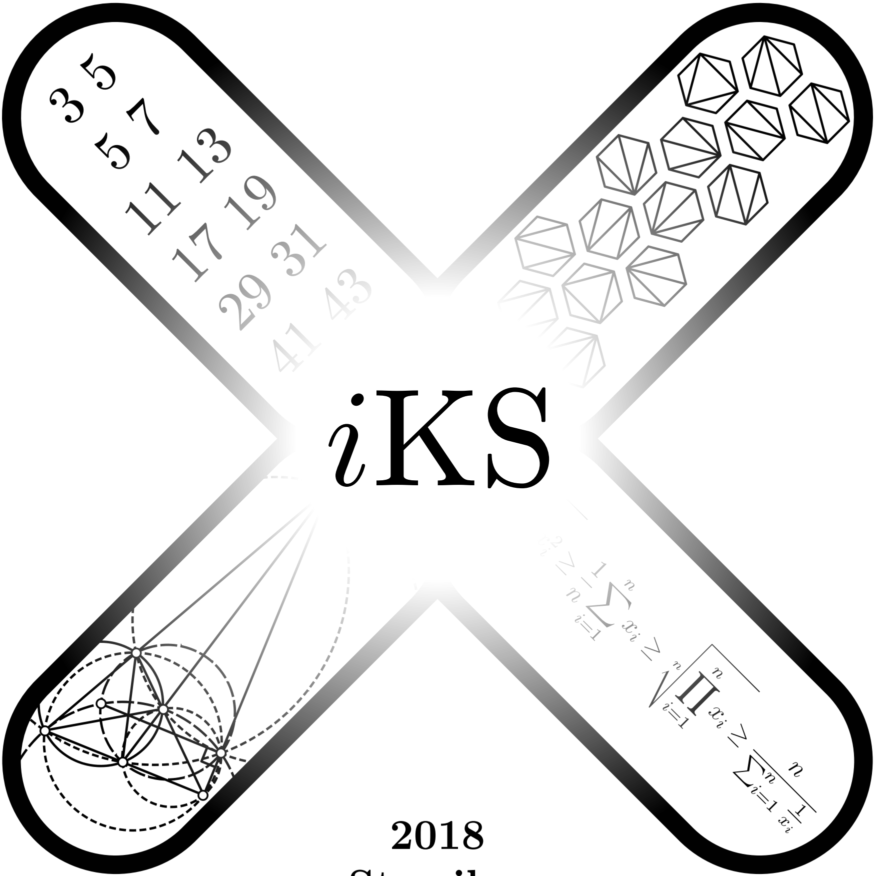

iKS

2018
Strmilov

Filip Bialas
Verča Hladíková
Jakub Löwit
Vašek Rozhoň
Štěpán Šimsa
Rado van Švarc
Martin „Vodka“ Vodička
Vašek Voráček

V jedné obci na náměstí,
čeká všechny velké štěstí.
Rodince se zakrátko,
zrodí *i*KS-té dětátko.

Ptá se Rado otce děcka:
"Poslyš, to je vážně pecka,
však co je Tvá taktika,
aby mu šla matika?"

"Neboj Rado, je to v cajku,
mlád převezme IMO vlajku.
Získá totiž jméno borce,
Pedra, nebo Pavla Hudce!"

Diofantovské rovnice

Filip Bialas

Abstrakt. Příspěvek shrnuje základní metody řešení diofantických rovnic a částečně se dotýká pokročilejších metod, využívajících některých poznatků z algebry. Obsahuje také 29 poměrně obtížných úloh.

Diofantovská rovnice je rovnice, kterou řešíme v přirozených, celých (nebo racionálních) číslech. Obecně je řešení Diofantovských rovnic velmi obtížné a neexistuje na ně žádná univerzální metoda, proto jsou také častým a oblíbeným tématem na matematických soutěžích. Pro jejich řešení je třeba mít dobrý všeobecný přehled v teorii čísel.

Rozklady

První užitečnou metodou je rozklad na součin. Často se hodí vtipné algebraické úpravy.

Úloha 1. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$. (IMO 2006)

Úloha 2. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$. (Titu Andreescu)

Úloha 3. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$. (Titu Andreescu)

Nerovnosti

Tvrzení. [Sevření mocninami] Nech» a a n jsou přirozená, $n \geq 2$. Pak neexistuje $b \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a^n < b^n < (a + 1)^n.$$

Úloha 4. V $\mathbb{N}$ řeš rovnici $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$. (MO 59–A–II–1)

Úloha 5. V $\mathbb{N}$ řeš rovnici $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z - 1) + 2y(z + 1) = w^2$.

Občas je prostě „pravá strana větší než levá“.

Úloha 6. V $\mathbb{Z}$ řeš $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Úloha 7. V $\mathbb{N}$ řeš

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2.$$

Úloha 8. Najdi všechna přirozená n a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ taková, že

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 5n - 4,$$

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Parametrizace

Úloha 9. Dokaž, že rovnice $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{Z}$. (Turnaj měst)

Úloha 10. Dokaž, že rovnice $2^x+1=xy$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{N}$.

Počítání modulo

Úloha 11. Najdi všechny dvojice p,q prvočísel, která splňují $p^5-q^3=(p+q)^2$. (Ruská MO)

Úloha 12. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $x^5-y^2=4$. (Balkánská MO)

Nekonečný sestup

Tvrzení. Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.

Hodí se, když chceme dokázat, že rovnice nemá řešení. Pokud by nějaké měla, zkonstruujeme menší řešení, čímž dostaneme klesající posloupnost přirozených čísel.

Úloha 13. Řeš v $\mathbb{N}_0$ rovnici $x^3+2y^3=4z^3$.

Úloha 14. Řeš v $\mathbb{N}_0$ rovnici $2^x-1=xy$. (variace na Putnam)

Úloha 15. Najdi minimální hodnotu výrazu m^2+n^2, kde m, n jsou přirozená čísla větší nebo rovna 1981 splňující $(n^2-mn-m^2)^2=1$. (IMO 1981)

Indukce

Poněkud překvapivě může být užitečná i indukce.

Úloha 16. Dokaž, že pro každé $n\geq 3$ má rovnice $7x^2+y^2=2^n$ řešení v $\mathbb{N}$. (Bulharská MO)

Úloha 17. Dokaž, že pro každé přirozené n má rovnice $x^2+y^2+z^2=59^n$ řešení v $\mathbb{N}$. (Dorin Andrica)

Úloha 18. Dokaž, že pro každá přirozená k a n má rovnice

$$1+\frac{2^k-1}{n}=(1+1/m_1)(1+1/m_2)\cdots(1+1/m_k)$$

nějaké řešení $m_1,m_2,\ldots,m_k\in\mathbb{N}$. (IMO 2013)

Dělitele

Tvrzení. Pokud prvočíslo p dělí a^2+b^2, kde a,b jsou nesoudělná, pak $p=4k+1$. Pokud $p=4k+3$ a $p\mid a^2+b^2$, pak $p\mid a$ a $p\mid b$.

Úloha 19. V $\mathbb{N}$ řeš rovnici $x^n+2^{n-1}=y^2$.

Úloha 20. V $\mathbb{Z}$ řeš rovnici $x^3-x^2+8=y^2$.

Úloha 21. V $\mathbb{N}$ řeš rovnici $n^7+7=k^2$. (Titu Andreescu)

Trocha algebry

Pokud vyčerpáme standardní metody, můžeme rozšířit celá čísla o další prvky, čímž dostaneme větší svět, ve kterém se úloha snadno vzdá. Tato rozšíření ovšem často postrádají některé pěkné vlastnosti celých čísel, jako je třeba jednoznačný rozklad na prvočísla.

Definice. Nechť α je algebraické číslo (tj. je kořenem nějakého polynomu s koeficienty v $\mathbb{Z}$). Výrazem $\mathbb{Z}[\alpha]$ myslíme množinu všech dvojic $a + b\alpha$, kde a, b jsou celá čísla. Spolu se sčítáním a násobením tvoří tato množina okruh (tj. součet, rozdíl a součin prvků ze $\mathbb{Z}[\alpha]$ opět leží v $\mathbb{Z}[\alpha]$). Množinám $\mathbb{Z}[\alpha]$ říkáme *číselné obory.*

Například $\mathbb{Z}[i]$ jsou tzv. *Gaussova celá čísla.*

V číselných oborech definujeme dělitelnost jako v celých číslech: $a \mid b$, pokud existuje c takové, že $b = ac$.

Definice. Jednotka v oboru K je prvek x, pro nějž existuje $y \in K$ tak, že $xy = 1$. Prvočíslo je takový prvek p z K, který není jednotka a pro který z $p \mid ab$ plyne $p \mid a$ nebo $p \mid b$. Je jasné, jak se definuje například nesoudělnost.

Definice. Obor K se nazývá Eukleidovský, pokud v něm lze dělit se zbytkem, tj. pro každé dva prvky a, b z K, $b \neq 0$ existují p, q z K tak, že $q < |b|$ a $a = bp + q$. Obor K je Gaussovský neboli UFD (unique factorization domain), pokud lze každé číslo zapsat jednoznačně jako součin prvočísel (až na jednotky a pořadí).

Věta. Každý Eukleidovský obor je UFD. Opačná implikace nemusí platit (a často neplatí).

Například $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ není UFD: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$, tedy ani Eukleidovský.

Věta. Nech» a, b, c jsou prvky oboru K, který je UFD. Pokud jsou a, b nesoudělná a platí $ab = c^n$ pro $n \geq 2$, pak $a = \epsilon x^n$, $b = \eta y^n$, kde ϵ, η jsou jednotky a x, y jsou prvky K.

Úloha 22. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $x^2 = y^3 - 2$ (Fermat)

Další úlohy

Rovnicím typu $x^2 = y^3 + k$, kde k je pevné celé číslo, se říká *Mordellovy rovnice.* Dá se dokázat, že vyjma případu, kdy $k = 0$, mají pouze konečně mnoho řešení. Jejich řešení bývají pro různá k velmi rozmanitá.

Úloha 23. Řeš v $\mathbb{N}$ Mordellovu rovnici pro $k = 7, -5, -6, 46, -1, -4 \ldots$

Úloha 24. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$.

Úloha 25. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $a^{b^2} = b^a$. (IMO 1997)

Úloha 26. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $n! + 1 = (m! - 1)^2$.

Úloha 27. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $xy + \frac{x^3+y^3}{3} = 2007$. (Titu Andreescu)

Úloha 28. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $x^3 - y^3 = xy + 61$. (Ruská MO)

Úloha 29. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $2^x + 1 = x^2 y$. (variace na IMO 1990)

Úloha 30. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $4xy - x - y = z^2$. (Euler)

Úloha 31. Najdi všechny dvojice prvočísel p, q, které splňují rovnici $2^p = q^q + q + 2$.

Úloha 32. Dokaž, že rovnice $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ má nekonečně mnoho řešení. (Titu Andreescu)

Úloha 33. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $x^4 = 4 + y^2 + z^2$. (Problems from the Book)

Úloha 34. V $\mathbb{Z}$ řeš rovnici $(x^2 - 2)^2 - 2 = y^2$.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je kopií příspěvku Pepy Svobody z roku 2015 s pouze pár přidanými příklady a tímto mu děkuji.

[1] Pepa Svoboda, *Diofantovské rovnice*, *i*KS sborníček 2015
[2] Titu Andreescu, *Problems from the Book*
[3] Amir Hossein Parvardi, 50 *Diophantine Equation Problems*

Hinty

Hint 1. Odečti jedničku. Čísla y a $y-1$ jsou nesoudělná.
Hint 2. Vyrob si více výrazů $1-xy$ a $x-y$ a uprav na čtverec.
Hint 3. Pravou stranu uprav na čtverec, poté použij $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.
Hint 4. Použij tvrzení pro $n = 2$.
Hint 5. Sevřením mezi čtverci dostaneš, že pravá strana je rovna $(x+y+z)^2$.
Hint 6. Uprav na součet čtverců.
Hint 7. Uspořádej proměnné podle velikosti a odhaduj.
Hint 8. Cauchy-Schwarzova nerovnost.
Hint 9. Drze zvol $z = -y$.
Hint 10. Platí $3^k \mid 2^{3^k} + 1$.
Hint 11. Vymodul rovnici třemi.
Hint 12. Vymodul rovnici jedenácti.
Hint 13. Všechna čísla jsou sudá.
Hint 14. Použij nekonečný sestup na prvočíselné dělitele x.
Hint 15. Uprav čtverec na $(m^2 - m(n-m) - (n-m)^2)^2$. Pak si vzpomeň na Fibonacciho čísla.
Hint 16. Obyčejnou indukcí sestroj z řešení pro n řešení pro $n+1$.
Hint 17. Pro $n = 1, 2$ najdi řešení. Dál postupuj indukcí.
Hint 18. Použij rafinovanější indukci.
Hint 19. Přičti 2^{n-1} a zkoumej dělitele tvaru $4k+3$.
Hint 20. Přičti x^2 a rozlož!
Hint 21. Přičti 121.
Hint 22. Obor $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ je Eukleidovský, tedy UFD. Použij větu.
Hint 23. V prvních čtyřech případech stačí přičíst vhodnou konstantu a rozložit. Pro -1 a -4 se vyplatí pracovat v $\mathbb{Z}[i]$.
Hint 24. Vhodná je substituce $u = x+1$, $v = y+1$. Dej k sobě výrazy uv a $u+v$ a rozlož na součin.
Hint 25. Rozmysli si, že $a|b$ nebo $b|a$, a pak nějak dořeš.
Hint 26. Odečti jedničku a pak si uvědom, že pravá strana bude nějak větší.
Hint 27. Vyrob si $(x+y)^3$, odečti 1 a poté rozlož.
Hint 28. Levá strana je typicky větší než pravá.
Hint 29. Zapiš x jako $3^k l$, kde l není násobkem tří.
Hint 30. Vynásob čtyřmi a uprav. Použij dělitele tvaru $4k+3$.
Hint 31. Odečti dvojku, rozlož a uvědom si, že jsou prvočísla často lichá.
Hint 32. Uprav na tvar $-1 = (2x+1)^2 - 2y^2$, což je Pellova rovnice, takže stačí najít jedno řešení a pak už jich je nekonečně mnoho.
Hint 33. Odečti čtyři, rozlož a koukej na dělitele tvaru $4k+3$.
Hint 34. Zatni zuby a vymysli si vlastní metodu.

Mocnost bodu ke kružnici

Verča Hladíková

Abstrakt. Příspěvek shrnuje nejdůležitější fakta o mocnosti bodu ke kružnici. Také obsahuje přes 50 úloh roztřízených zhruba podle toho, jak je v nich mocnost použitá.

Teorie

Definice (Mocnost bodu ke kružnici). Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r. Mocností bodu M ke kružnici k rozumíme číslo

$$p(M,k) = |MO|^2 - r^2.$$

Nechť M je bod a $k(O;r)$ kružnice.

1) Číslo $p(M,k)$ je nulové právě tehdy, když bod M leží na kružnici k. Číslo $p(M,k)$ je kladné/záporné právě tehdy, když M leží vně/uvnitř kružnice k.
2) Buď N další bod. Je-li $p(M,k) = p(N,k)$, pak $|MO| = |NO|$.
3) Pokud M leží vně k, označme T ten bod kružnice k, pro který je přímka MT ke kružnici k tečnou. Pak platí $p(M,k) = |MT|^2$.
4) (zásadní!) Nechť přímka p vedená bodem M protne k v bodech A, B. Pak $|MA| \cdot |MB| = p(M,k)$.

Tvrzení (Popis tětivových čtyřúhelníků). Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a $Q = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|QA| \cdot |QD| = |QB| \cdot |QC|$.

Definice. Nechť k, l jsou kružnice. Množinu bodů X splňujících $p(X,k) = p(X,l)$ nazýváme chordálou kružnic k, l.

Tvrzení. Chordála dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.

Úloha 1. Kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l, která se jich dotýká v bodech T, U, v bodě P. Pak $|PT| = |PU|$.

Následující lemma často umožňuje dokazovat, že nějaké čtyři body leží na kružnici, místo toho, že nějaké tři přímky procházejí jedním bodem (a naopak).

Tvrzení (Radikální lemma). Na nesoustředných kružnicích k a l jsou dány po řadě body K_1, K_2 a L_1, L_2. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) Body K_1, K_2, L_1, L_2 leží na jedné kružnici.
2) Přímky K_1K_2 a L_1L_2 se protínají na chordále kružnic k a l (nebo jsou s ní obě rovnoběžné).

Úloha 2. Na přímce p leží body A, B, C, D v tomto pořadí. Kružnice nad průměry AC, BD se protnou v X, Y. Na přímce XY zvolíme bod P ($P \notin BC$). Přímka CP protne kružnici nad AC podruhé v bodě M, přímka BP kružnici nad BD v bodě N. Ukažte, že přímky AM, DN, XY procházejí jedním bodem. (IMO 1995)

Tvrzení (Potenční střed). Uvažme tři kružnice ω_1, ω_2, ω_3. Pak jejich vzájemné chordály procházejí jedním bodem (nebo jsou všechny rovnoběžné). Tomuto bodu se říká potenční střed kružnic ω_1, ω_2, ω_3.

Tvrzení (Další množiny). Uvažme dvě nesoustředné kružnice ω_1, ω_2 se středy O_1, O_2. Pak množina bodů X, pro které je

1) rozdíl $p(X, \omega_1) - p(X, \omega_2)$ konstantní, je přímka kolmá na O_1O_2.
2) součet $p(X, \omega_1) + p(X, \omega_2)$ konstantní, je kružnice se středem ve středu O_1O_2.
3) podíl $p(X, \omega_1) : p(X, \omega_2)$ konstantní, je kružnice se středem na O_1O_2.

Úloha 3. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB, BC, CA v bodech F, D, E. Označme písmeny Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, M středy úseček FB, BD, DC, CE, BC. Konečně buď $X = Y_1Y_2 \cap Z_1Z_2$. Dokažte, že $XM \perp BC$.

Na rozjezd

Úloha 4. Jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l. Zkonstruujeme jejich čtyři společné tečny a na každé vyznačíme střed úsečky určené příslušnými body dotyku. Dokažte, že tyto čtyři středy leží na přímce.

Úloha 5. Je dána půlkružnice τ s průměrem AB. Body P, Q jsou dány na úsečce AB tak, že $AP = BQ$. Rovnoběžné polopřímky vycházející z P a Q protnou τ postupně v X a Y. Dokažte, že součin $PX \cdot QY$ je pevný.

Úloha 6. Na kružnici ω jsou dány body A, B, které netvoří její průměr. Uvažme všechny dvojice kružnic ω_a, ω_b, které mají vnitřní dotyk s ω postupně v A, B a které mají navíc samy vnější dotyk. Dokažte, že vnitřní společná tečna kružnic ω_a, ω_b prochází pevným bodem.

Úloha 7. Je dán čtverec $ABCD$. Kružnice k skrz A a C protíná kružnici l skrz B a D v bodech P, Q. Dokažte, že střed čtverce $ABCD$ leží na PQ. Platí totéž pro obdélník? Kosočtverec? (Baltic Way 2010)

Úloha 8. Vně kružnice k jsou dány body A, B. Pohyblivá přímka skrz A protíná k v X, Y. Dokažte, že kružnice XYB procházejí pevným bodem různým od B (nebo se všechny dotýkají téže přímky).

Úloha 9. Přímky ramen AD, BC lichoběžníku $ABCD$ se protnou v E. Kružnice s průměry AC, BD se protnou v X a Y. Dokažte, že E leží na XY.

Úloha 10. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k. (MO 56–A–I–4)

Úloha 11. Po stranách AB, AC trojúhelníka ABC se pohybují postupně body L, K. Dokažte, že společná tětiva kružnic nad průměry BK a CL prochází pevným bodem.

Počítací

Úloha 12. Osa úhlu u vrcholu A protne protější stranu BC trojúhelníka ABC v D. Kružnice ADB protne AC podruhé v E, kružnice ADC protne AB podruhé v F. Dokažte, že $BF = CE$.

Úloha 13. Jsou dány neprotínající se kružnice k, l. Jedna vnější společná tečna se dotýká k v A, ta druhá se dotýká l v D. Dokažte, že úsečka AD vytne na k a l stejně dlouhé tětivy.

Úloha 14. Kružnice k se dotýká úsečky AB v jejím středu M. Označme N střed AM. Přímka skrz A protne k v C a D tak, že se osy úseček CN a BD protínají v bodě O na AB. Určete AO/OB. (USAMO 1998)

Úloha 15. Na straně AB obdélníka $ABCD$ splňujícího $AB = 2 \cdot BC$ je dán bod E. Označme P a Q paty kolmic z A na DE a z B na CE. Dokažte, že kružnice (PEQ) se dotýká strany CD. (Baltic Way 2003)

Úloha 16. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníka ABC s výškami BE a CF je dán bod P tak, že BP je tečna ke kružnici APF a CP je tečna ke kružnici APE. Dokažte, že $\angle BPC = 90°$. (ala MEMO 2011)

Úloha 17. Úhlopříčky lichoběžníka $ABCD$ se protínají v P. Kružnice (BCD) protne AP podruhé v A_1. Body B_1, C_1, D_1 definujeme podobně. Dokažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je rovněž lichoběžník. (Turnaj Měst 2008)

Úloha 18. Kružnice protne strany BC, CA, AB trojúhelníka ABC v bodech A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Ukažte, že přímky AA_1, BB_1, CC_1 procházejí jedním bodem právě tehdy, když přímky AA_2, BB_2, CC_2 procházejí jedním bodem.

Úloha 19. Kružnice ω protíná strany AB, BC, CD, DE, EA rovnostranného (ne nutně pravidelného) pětiúhelníka $ABCDE$ v bodech $A_1, A_2, \ldots, E_1, E_2$. Dokažte, že

$$AA_1 + BB_1 + \ldots + EE_1 = A_2B + B_2C + \ldots + E_2A.$$

Úloha 20. Trojúhelník ABC je vepsán do kružnice ω s poloměrem R. Kružnice A-připsaná se středem I_a protne ω v bodech D, E. Přímka I_aD protne ω podruhé v X. Dokažte, že $I_aX = 2R$.

Úloha 21. Na stranách AB, AC trojúhelníka ABC s nejkratší stranou BC najdeme body K, L tak, že $KB = BC = CL$. Dokažte, že KL je kolmá na OI, kde O a I jsou opsiště a vepsiště $\triangle ABC$.

Úloha 22. V trojúhelníku ABC protnou osy vnějších úhlů u vrcholů A, B, C protější strany postupně v bodech D, E, F. Dokažte, že body D, E, F leží na přímce kolmé na OI, kde O a I jsou opsiště a vepsiště $\triangle ABC$.

Středy úseček

Úloha 23. Tečny skrz A ke k se jí dotýkají v T a U. Buď M střed AT. Úsečka MU protne k podruhé v X. Dokažte, že $XA = 2 \cdot MX$.

Úloha 24. V trojúhelníku ABC s těžištěm G platí $\angle GAB = \angle GBC$. Dokažte, že $\angle GAC = \angle GCB$.

Úloha 25. Trojúhelník ABC ($AB < AC$) je vepsán do kružnice ω. Tečna k ω v A protne BC v D. Označme M střed AD a protněme MB podruhé s ω v X. Dokažte, že $\angle DXA = \angle AXC$.

Úloha 26. Na odvěsně AC pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou AB je dán bod D. Kružnice skrz D dotýkající se AB v A a kružnice skrz D dotýkající se AB v B se protnou v bodě E. Dokažte, že $\angle DEC = \angle BAC$.

Úloha 27. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme M, N středy AB, AC a D patu výšky z A. Kružnice opsané trojúhelníkům BND a CMD se protnou podruhé v E. Dokažte, že DE prochází středem MN. (ARO 2007)

Úloha 28. Na těžnici AM ostroúhlého trojúhelníka ABC je dán bod D. Kružnice k, l procházejí bodem D a dotýkají se přímky BC po řadě v bodech B, C. Strany AB, AC protnou kružnice k, l podruhé v P, Q. Ukažte, že tečna ke kružnici k vedená bodem P a tečna ke kružnici l vedená bodem Q se protínají na AM.

(Vietnam TST 2010)

Úloha 29. V ostroúhlém trojúhelníku ABC vepsaném do kružnice k označme M, N středy AB, AC, D patu A-výšky a G těžiště. Kružnice l prochází body M, N a dotýká se k v bodě $X \neq A$. Dokažte, že X, D, G leží v přímce. (ISL 2011, G4)

Radikální lemma

Úloha 30. Na straně BC trojúhelníka ABC s výškami BM, CN a kolmištěm H je dán bod W. Body X, Y jsou zvoleny tak, aby WX, WY byly průměry kružnic BWN, CWM. Dokažte, že body X, Y, H leží na přímce. (IMO 2013, 4)

Úloha 31. Je dán ostroúhlý trojúhelník s ortocentrem H. Kružnice se středem ve středu strany BC procházející bodem H protne BC v A_1, A_2. Body B_1, B_2, C_1, C_2 definujeme podobně. Dokažte, že těchto šest bodů leží na kružnici.

(IMO 2008, 1)

Úloha 32. V různostranném trojúhelníku ABC je $\alpha = 60°$. Označme O opsiště a I vepsiště. Dokažte, že BC, OI a osa úsečky AI procházejí jedním bodem.

(Polsko 2012)

Úloha 33. Osy úhlů u A, B protnou protější strany trojúhelníka ABC v D, E a samy sebe v I. Přímka DE protne kružnici opsanou v M a N. Dokažte, že MIN prochází středy kružnic B- a C-připsaných. (ala ARO 2006)

Úloha 34. Kružnice ω_1, ω_2 se středy O_1, O_2 se protínají v X a Y. Přímka skrz O_1 protne ω_2 v P a Q, přímka skrz O_2 protne ω_1 v R a S. Dokažte, že pokud P, Q, R, S leží na jedné kružnici, pak střed této kružnice leží na XY. (USAMO 2009)

Úloha 35. Kružnice procházející body B, C trojúhelníka ABC protne jeho strany AB, AC podruhé v C', B'. Dokažte, že přímky BB', CC', HH' procházejí jedním bodem, kde H, H' jsou kolmiště trojúhelníků ABC, $AB'C'$. (ISL 195 G7)

Úloha 36. Osy úhlů u A, B protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC podruhé v D, E a samy sebe v I. Přímka DE protne CA, CB postupně v F, G. Rovnoběžka s AD skrz F protne rovnoběžku s BE skrz G v P. Dokažte, že PI, AE a BD buď procházejí jedním bodem, nebo jsou navzájem rovnoběžné. (ala ISL 2011 G5)

Úloha 37. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme D patu výšky z bodu C. Nechť X je bod uvnitř úsečky CD. Označme K ten bod na úsečce AX, pro který $BK = BC$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX, pro který $AL = AC$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK. Ukažte, že $MK = ML$. (IMO 2012, 5)

Úloha 38. [Brianchonova věta] Šestiúhelníku $ABCDEF$ je vepsána kružnice. Dokažte, že AD, BE, CF procházejí jedním bodem.

Nulové kružnice

Úloha 39. Je dána kružnice k a bod A vně ní. Pro $X \in k$ označme Y průsečík osy AX a tečny k v X. Určete množinu Y.

Úloha 40. Je dán trojúhelník ABC s vepsištěm I. Kolmice na AI skrz I protne BC v A'. Podobně definujme B' a C'. Dokažte, že A', B', C' leží na přímce kolmé na OI, kde O je opsiště ABC.

Úloha 41. Je dána kružnice k a přímka p. Bod P probíhá p. Tečny z P ke k se jí dotýkají v T a U. Uvažme kružnici se středem P procházející body T, U. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí dvěma společnými body.

Úloha 42. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T. Bod A probíhá kružnici l. Na kružnici k najdeme body B, C, aby AB, AC byly tečny kružnice k. Přímky BT, CT protnou kružnici l podruhé v bodech D, E. Najděte množinu průsečíků přímek DE a tečen ke kružnici l v bodě A.

Úloha 43. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran AB, AC v bodech Z, Y. Zkonstruujme rovnoběžníky $BCYR$, $BCSZ$. Dokažte, že $GR = GS$, kde $G = BY \cap CZ$. (ISL 2009, G3)

Hezké úlohy

Úloha 44. Uvnitř úhlu AVB je dán bod P. Přímka skrz P protne VA, VB v X, Y. Zkonstruujte přímku, pro kterou je součin $PX \cdot PY$ minimální.

Úloha 45. Bod O uvnitř trojúhelníka ABC splňuje $\angle BOC = 90°$, $\angle OBA = \angle OAC$ a $\angle BAO = \angle OCB$. Určete AC/OC. (Moskva 2011)

Úloha 46. Na stranách AB, AC trojúhelníka ABC s opsištěm O jsou dány body Q, P. Označme K, L, M středy BP, CQ, PQ. Dokažte, že pokud se KLM dotýká PQ, pak $OP = OQ$. (IMO 2009, 2)

Úloha 47. Na stranách AB, AC trojúhelníka ABC jsou dány body P, Q tak, že $AP = AQ$. Na úsečce BC jsou dány body S, R tak, že B, S, R, C leží na přímce v tomto pořadí a platí současně $\angle BPS = \angle PRS$ a $\angle CQR = \angle QSR$. Dokažte, že P, Q, R, S leží na kružnici. (USAJMO 2012)

Úloha 48. Kružnice k, l se dotýkají v bodě T. Na k zvolíme bod K. Tečna k l vedená bodem K se jí dotýká v L. Dokažte, že poměr KT/KL nezávisí na volbě bodu K na k.

Úloha 49. Je dána přímka p, kružnice k, která ji neprotíná, a bod M. Uvažme všechny kružnice, které se dotýkají p a mají vnější dotyk s k. Označme odpovídající body dotyku P a K. Dokažte, že středy kružnic opsaných všem trojúhelníkům PKM leží na přímce. (MO 57–A–I–5)

Úloha 50. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme G těžiště. Bod P na polopřímce AG splňuje $\angle CPA = \angle CAB$, bod Q na polopřímce BG splňuje $\angle CQB = \angle ABC$. Dokažte, že kružnice AQC a BPG se protínají na AB. (Kanada 2013)

Těžší úlohy

Úloha 51. V trojúhelníku ABC s výškami AD, BE, CF označme $A' = BC \cap EF$ a podobně B' a C'. Dokažte, že A', B', C' leží na přímce kolmé na OH.

Úloha 52. Jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l. Jejich společné vnější tečny se protnou v H^+, společné vnitřní tečny v H^-. Na k zvolme bod K tak, že přímky KH^+, KH^- protnou l ve čtyřech bodech. Dokažte, že dva z nich tvoří průměr l a že přímka skrz zbylé dva prochází pevným bodem nezávislým na K.

Úloha 53. Je dán trojúhelník ABC splňující $\angle BAC = 30°$. Dokažte, že pokud X, Y leží na polopřímkách AC, BC tak, že $OX = BY$, kde O je opsiště ABC, pak osa úsečky XY prochází pevným bodem. (Bulharsko 2006)

Úloha 54. Jsou dány trojúhelníky PAB, PCD takové, že $PA = PB$, $PC = PD$ a trojice P, A, C a B, P, D leží na přímce v těchto pořadích. Libovolná kružnice skrz A a C se středem S_1 protne kružnici skrz B a D se středem S_2 v X a Y. Dokažte, že střed S_1S_2 je opsištěm PXY. (Japonsko 2012)

Úloha 55. Je dán $\triangle ABC$. Po přímce BC za bodem C se pohybuje X tak, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABX a ACX se protínají. Označme jejich průsečíky P, Q. Dokažte, že PQ prochází pevným bodem. (ISL 2004 G7)

Úloha 56. Jsou dány dvě kružnice k, l se středy K, L a tři přímky p, q, r neprocházející jedním bodem takové, že každá z nich vytíná stejně dlouhou tětivu na k jako na l. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami p, q, r prochází středem úsečky KL. (Turnaj Měst 2008)

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je kopií příspěvku ze sborníčku *i*KS 2014. Tímto děkuji jeho původnímu autorovi, Pepovi Tkadlecovi.

[1] Andreescu, Rolínek, Tkadlec: *106 Geometry Problems*, XYZ Press, 2013

[2] Andreescu, Rolínek, Tkadlec: *107 Geometry Problems*, XYZ Press, 2013

[3] Altschiller-Court: *College Geometry*, Dover, 2007

[4] Coxeter, Greitzer: *Geometry Revisited*, MMA, 1967

[5] Archiv soutěží na stránce *http://mathlinks.ro/resources.php*

Hinty

Hint 4. Bude to chordála.
Hint 5. Dokreslete celou kružnici.
Hint 6. Když se kružnice dotýkají, splývá chordála se společnou tečnou.
Hint 7. Měřte mocnost středu k oběma kružnicím. Alternativně je to jen radikální lemma.
Hint 8. Mocnost A k těmto kružnicím je pevná.
Hint 9. Dokažte, že E má k oběma kružnicím stejnou mocnost (přeneste součin pomocí rovnoběžky na jednu ze základen).
Hint 10. Ukažte, že druhý průsečík každé takové kružnice s AS je pevný.
Hint 11. Je to H.
Hint 12. Osa úhlu dělí protější stranu ve známém poměru.
Hint 13. Porovnejte mocnost A k l a mocnost D ke k.
Hint 14. Body B, C, D, N leží na kružnici.
Hint 15. Tipněte, kde se jí bude dotýkat. Změřte mocnost z C a D.
Hint 16. Ověřte Pythagorovu větu.
Hint 17. Vše se děje na AC a BD.
Hint 18. Zkombinujte mocnosti s Cevovou větou.
Hint 19. Sečtěte mocnosti vrcholů k ω.
Hint 20. Dokreslete osu úhlu u A a vyjádřete vše potřebné.
Hint 21. Rozdíl mocností.
Hint 22. Rozdíl mocností k opsané a I upravte na $b \cdot c - x^2$.
Hint 23. Najdi podobné trojúhelníky.
Hint 24. Interpretujte rovnost úhlů jako tečnost nějaké přímky k nějaké kružnici a využijte, že chordála půlí společnou tečnu (nebo dokreslete tětivový čtyřúhelník).
Hint 25. Buď dokreslete současně rovnoběžník a tětivový čtyřúhelník, nebo druhou kružnici ke společné tečně. Doúhlete.
Hint 26. Střed přepony je současně opsiště.
Hint 27. Měřte podél MN, trojúhelníky BMD a DNC jsou rovnoramenné.
Hint 28. Těžnice je chordála k a l, takže $BCQP$ je tětivový (mocnost z A). Hledaný průsečík označte X a dokažte, že trojúhelník PXQ je rovnoramenný (u P, Q znáte úhly).
Hint 29. Protněte tečny v A a X a posléze najděte tětivový čtyřúhelník.
Hint 30. Protněte BWN, CWM podruhé.
Hint 31. Nejdřív radikálním lemmatem dokažte, že na kružnici leží čtveřice B_1, B_2, C_1, C_2, podobně pro další dvě čtveřice. Mohlo by jít o tři různé kružnice?
Hint 32. Kde protne osa AI opsanou?
Hint 33. Dokazujte, že D a E leží na chordále kružnice opsané $\triangle ABC$ a kružnice skrz I a dvě připsiště.
Hint 34. Označte $PQ \cap RS$ a po chordále najděte ortocentrum, nebo opakovaně použijte definici mocnosti.
Hint 35. Dokreslete další dvě kružnice, aby byly přímky BB', CC', HH' jejich chordály.
Hint 36. Pro radikální lemma najděte dvě kružnice a ukažte, že $X = DE \cap PI$ k nim má stejnou mocnost.

Hint 37. Před použitím radikálního lemmatu dokreslete kružnice a protáhněte úsečky na přímky.
Hint 38. Dokreslete tři kružnice tak, aby byly AD, BE, CF jejich chordálami.
Hint 39. Uvažte A jako kružnici s nulovým poloměrem.
Hint 40. Uvažte I jako kružnici s nulovým poloměrem, nebo spočtěte rozdíl mocností k opsané a vepsané.
Hint 41. Přímka p je chordála k a nějakého bodu.
Hint 42. Dokažte, že DE je chordála k a bodu A.
Hint 43. Dokreslete A-připsanou.
Hint 44. Vepište do AVB vhodnou kružnici.
Hint 45. Dokreslete obraz C přes OB.
Hint 46. Nejdříve vyúhlete podobné trojúhelníky a přepiště poměry na součiny.
Hint 47. Kdyby se kružnice PRS a QRS lišily, co by byla jejich chordála?
Hint 48. Zkombinujte mocnost se stejnolehlostí.
Hint 49. Všimněte si, že přímka PK prochází pevným bodem.
Hint 50. Úhlové podmínky přeložte na tečnosti. Tipněte správný bod na AB.
Hint 51. Najděte dvě kružnice, ke kterým má A' stejnou mocnost.
Hint 52. Kombinací mocnosti a stejnolehlosti vyjádřete pevné poměry. Menelaus.
Hint 53. Ze symetrie – co to bude za bod? Dokreslete druhé průsečíky kružnic a přímek.
Hint 54. Součet mocností.
Hint 55. Osa úhlu, střední příčka a spojnice bodů dotyku procházejí jedním bodem.
Hint 56. Chordála, střední příčka a Simsonova přímka.

Lagrangeova interpolace

Jakub Löwit

Abstrakt. Dostaneme-li několik bodů, umíme nalézt polynom, který jimi přesně prochází? Jak vysoký stupeň takový polynom bude muset mít? A lze takové úvahy nějak rozumně využít při řešení olympiádních úloh? Na všechny tyto otázky se v příspěvku pokusíme odpovět.

Intro k interpolaci

Nejprve si ukážeme, jak zadanou $n+1$-ticí bodů provést polynom stupně nepřesahujícího n. Po zbytek přednášky pak budeme z této znalosti bohatě čerpat.

Věta. Ať $x_0, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ je $n+1$-tice po dvou různých reálných čísel, dále mějme libovnolná reálná čísla $y_0, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Pak existuje jednoznačně určený reálný polynom f stupně nejvýše n takový, že $f(x_i) = y_i$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$.

Důkaz: Definujme $f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Protože x_i byla po dvou různá, je f dobře definovaný reálný polynom proměnné x stupně nejvýše n.

Zbývá ukázat, že jako takový je f určen jednoznačně. Vezměme libovolný reálný polynom g, který prochází všemi $n+1$-danými body a má stupeň nejvýše n. Potom $h = f - g$ je opět reálný polynom stupně nejvýše n, přičemž $h(x_i) = y_i - y_i = 0$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. Pokud ale má reálný polynom v nějakém bodě x_i kořen, musí být dělitelný polynomem $x - x_i$. Polynom h má ale víc kořenů, než jaký má stupeň, tedy je to nulový polynom, odkud $f = g$. ∎

Definice. Polynom f z předchozího tvrzení nazýváme Lagrangeův interpolační polynom.

Na interpolační předpis můžeme nahlížet tak, že každý polynom stupně nejvýše $n+1$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci $n+1$ polynomů, které mají právě v jednom z bodů x_i hodnotu jedna a ve všech ostatních x_i se nulují.

Poznámka. Věta a Lagrangeově interpolaci neplatí pouze pro reálné polynomy, ale také pro polynomy nad $\mathbb{Z}_p$ pro libovolné prvočíslo p.

Důkaz poznámky je zcela analogický předešlému důkazu. Obecněji, věta o Lagrangeově interpolaci funguje pro libovolné těleso T. Nás ale stejně žádná jiná tělesa než ta výše uvedená zajímat nebudou.

Úloha 1. Ať $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ jsou po dvou různá a $c_0, c_1, \ldots, c_n \in R$ libovolná. Potom má soustava rovnic

$$
\begin{aligned}
a_0 + b_0 a_1 + b_0^2 a_2 + \ldots + b_0^n a_n &= c_0,\\
a_0 + b_1 a_1 + b_1^2 a_2 + \ldots + b_1^n a_n &= c_1,\\
&\vdots\\
a_0 + b_n a_1 + b_n^2 a_2 + \ldots + b_n^n a_n &= c_n.
\end{aligned}
$$

právě jedno řešení $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Lagrangeův interpolační polynom není šikovný pouze tím, že existuje. Jeho krása tkví v tom, že ho můžeme explicitně napsat. To je společně s jeho jednoznačností velmi silná zbraň.

Hodnoty v bodech

Začneme jednoduchými úlohami, jejich cílem je spočítat hodnotu polynomu zadaného svými hodnotami v nějakém dalším bodě.

Úloha 2. Reálný polynom f stupně $\deg f \leq n$ splňuje $f(i) = 2^i$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. Spočtěte $f(n+1)$.

Úloha 3. Ukažte, že polynom f z předchozí úlohy má stupeň přesně n.

Úloha 4. Reálný polynom f stupně $\deg f \leq n$ splňuje $f(k) = \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$. Spočtěte $f(n+1)$.

(IMO Shortlist 1981)

Úloha 5. Polynom f s celočíselnými koeficienty splňuje $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Ať p je takové prvočíslo, že $f(k)$ dává zbytek 0 nebo 1 modulo p pro libovolné $k \in N$. Dokažte, že f má stupeň alespoň $p - 1$.

(IMO Shortlist 1997)

Úloha 6. Ať $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou nezáporná celá čísla. Dokaže, že konstatní člen součinu

$$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i} \qquad \text{je roven} \qquad \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)!}{\prod_{i=1}^n a_i!}.$$

Na procvičení ještě dodáme dva další úplně přímočaré příklady, jejichž dopočtení však vyžaduje o trochu víc práce.

Úloha 7. Ať F_i značí i-té Fibonacciho číslo.[1] Ať polynom f stupně 990 splňuje $f(k) = F_k$ pro všechna $k = 992, 993, \ldots, 1982$. Dokažte, že $f(1983) = F_{1983} - 1$.

(IMO Shortlist 1983)

Úloha 8. Polynom $f(x)$ stupně $3n$ má hodnotu 0 v bodech $2, 5, 8, \ldots, 3n-1$, hodnotu 1 v bodech $1, 4, 7, \ldots, 3n-2$ a hodnotu 2 v bodech $0, 3, 6, \ldots, 3n$. Navíc platí $f(3n+1) = 730$. Nalezněte n.

(USAMO 1984)

[1] Tedy $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$.

Kombinatorika a koeficienty

Pro důkazy některých identit často stačí spočítat některý koeficient nějakého polynomu dvěma způsoby.

Úloha 9. Dokažte, že pro libovolná po dvou různá celá čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a pro libovolné přirozené k je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

celé číslo.

(Velká Británie)

Úloha 10. Jakých hodnot nabývá výraz z minulého příkladu pro přirozená $k = 0, 1, \dots, n-1$?

Úloha 11. Vyjádřete předešlý výraz jako polynom v proměnných a_i pro $k = n$ a pro $k = n+1$

Úloha 12. Vyjádřete předešlý výraz jako polynom v proměnných a_i pro libovolné $k \geq n$.

Úloha 13. Ať $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom. Pro libovolná reálná b, h dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(b+kh) = a_n n! h^n.$$

Poznamenejme, že v předchozí úloze může být klidně $a_n = 0$, používáme totiž pouze horní odhad na stupeň f. Nyní přijde sprška kombinatorických identit. Některé jsou důsledky elementárních kombinatorických principů, jiné zcela lehké nejsou. Každopádně si je však rozmyslete pomocí předchozí úlohy či jiné interpolace.

Úloha 14. Pro $p = 0, 1, \ldots n-1$ dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0.$$

Úloha 15. Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!.$$

Úloha 16. Ukažte rovnost

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Pro radost si můžete stejnýmzpůsobem spočítat podobné sumy i pro vyšší mocniny. Na závěr této sekce si zadáme jednu těžkou úlohu.

Úloha 17. Dokažte rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} (n-k)^n = n^n \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Polynomy a nerovnosti

Doteď jsme interpolaci používali k získávání rovností. Nyní se ji pokusíme aplikovat k důkazům různých nerovností s polynomy. Máme-li totiž nějakou podmínku na dostatek hodnot polynomu, Lagrangeova interpolace pak vynucuje nerovnosti v dalších bodech.

Úloha 18. Reálný polynom $f(x)$ stupně n splňuje na intervalu $[0,1]$ nerovnost $|f(x)| \leq 1$. Dokažte, že $|f(\frac{-1}{n})| \leq 2^{n+1} - 1$.

Úloha 19. Mějme reálný polynom $f = ax^2 + bx + c$, takový, že čísla $f(-1)$, $f(0)$ a $f(1)$ v absolutní hodnotě nepřesahují 1. Dokažte, že pro libovolné $x \in [-1,1]$ platí $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ a $|x^2 f(\frac{1}{x})| \leq 2$.

(Španělsko 1996)

Úloha 20. Je dáno reálné $a \geq 3$ a polynom p stupně n. Dokažte, že

$$\max_{i=0,1,\ldots,n+1} |a^i - p(i)| \geq 1.$$

(Indie 1998)

Úloha 21. Patrik si napsal reálný monický polynom stupně n, vyhodnotil jej v $n+1$ různých celočíselných bodech, vzal z nich absolutní hodnoty a vybral tu největší. Polynom i body volil tak, aby výsledná hodnota byla nejnižší možná. Kolik mu vyšlo?

(iKS-5-A3)

Nyní si ještě zadáme několik dalších příkladů, které s interpolací úzce souvisí. V nich se typicky hodí tipnout správné body, ve kterých interpolaci provedeme. Pro polynomy nízkých stupňů je takové tipování možné, pro vyšší stupně se k němu hodí znalost takzvaných Čebyševových polynomů. Jejich zkoumání se ale vyhneme.

Úloha 22. Nalezněte maximum výrazu $a^2 + b^2 + c^2$, je-li $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ pro libovolné $x \in [-1,1]$.

Úloha 23. Reálná čísla a, b, c, d splňují $|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leq 1$ pro všechna $x \in [-1,1]$. Ukažte, že $|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7$.

(IMO Shortlist 1996)

Úloha 24. Budiž $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ reálný polynom splňující $|p(x)| \leq 1$ na intervalu $[-1,1]$. Maximalizujte $|c|$ a určete, pro které polynomy se maxima nabývá.

Úloha 25. Mějme funkci $F = \max_{x\in[0,3]}|x^3 - ax^2 - bx - c|$. Nalezněte její minimum přes všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(Čína TST 2001)

Na závěr poznamenejme, že silnou zbraní na mnoho takových polynomiálních nerovností je Čebyševova věta, která říká, že monický reálný polynom f stupně n na intervalu $[-1, 1]$ splňuje $\max_{x\in[-1,1]}|f(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Tento odhad přitom obecně vylepšit nelze. Všimněte si, že například poslední z našich úloh je pak triviální. My se však touto větou důkladněji zabývat nebudeme.

Další stylovou aplikací Lagrangeovy interpoleční formule je její vypuštění na komplexní polynomy

Literatura a zdroje

Bohužel, kvalitních zdrojů příkladů na interpolaci moc není. Příspěvek proto vychází z následujících dvou knih.

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*
[2] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Straight from the Book*

Hinty

Hint 1. Interpretujte a_i jako koeficienty Lagrangeova polynomu.

Hint 2. Napište jej, s využitím vlastností kombinačních čísel vyjde $2^{n+1} - 1$.

Hint 3. Kdyby měl menší stupeň, musel by příslušnými body přesně procházet už ten předchozí polynom.

Hint 4. Postupujte jako minule, vyjde zbytek $n + 1$ po dělení dvěma.

Hint 5. Napište plný interpolační polynom v $\mathbb{Z}_p$ a ukažte, že má nenulový vedoucí koeficient.

Hint 6. Nejprve si všimněte, že onen zlomek v proměnných a_i je součtem podobných zlomků, kde je vždy jedno a_i zmenšeno o 1. Dokažte, že konstantní člen takových součinů splňuje tento rekurzivní vztah, pomůže interpolační rovnost $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i}(1 - \frac{x_i}{x_j})^{-1} = 1$.

Hint 7. Pomozte si třeba známým explicitním vyjádřením Fibonacciho čísel pomocí mocnění zlatého řezu.

Hint 8. Interpolace nám dává jednu podmínku. Nějak domlaťte, že funguje pouze $n = 4$.

Hint 9. Interpolujte polynom x^k. Je-li k moc velké, berte zbytek po dělení $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$.

Hint 10. Příslušný koeficient polynomu x^k je zřejmý: 0 pro $k \leq n - 2$ a 1 pro $k = n$.

Hint 11. Vyjde $\sum_{i=1}^{n} x_i$ a $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i\neq j} x_i x_j$.

Hint 12. Zase stejně.

Hint 13. Interpolujte f a sledujte vedoucí koeficient. Případ $h = 0$ řešte zvlášť.

Hint 14. Triviálně z předchozího.

Hint 15. Taktéž.

Hint 16. Vymodulte polynom x^{n+1} vhodným polynomem stupně n a interpolujte.

Hint 18. Přímočaře interpolujte v bodech tvaru $\frac{k}{n}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$.

Hint 19. Interpolujte a nahlédněte, že stačí řešit jedinou (extrémní) volbu interpolačních koeficientů.

Hint 20. Interpolujte obecně v prvních $n+1$ bodech. Ať se zvolí povolené hodnoty sebelíp, v $n + 1$ bude p moc malý.

Hint 21. Interpolujte v oněch bodech, vyvoďte důsledky z moničnosti polynomu. Vyjde $\frac{n!}{2^n}$.

Hint 22. Interpolujte v bodech $-1, 0, 1$ a vyjádřete $a^2 + b^2 + c^2$ pomocí interpolačních koeficientů.

Entropie a Jensenova nerovnost

Vašek Rozhoň

Abstrakt. Začneme tím, že si zopakujeme Jensenovu nerovnost a základy pravděpodobnosti. Pak si ukážeme, jak lze s pomocí pravděpodobnostních pojmů zadefinovat, co to je informace. Jakmile si definujeme entropii a s pomocí Jensenovy nerovnosti dokážeme několik jejích vlastností, budeme schopni elegantně řešit některé dost těžké kombinatorické úlohy.

Jensenova nerovnost

Začátek přednášky asi bude pro leckteré opakováním. Řekneme si, co je to konvexní funkce a zamyslíme se nad Jensenovou nerovností.

Definice. Buď $I \subseteq R$ interval a $f : I \to R$ funkce. Potom říkáme, že f je na I *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in I$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y).$$

Platí-li opačná nerovnost, říkáme, že je funkce konkávní. Platí-li nerovnost ostře pro $\lambda \in (0, 1)$, říkáme, že je funkce *ryze* konvexní (konkávní).

Důsledek. (Jensenova nerovnost) Nechť f je funkce konvexní na intervalu I. Pak pro libovolná $x_1, \ldots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ taková, že $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n),$$

přičemž je-li f ryze konvexní, rovnost nástává jen když se všechna x_i, pro něž je λ_i nenulová, rovnají. Pro konkávní funkce platí nerovnost obráceně.

Protože je Jensenova nerovnost snadným důsledkem definice konvexity, je její použití tím užitečnější, čím těžší je dokázat, že daná funkce je konvexní.

Úloha 1. Dokaž, že funkce $y = x,\ x^2,\ 1/x,\ \log x,\ 2^x,\ x \cdot \log x$ je konvexní (konkávní). Co pro dané funkce říká Jensenova nerovnost?

Úloha 2. Rozmysli si, že jsou-li f a g dvě konvexní funkce a g je navíc neklesající, pak $h(x) = g(f(x))$ je taky konvexní. Jsou-li f a g dvě konvexní neklesající (nebo nerostoucí) funkce nabývající kladných hodnot, pak $h(x) = f(x)g(x)$ je konvexní. Rozmysli, že podmínky na f a g jsou opravdu potřeba.

V olympiádě se Jensen hodí typicky pro nerovnosti, které obsahují součet nepříjemných funkcí, jako jsou odmocniny, logaritmy nebo lomené funkce. Pro samotné využití je potřeba umět určit, zda je daná funkce konvexní či konkávní. Pokud umíte derivovat, hodí se vědět, že funkce je v bodě konvexní, pokud je tam její druhá derivace kladná (a konkávní, je-li záporná). U standardních funkcí stačí zmínit, že daná funkce je na daném intervalu taková a maková.

Cvičení (Jensen)

Úloha 3. Buďte $a, b, c > 0$ taková, že $a + b + c = 1$. Najděte minimum

$$\sum_{cyc} \left(a + \frac{1}{a} \right)^{12}$$

Úloha 4. Dokaž, že úhly v trojúhelníku α, β, γ splňují

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 5. Pro kladná reálná a, b, c dokaž

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Úloha 6. Pro nezáporná reálná a, b dokaž

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{a + b}{\sqrt{ab + 1}}$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost. (MO A63-III-6)

Úloha 7. Pro kladná a, b, c dokaž

$$\sum_{cyc} a\sqrt{a^2 + 2(b^2 + c^2) + (b + c)^2} \leq (a + b + c)^2.$$

Úloha 8. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(b + c)^2} \geq \frac{9}{4(a + b + c)}.$$

Úloha 9. Dokažte Hölderovu nerovnost, tzn. pro $p, q > 1$ splňující $1/p + 1/q = 1$ a $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ kladná platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Entropie

Úloha 10. Jaké je množství překvapení v následujících větách? 1) Ke snídani bude zítra chleba. 2) Letošní ikskové sous je ve Strmilově. 3) Hadr snědl roztříhaný koberec.

Množství informace obsažené v nějakém tvrzení je přímo úměrné momentu překvapení. To napovídá, že by se mohla hodit pravděpodobnost, jejíž základy stručně shrneme. Moment překvapení formálně zavedeme jako funkci $I : [0,1] \to R$. Asi by bylo rozumné, kdyby tato funkce splňovala: a) $I(p) \geq 0$, b) I je nerostoucí, c) pro nezávislé jevy se překvapení sčítá, tedy $I(pq) = I(p) + I(q)$. Tyto podmínky splňuje funkce $I(p) = \log_2 \frac{1}{p}$. Všimni si, že libovolný násobek této funkce také splňuje všechny tři rovnice. To odpovídá tomu, jestli se informace měří v bitech, nebo jiných jednotkách. Entropie je střední hodnota momentu překvapení, neboli $H(X) = E_x[I(P[X = x])] = \sum_x P[X = x] \log\left(\frac{1}{P[X=x]}\right)$. Domluvme se na konvenci, že $0 \log 0 = 0$. Čím větší entropie, tím je náhodná veličina neuspořádanější. Jiný pohled je, že entropie říká očekávaný počet bitů, které potřebujeme na specifikaci hodnoty X. Obdobně definujeme entropii dvojice náhodných veličin $H(X,Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log\left(\frac{1}{P[X=x,Y=y]}\right)$ a $H(X|Y) = E_y[H(X|Y = y)] = \sum_y P[Y = y] \sum_x P[X = x|Y = y] \log\left(\frac{1}{P[X=x|Y=y]}\right)$. Nakonec budeme symbolem $H(p)$ značit entropii náhodné proměnné, které nabývá dvou hodnot s pravděpodobností p a $1 - p$.

Úloha 11. Uvažme prostor náhodných řetízků z $\{0,1\}^n$, každý si vybereme se stejnou pravděpodobností. Spočti moment překvapení pro jeden řetízek a entropii této distribuce. Teď uvažme dvojici náhodných veličin, kterou dostaneme tak, že náhodně vybereme $a, b, c \in \{0,1\}^{n/2}$ a definujeme $X = ab$, $Y = bc$. Jaká je entropie $H(X,Y)$?

Úloha 12. Předpokládejme, že qn je celé. Potom

$$\frac{2^{H(q)n}}{n+1} \leq \binom{n}{qn} \leq 2^{H(q)n}.$$

Úloha 13. Dokaž:

- Pro dvě rozdělení p a q platí $\sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ s rovností, když jsou si rozdělení rovna.
- $0 \leq H(X) \leq \log(|range(X)|)$ s rovností, když X nabývá každé hodnoty z oboru hodnot $range(X)$ se stejnou pravděpodobností,
- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \leq H(X) + H(Y)$ s rovností, když X a Y jsou nezávislé, obdobně $H(X,Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X,Z)$,
- $H(X|Y) = 0$ když $X = f(Y)$,
- $H(X) \geq H(g(X))$ s rovností, když g lze invertovat.

Úloha 14. Rozmysli si, že z předchozí úlohy plyne $H(X_1, \ldots, X_n) = H(X_1) + H(X_2|X_1) + \ldots + H(X_n|X_1, X_2, \ldots X_{n-1}) \leq H(X_1) + \ldots + H(X_n)$.

Úloha 15. Najdi náhodnou veličinu X a jev Q takový, že $H(X|Q) > H(X)$. Na druhou stranu dokaž, že vždy platí buď $H(X|Q) \leq H(X)$ nebo $H(X|Q^C) \leq H(X)$, kde Q^C je doplňkový jev k jevu Q.

Úloha 16. Mějme n bodů v prostoru takových, že mají dohromady n_1 průmětů do roviny XY, n_2 průmětů do roviny YZ a n_3 průmětů do roviny XZ. Potom $n^2 \leq n_1 n_2 n_3$.

Úloha 17. Nechť $A_1, \ldots, A_t$ jsou podmnožiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že každé i, $1 \leq i \leq n$, se vyskytuje v aspoň k z těchto množin. Označme $A_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in_i}\}$. Dokaž, že

$$k \cdot H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{t} H(X_{A_{i1}}, X_{A_{i2}}, \ldots, X_{A_{in_i}}).$$

Úloha 18. Nechť pro X a X' jsou nezávislé a se stejnou distribucí. Dokaž $P[X = X'] \geq 2^{-H(X)}$.

Úloha 19. Kuba s Filipem hrají následující hru. Kuba si myslí posloupnost n po dvou různých čísel. Filip se ho v každém kole zeptá na dva indexy i, j a Kuba mu řekne, které ze dvou čísel na pozici i a j je větší. Po $100n$ krocích musí Filip říct indexy prvků Kubovy posloupnosti v pořadí od nejmenší po největší. Dokažte, že pro nějaké n neexistuje strategie, která by Filipovi zaručila, že vždy odpoví správně.

Úloha 20. a) Z n mincí je jedna falešná. V jednom kroku můžeš dát na váhu nějakou podmnožinu mincí a váha ti řekne, kolik z nich je falešných. Kolik vážení stačí na určení falešné mince? b) To samé, ale falešných mincí je víc (nevíš kolik). Dokaž, že počet vážení musí být aspoň $n/\log(n+1)$.

Úloha 21. Vodka obarvil hrany úplného grafu na n vrcholech tak, že každý podgraf tvořený hranami jedné barvy je bipartitní. Dokaž, že barev je aspoň $\log(n)$.

Úloha 22. a) Dokaž, že pro počet prvočísel o velikosti nejvýše n platí $\pi(n) \geq \frac{\log(n)}{\log(\log(n)+1)}$. b) Vylepši odhad na $\frac{\log(n)}{2}$.

Úloha 23. Na iksku se sešlo n orgů a n účastníků. Na cvičení je chceme rozdělit do dvojic účastník-org, přičemž i-tý účastník je ochoten jít do dvojice jen s d_i nějakými orgy. Dokaž, že počet způsobů, jak spárovat účastníky s orgy je nejvýše

$$\prod_i (d_i!)^{1/d_i}.$$

Úloha 24. Mějme graf s n vrcholy a m hranami. Verča na jeden vrchol položí žeton a pak jej k-krát posune podél nějaké hrany. Dokaž, že počet způsobů, jak to může udělat, je alespoň $n \cdot \left(\frac{2m}{n}\right)^k$.

Následuje několik úloh, z nichž některé s entropií souvisí jen volně.

Úloha 25. Vašek obchoduje na burze. Vždycky, když si není jistý, jestli má nějakou akcii koupit, nebo ne, zeptá se jednoho ze svých dvou poradců Štěpána a Vodky. Když mu poradí dobře, Vašek získá 1000 Kč a když špatně, ztratí 1000 Kč. Přišla krize a Vašek musí buď Štěpána, nebo Vodku propustit. Udělal si statistiku, podle které mu vyšlo, že Štěpán mu radil dobře v 60 procentech případů a Vodka jen ve 20 procentech. Koho si má nechat?

Úloha 26. Rado a Filip tvoří epickou šarádicí dvojici. Verča jim dala následující challenge: řekne Radovi posloupnost 100 bitů a ten pak co nejrychleji tuto posloupnost vyšarádí Filipovi. Kluci se nejdřív rozhodli, že Rado každou vteřinu ukáže Filipovi palec nahoru, nebo dolů a takto zprávu odvysílá za 100 sekund. Pak si ale řekli, že rychlejší taktika bude, když Rado zprávu nějak zakóduje a pak Filipovi každou vteřinu ukáže jeden z pěti prstů na pravé ruce. Problém je, že Filip si v té rychlosti všimne jen toho, že Rado mu ukazoval buď prst i, nebo prst $i+1$ (cyklicky pro $1 \leq i \leq 5$). Můžou se i za tohoto předpokladu dohodnout na kódování, které dá taktiku rychlejší než 100 sekund?

Úloha 27. Verča s Radem nachystali estrádní číslo. Náhodný posluchač z publika si vybere dvě čísla x_1, x_2 taková, že $1 \leq x_1, x_2 \leq 924$. Pak Radovi řekne jedno z těchto dvou čísel a ten správně odpoví, jestli se jedná o x_1, nebo o x_2. Jak to? Rado samozřejmě nemá magické schopnosti, ale spolu s Verčou podvádí. Verča se nejdřív zeptá posluchače na x_1, x_2, aby zkontrolovala, že si nevymýšlí. Pak o těchto číslech předá malou informaci Radovi, který pak na jejím základě určí, zda posluchač řekl první, nebo druhé číslo ze své dvojice. Aby předání informace bylo nenápadné, Verča může Radovi sdělit jen nějaké malé přirozené číslo o velikosti nejvýše a)20, b)12. Jak to dělají? CEOI 2014

Úloha 28. Kouzelníci Štěpán a David si pro Rada připravili trik s šachovnicí $n \times n$. Nejprve David odešel pryč, aby nic neviděl ani neslyšel. Poté Štěpán Radovi nakázal, ať na každé políčko položí dle své vůle buď bílý, nebo černý knoflík. Následně ho nechal, aby zvolil libovolné políčko A a sdělil mu, které to je. Nato si Štěpán vybral políčko B (ne nutně různé od A) a změnil barvu knoflíku, který na B ležel. Když potom přišel David, byl schopný pouze z pohledu na šachovnici uhodnout, které políčko A si Rado vybral. Pro která n je tento trik proveditelný? PraSe 35-3-8

Literatura a zdroje

Přednáška je založena na podobné od Pata Devlina. Děkuji Matěji Konečnému, jehož přednášku o Jensenově nerovnosti jsem zkopíroval do úvodu.

Hinty

Hint 3. Funkce $(x + 1/x)^{12}$ je konvexní.
Hint 4. Sinus je na $[0, \pi]$ konkávní.
Hint 5. Čitatel bude koeficient, funkce $1/\sqrt{x}$ je konvexní.
Hint 6. Podobně jako předchozí úloha, $1/\sqrt{x}$ je konvexní.
Hint 7. Funkce $\sqrt{x}$ je konkávní.
Hint 8. Pomůže přidat si podmínku $a + b + c = 1$, dále funkce $1/x^2$ je konvexní.
Hint 9. Použij nerovnost $\left(\sum_1^n \lambda_i x_i\right)^q \leq \sum_1^n \lambda_i x_i^q$. Pak zvol $\lambda_i = a_i^p/(\sum_i^n a_i^p)$.
Hint 12. Podívej se na to, kolik je $(q + (1 - q))^n$.
Hint 16. Úlohu převeď na nerovnost

$$2H(X_1, X_2, X_3) \leq H(X_1, X_2) + H(X_2, X_3) + H(X_1, X_3).$$

Hint 17. Uvědom si, že z předchozích úloh plyne, že entropii nějaké veličiny podmíněné několika jinými lze odhadnout shora zahozením některých podmínek.
Hint 18. Využij Jensenovu nerovnost pro funkci 2^x.
Hint 19. Kolik je posloupností a kolik je možných Kubových odpovědí?
Hint 20. b) Převeď to na existenci ℓ množin $D_1, \ldots, D_\ell$ takových, že pro každé A, B podmnožiny $\{1, \ldots, n\}$ platí, že existuje i taková, že $|A \cap D_i| \neq |B \cap D_i|$. Uvědom si, že každá D_i ti dá informaci odpovídající $\log(n + 1)$ bitům.
Hint 21. Nemůžou být dva vrcholy, které by skončily ve stejné partitě všech bipartitních grafů.
Hint 22. a) Vyber si náhodné číslo menší rovno n a rozepiš ho jako součin $\pi(n)$ čísel. Pak můžeš napsat $H(X) = H(X_1) + \ldots + H(X_{\pi(n)})$, kde každá X_i má malou entropii. b) Vymysli trochu lepší rozklad tak, aby každá X_i mohla nabývat jen dvou hodnot.
Hint 23. Nejdřív dokaž odhad $\prod_i d_i$. Pak ten odhad přeříkej pomocí entropií. Když si vybíráš i-tou hranu, je potřeba lepší odhad než $H(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}) \leq H(X_i)$. Tak zkus náhodně zpermutovat pořadí, ve kterém vrcholy procházíš a odhadni, že očekávaný přírůstek entropie za i-tý vrchol je $\sum_{i=1}^{d_i} \log(i)/d_i$.
Hint 24. Hodně štěstí. Zvol si na Verčiných cestičkách chytrou distribuci tak, aby pozice v i-tém kroku závisela jen na kroku předchozím. Vyjde $p_i(v) = \deg(v)/(2m)$. Pak odhadni výrazy $H(X_1)$ a $H(X_1|X_2)$.
Hint 25. Odpovědi Vodky se dají negovat. To souvisí s tím, že když si po drátu posíláme bity, nejvíc informace ztrácíme, když se každý bit otočí s pravděpodobností 50 procent a ne 100 procent.
Hint 26. Za dva kroky se dá přenést zpráva o velikosti $\log_2(5)$ bitů (tedy je pět možností) tak, že pro přenesení i-té možnosti Rado ukáže prst i a $3i$.
Hint 27. a)Když si čísla zapíšeš ve dvojkové soustavě, budou se někde lišit. b) Chtělo by to podobnou reprezentaci jako v a), navíc by se hodilo umět ukázat na x_1 ne tím, kde a jak se liší od x_2, ale jen tím, kde se liší od x_2. Pokud jsi zoufalý, spočti, které kombinační číslo, ve kterém figuruje 12, je rovné 924. Lépe to nejde (srovnej se Spernerovou větou).
Hint 28. Nejdřív dokaž, že n musí být mocnina dvojky. Pro mocniny dvojky pak lze polohu políčka zakódovat pomocí XORu.

Kombinatorické konstrukce

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Naučíme se, jak jednoduše zkonstruovat požadované řešení. V kombinatorice se jedná o součást většiny úloh – někdy jen jako nutný, standardní krok (takové konstrukce si procvičíme v pískovišti), často ale jako obtížnější polovina řešení. V příspěvku se objevují jen konstrukční části úloh. Skutečné úlohy zadané na soutěžích měly obvykle ještě druhou část.

Pískoviště

Úloha 1. Máme šachovnici 6×6 a na ní figurku delfína. Ten se může hýbat o jedna doprava, nahoru nebo diagonálně doleva dolu. Na začátku stojí v levém dolním rohu šachovnice. Projděte s delfínem celou šachovnici, aby na každém políčku stál právě jednou. (KMS 03/04 L1, 10)

Úloha 2. Lze obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě dvěma barvami (žlutě a modře) tak, aby v každém řádku bylo konečně mnoho žlutých políček a v každém sloupci konečně mnoho modrých? (MKS 32–3–4)

Úloha 3. Do tabulky o čtyřech sloupcích a čtyřech řádcích napište (reálná) čísla tak, aby pro každé pole platilo, že součet čísel v polích s ním sousedících je 1. (Sousedními poli rozumíme ta pole tabulky, která mají společnou stranu.)

Úloha 4. Mějme papír se 102×102 čtverečky. Najděte takový souvislý útvar složený ze 101 čtverečků, že z papíru lze vystřihnout maximálně čtyři jeho kopie. (KMS 03/04 L1, 9)

Úloha 5. V několika krabicích máme 64 kuliček. Máme-li dvě krabice s a a b kuličkami ($a \geq b$), můžeme přesunout b kuliček z první do druhé. Dokažte, že umíme přesunout všechno do jedné krabice.

Úloha 6. Ve čtyřech krabicích je celkeme $n \geq 4$ kuliček. V jednom tahu můžeme vzít po jedné kuličce ze dvou různých krabic a přesunout je obě do nějaké jiné krabice. Jde vždy dosáhnout toho, aby byly všechny kuličky v jedné krabici? (Čína 1994)

Úloha 7. Prove that the set of positive integers can be partitioned into 3 subsets A_1, A_2, A_3 such that for all integers $n \geq 15$ and all $i \in \{1, 2, 3\}$ there exist two distinct elements of A_i whose sum is n. (IMO Shortlist 2011, C4)

Úloha 8. Na stole leží 2013 mincí. Provedeme 2013 tahů, kde v k-tém tahu otočíme nějakých k mincí. Dokažte, že lze dosáhnout toho, aby všechny mince byly nahoru stejnou stranou. (Čína 1989)

Úloha 9. Buď $M = \{1, 2, \ldots, 2014\}$ a $A \subset M$. Dokažte, že existuje $B \subset M$ s vlastností: Množina A je přesně množina těch čísel z M, které jsou děliteli lichého počtu čísel z B. (MOSP 1999)

Úloha 10. A maze is an 8×8 board with some adjacent squares separated by walls, so that any two squares can be connected by a path not meeting any wall. Given a command LEFT, RIGHT, UP, DOWN, a pawn makes a step in the corresponding direction unless it encounters a wall or an edge of the chessboard. God writes a program consisting of a finite sequence of commands and gives it to the Devil, who then constructs a maze and places the pawn on one of the squares. Can God write a program which guarantees the pawn will visit every square despite the Devil's efforts? (ARO 1998)

Indukce

Úloha 11. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n ($n \geq 3$) lze rozřezat rovnostranný trojúhelník na n trojúhelníků, z nichž každy je rovnostranný nebo rovnoramenný.

Úloha 12. Ať vystřihneme z tabulky $2^n \times 2^n$ kdekoliv jeden čtvereček, zbytek jde pokrýt L-triominy.

Úloha 13. Pro $m \geq 1$ rozdělte šachovnici $2^m \times 2^m$ na obdélníky, kde každé z 2^m políček na diagonále tvoří vlastní obdélník (o stranách délky 1) a aby byl součet obvodů použitých obdélníků $(m + 1) \cdot 2^{m+2}$. (IMO Shortlist 2009, C4)

Úloha 14. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n, které není dělitelné třemi, platí: Šachovnici $n \times n$ lze rozřezat na jeden čtverec 1×1 a L-triomina.

Úloha 15. Let $n > 0$ be an integer. We are given a balance and n weights of weight $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. In a sequence of n moves we place all weights on the balance. In the first move we choose a weight and put it on the left pan. In each of the following moves we choose one of the remaining weights and we add it either to the left or to the right pan. Compute the number of ways in which we can perform these n moves in such a way that the right pan is never heavier than the left pan. (IMO 2011, 4)

Geometrické konstrukce

Úloha 16. A configuration of 4027 points in the plane is called *Colombian* if it consists of 2013 red points and 2014 blue points, and no three of the points of the configuration are collinear. By drawing some lines, the plane is divided into several regions. An arrangement of lines is *good* for a Colombian configuration if the following two conditions are satisfied:

- no line passes through any point of the configuration;
- no region contains points of both colours.

Prove that there is a Colombian configuration for which there doesn't exist a good configuration of 2012 lines and prove that for any Colombian configuration there exists a good configuration of 2013 lines. (IMO 2013, 2)

Úloha 17. Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm. (MO A–III–2)

Úloha 18. Mějme n bodů v rovině. Řekněme, že k z nich tvoří k-díru, pokud žádný z nich neleží v konvexním obalu těch zbylých. Najděte 6 bodů neobsahujících 4-díru, aby žádné 4 body neležely na jedné přímce.

Úloha 19. Mějme množinu $n = 2k$ bodů v rovině v obecné poloze (žádné tři body neleží na přímce). Půlící přímka je taková přímka, která prochází dvěma body z této množiny a na každé straně přímky je $k - 1$ bodů.

(i) Pro každé sudé n najděte konfiguraci bodů, která obsahuje alespoň $n-1$ půlících přímek.
(ii) Najděte nějakou konfiguraci bodů, která obsahuje alespoň n půlících přímek.[1]

Úloha 20 (těžká). Dokažte, že pro každé n existuje množina alespoň n bodů v obecné poloze, která neobsahuje 7-díru (konvexní sedmiúhelník neobsahující žádné body uvnitř ani na hranách).

Grafy

Úloha 21. Každý vrchol grafu obarvíme nějakou množinou barev tak, že množiny u dvou vrcholů mají neprázdný průnik, právě když jsou spojeny hranou. Najděte graf na n vrcholech, na jehož obarvení budeme potřebovat alespoň $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ barev. (KMS 06/07 Z1, 11)

Úloha 22. Na nekonečnom bielom štvorčekovanom papieri je istý konečný počet štvorčekov úplne zafarbených čiernou farbou. Pritom každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov, opäť susediacich celou stranou. (KMS 06/07 L1, 11)

Úloha 23. In a mathematical competition some competitors are friends. Friendship is always mutual. Call a group of competitors a clique if each two of them are friends. In particular, any group of fewer than two competitors is a clique.) The number of members of a clique is called its size. Given that in this competition, the largest size of a clique is even, prove that the competitors can be arranged in two rooms such that the largest size of a clique contained in one room is the same as the largest size of a clique contained in the other room. (IMO 2007, 3)

[1] Ve skutečnosti existuje konstrukce, která pro každé n obsahuje alespoň $c \cdot n \cdot e^{\sqrt{\log(n)}}$ pro vhodnou konstantu c. Tato funkce roste rychleji než $n \cdot \log^k(n)$ pro každé k a pomaleji než $n^{1+\epsilon}$ pro každé $\epsilon > 0$.

Hry

Úloha 24. Players A and B play a game with $N \geq 2012$ coins and 2012 boxes arranged around a circle. Initially A distributes the coins among the boxes so that there is at least 1 coin in each box. Then the two of them make moves in the order B, A, B, A, … by the following rules:

- On every move of his B passes 1 coin from every box to an adjacent box.
- On every move of hers A chooses several coins that were not involved in B's previous move and are in different boxes. She passes every chosen coin to an adjacent box.

Player A's goal is to ensure at least 1 coin in each box after every move of hers, regardless of how B plays and how many moves are made. Prove that $N = 4022$ enables her to succeed.

(IMO Shortlist 2012, C4)

Úloha 25. Let k and n be fixed positive integers. In the liar's guessing game, Amy chooses integers x and N with $1 \leq x \leq N$. She tells Ben what N is, but not what x is. Ben may then repeatedly ask Amy whether $x \in S$ for arbitrary sets S of integers. Amy will always answer with yes or no, but she might lie. The only restriction is that she can lie at most k times in a row. After he has asked as many questions as he wants, Ben must specify a set of at most n positive integers.

If x is in this set he wins; otherwise, he loses. Prove that:

a) If $n \geq 2^k$ then Ben can always win. (IMO 2012, 3a)

Ďalší úlohy

Úloha 26. V lese býva 2014 trpaslíkov očíslovaných číslami 1 až 2014. Na príkaz Snehulienky sa nejakých 41 z nich postaví do radu tak, aby ich čísla tvorili aritmetickú postupnosť. Snehulienka si všimla, že nech sa trpaslíci postavia do radu hocijako, vždy bude medzi nimi aspoň jeden z jej 90 obľúbených trpaslíkov. Aké čísla mohou mať Snehulienkini obľúbení trpaslíci? (KMS 06/07 L1, 8)

Úloha 27. Nech M je množina slov (postupnosti znakov) dĺžky n nad k-prvkovou abecedou $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ taká, že každé dve slová z M sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite M, že $|M| = k^{n-1}$. (KMS 05/06 Z3, 12)

Úloha 28. Máme 45 klebetníc, pričom každá sa za posledný týždeň dozvedela novú klebetu a chce sa o ňu podeliť s ostatnými. Vie to urobiť tak, že niektorej inej zavolá a pritom si navzájom povedia všetky klebety, ktoré vedia. Chceme, aby každá z nich vedela všetky klebety. Ukážte, že to ide na 86 telefonátov. (KMS 05/06 Z1, 8)

Úloha 29. On a 999×999 board a *limp rook* can move in the following way: From any square it can move to any of its adjacent squares, i.e., a square having a common side with it, and every move must be a turn: i.e., the directions of any two consecutive moves must be perpendicular. A *nonintersecting route* of the limp rook consists of a sequence of distinct squares that the limp rook can visit in that order by an admissible sequence of moves. Such a nonintersecting route is called *cyclic* if the limp rook can, after reaching the last square of the route, move directly to the first square of the route and start over.

Find cyclic, nonintersecting route of a limp rook passing through $4 \cdot (499^2 - 1)$ squares. (IMO Shortlist 2009, C6)

Úloha 30. In a concert, 20 singers will perform. For each singer, there is a (possibly empty) set of other singers such that he wishes to perform later than all the singers from that set. Can it happen that there are exactly 2010 orders of the singers such that all their wishes are satisfied? (IMO Shortlist 2010, C1)

Úloha 31. Let $n \geq 1$ be an integer. What is the maximum number of disjoint pairs of elements of the set $\{1, 2, \dots, n\}$ such that the sums of the different pairs are different integers not exceeding n? (IMO Shortlist 2012, C2)

Úloha 32. On a square table of 2011 by 2011 cells we place a finite number of napkins that each cover a square of 52 by 52 cells. In each cell we write the number of napkins covering it, and we record the maximal number k of cells that all contain the same nonzero number. Prove that there exist a napkin configuration with $k = 2011^2 - 57392 = 3986729$. (IMO Shortlist 2011, C7)

Úloha 33. In each of six boxes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 there is initially one coin. There are two types of operation allowed:

Type 1: Choose a nonempty box B_j with $1 \leq j \leq 5$. Remove one coin from B_j and add two coins to B_{j+1}.

Type 2: Choose a nonempty box B_k with $1 \leq k \leq 4$. Remove one coin from B_k and exchange the contents of (possibly empty) boxes B_{k+1} and B_{k+2}.

Determine whether there is a finite sequence of such operations that results in boxes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 being empty and box B_6 containing exactly $2010^{2010^{2010}}$ coins. (IMO 2010, 5)

Literature a zdroje

Tento příspěvek je pouze mírně upravenou verzí příspěvku ze soustředění *i*KS 2014.

Hinty

Hint 1. Jak se může dostat na políčku vlevo nahoře? A jak potom na políčko o jedna vpravo dole, aby si nerozdělil šachovnici na dvě části?
Hint 2. Jde to. Vybírejte postupně řádky a sloupce a obarvujte políčka v nich, aby pro ně byla podmínka zachována.
Hint 3. Vybarvěte taková políčka tabulky, aby každé políčko sousedilo s právě jedním vybarveným.
Hint 4. První hint: Vynuťte, aby od sebe musely být útvary daleko. **Druhý hint**: Kříž. Oblast, kde mohou být středy křížů, rozdělte na čtvrtiny. Mohou být v některé čtvrtině dva středy?
Hint 5. Všechny počty zesuď a indukce.
Hint 6. Ano. Indukce.
Hint 7. Prvních 9 čísel rozdělte zvlášť, zbylá čísla dávejte na střídačku.
Hint 8. Tahy dělej v opačném pořadí a po k-tém kroku měj $k-1$ prvních mincí otočených správně.
Hint 9. Zkonstruuj B průchodem shora.
Hint 10. Ďábel má jen konečně mnoho možností. Pište program postupně, aby pro všechny fungoval.
Hint 11. Indukce $n \to n+3$.
Hint 12. Ze čtyř L-triomin se dá postavit větší.
Hint 13. Rozdělte tabulku na čtyři čtverce $2^{m-1} \times 2^{m-1}$.
Hint 14. Indukce $n \to n+3$. Čtvereček odstraňujte vždy vlevo dole. Využijte to v indukčním předpokladu.
Hint 15. Odmyslíme si váhu s hmotností 1, hmotnosti zbylých vah podělíme dvěma, využijeme indukční předpoklad a nakonec zjistíme, kam můžeme váhu s hmotností 1 přidat.
Hint 16. Nakreslete si mezi některé dvojice červených a modrých bodů úsečky, aby jich každá přímka protnula jen málo.
Hint 17. Rozdělte terč na menší kruh s vhodným poloměrem a mezikruží, využijte Dirichletův princip.
Hint 18. Dokažte si (nebo jen využijte), že tvoří-li nějaké 4 body konvexní čtyřúhelník, je mezi šesticí bodů i 4-díra.
Hint 19. (i) Vyjděte z pravidelného n-úhelníka a pozměňte ho, aby půlící přímka neprocházela dvěma body na obvodu, ale jen jedním. (ii) Stačí $n = 6$, začněte s trojúhelníkem.
Hint 20. První hint: Sestavujte množinu indukcí. **Druhý hint**: Vždy množinu nakopírujte a vhodně posuňte. **Třetí hint**: Dvě kopie umístěte tak, aby se obě zdály „placaté" (každá přímka v horní kopii leží nad celou spodní kopií).
Hint 21. Obarvěte hrany průnikem množin u vrcholů. Máme-li hrany (A, B), (C, D) a přitom A není spojeno s C nebo B není spojeno s D, tak musí být tyto hrany obarveny různými barvami. Jak zařídit, aby měla každá hrana jiné barvy než ostatní?
Hint 22. Sestrojte graf nad bílými políčky. Spojte hranou vrcholy, které musí mít různou barvu.
Hint 23. Dejte $2n$ soutěžících tvořících největší kliku do jedné místnosti, zbylé do druhé. Přesouvejte je tak, aby se velikosti největších klik v místnostech lišily maximálně o jedna.

Hint 24. Na začátku dá A do dvou krabic po jedné minci a do zbylých po dvou. Po každém svém tahu A tuto konfiguraci zachová. Rozeberte zvlášť situaci, kdy jsou krabice s jednou mincí ob jedna od sebe a během tahu hráče B se ani jedna z mincí nepřesune do krabice mezi nimi.

Hint 25. Najděte číslo z množiny $\{1, \ldots, N\}$, které se nerovná x a množinu adeptů zmenšujte, dokud jich je více než 2^k. Nezávisle na odebraných číslech můžete množinu vždy přečíslovat na $\{0, \ldots, N-1\}$. Ptejte se, jestli $x = 2^k$, dokud Amy neodpoví *yes* (jinak $x \neq 2^k$) a využijte toho.

Hint 26. V aritmetické posloupnosti bude nějaké z čísel násobkem 41. Pokud ovšem není diference 41.

Hint 27. Přidejte vhodný znak za každé slovo délky $n - 1$.

Hint 28. Kdyby se první dozvěděla všechny drby, mohla by je ostatním říct. Jen u posledních třech drben je potřeba to udělat trochu rafinovaně.

Hint 29. Najděte konstrukci indukcí pro tabulky $(4k - 1) \times (4k - 1)$.

Hint 30. Pokud pro nějaké požadavky k_1 (resp. k_2) zpěváku existuje N_1 (resp. N_2) uspořádání, tak můžeme zvolit takové požadavky pro $k_1 + k_2$ zpěváků, aby existovalo $N_1 \cdot N_2$ uspořádání.

Hint 31. Počítejte dvěma způsoby součet všech čísel ve dvojicích a tím dokažte, že je maximálně $\left\lfloor \frac{2n-1}{5} \right\rfloor$ dvojic. Při konstrukci využijte, že musí v nerovnosti nastat (skoro) rovnost. Nejprve vyřešte případ $n = 5k + 3$, ostatní z něj odvoďte.

Hint 32. Nejvíc políček bude zakryto jedním ubrouskem. Umístěte ubrousky co nejvíc pravidelně. Začněte v protějších rozích a dořešte uhlopříčku.

Hint 33. Jde to. Indukcí dokažte, že od $(a, 0, 0)$ se dá přejít k $(0, 2^a, 0)$ a od $(a, 0, 0, 0)$ k $(a - k, P_k, 0, 0)$, kde $P_k = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{k}$.

Barycentrické souřadnice

Rado van Švarc

Abstrakt. Příspěvek popisuje základní principy analytické geometrie v barycentrických souřadnicích.

O co jde?

Definice. Ať P je bod v rovině trojúhelníka ABC. Pak barycentrickými souřadnicemi X nazveme trojici reálných čísel (x, y, z) takovou, že

$$P = xA + yB + zC, \qquad x + y + z = 1.$$

Poznámka. Vzhledem k podmínce $x + y + z = 1$ je tato trojice určená poměry $x : y : z$. Pro jednoduchost budeme občas psát $X = (x : y : z)$ a mínit tím $X = (x/s, y/s, z/s)$, kde $s = x + y + z$.

Tvrzení. Každý bod v rovině $\triangle ABC$ má jednoznačné souřadnice.

Poznámka. Jelikož jsou barycentrické souřadnice stále vektory, chovají se lineárně. Střed úsečky nalezneme průměrováním souřadnic, podobně třetinu, čtvrtinu, středový obraz a tak dále.

Tvrzení. Je-li $P = (x, y, z)$ v rovině trojúhelníka ABC o obsahu 1, pak

$$[BCP] = |x|, \quad [CAP] = |y|, \quad [ABP] = |z|.$$

Paty cevián z P mají navíc souřadnice

$$\left(0, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right), \quad \left(\frac{x}{x+z}, 0, \frac{z}{x+z}\right), \quad \left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}, 0\right).$$

Trocha přípravy

Tvrzení (Vlastnosti skalárního součinu). Jsou-li $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ vektory, pak platí:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, právě když $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Lemma. Je-li ABC vepsán do kružnice o poloměru R umístěné do počátku souřadnic, pak platí

- $\vec{A} \cdot \vec{A} = R^2$.
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}$.

To podstatné

Tvrzení. Rovnice přímky má tvar

$$ux + vy + wz = 0,$$

kde $u, w, w \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

Tvrzení (O kolmosti). Ať $M - N = (x_1, y_1, z_1)$ a $P - Q = (x_2, y_2, z_2)$, pak $MN \perp PQ$ právě tehdy, když

$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + x_2z_1) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0.$$

Tvrzení (Výpočet vzdálenosti). Je-li $P - Q = (x, y, z)$, pak

$$|PQ|^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy.$$

Tvrzení. Rovnice kružnice má tvar

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0,$$

kde $u, v, w \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

Pár dalších vzorců pro fajnšmekry

Tvrzení. Body $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ a $Z = (z_1, z_2, z_3)$ leží v přímce, právě když

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokonce platí

$$[XYZ] = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} [ABC].$$

Tvrzení. Přímky $u_ix + v_iy + w_iz$ pro $i = 1, 2, 3$ procházejí jedním bodem, právě když

$$\det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tvrzení. Přímky $u_i x + v_i y + w_i z$ pro $i = 1, 2$ jsou rovnoběžné, právě když

$$\det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tvrzení. [Conway Formula] V rovině ABC je bod P. Označme φ a ψ orientované úhly PBC a BCP. Pak

$$P = (-a^2 : S_\gamma + S_\psi : S_\beta + S_\varphi),$$

kde $S_\xi = 2[ABC] \cot \xi$.

Příklady k seznámení

Úloha 1. Je dán trojúhelník ABC. Určete souřadnice následujících bodů:

1) těžiště, vepsiště, připsiště.
2) středy stran, body dotyku s kružnicí vepsanou, body dotyku s připsanými.
3) průsečíky rovnoběžek se stranami vedenými vepsištěm s obvodem trojúhelníka.
4) kolmiště, opsiště.
5) švrk, antišvrk.
6) kamarád bodu $X = (x, y, z)$.

Úloha 2. Je dán trojúhelník ABC. Určete rovnice následujících přímek:

1) strany $\triangle ABC$, střední příčky.
2) osy úhlů (vnějších i vnitřních), těžnice, symediány, tečny k opsané ve vrcholech.
3) osy stran, výšky.
4) strany dotykového trojúhelníka.
5) Eulerova přímka.

Úloha 3. Je dán trojúhelník ABC s běžným značením. Určete rovnice následujících kružnic:

1) opsaná, BGC, BIC.
2) AM_bM_c, AEF (dotyky s vepsanou).
3) kružnice devíti bodů.
4) kružnice vepsaná.

Úloha 4. Je dán trojúhelník ABC s běžným značením. Určete následující vzdálenosti:

1) AG, BG, CG.
2) AI, BI, CI.
3) IG.
4) I_bI_c (připsiště).

Skutečné úlohy

Úloha 5 (Cevova/Menalova věta). V trojúhelníku ABC leží na přímkách BC, CA a AB body D, E a F. Buď

$$k = \frac{BD \cdot CE \cdot AF}{CD \cdot AE \cdot BF},$$

kde délky jsou orientované. Ukažte, že $k = -1$ právě když D, E a F leží na jedné přímce, a $k = 1$ právě když se AD, BE a CF protínají v jednom bodě

Úloha 6 (Stewartova věta). V trojúhelníku ABC buď X bod na AC. Označme vzdálenosti AX, XC a BX postupně jako m, n a x. Pak

$$b(x^2 + mn) = a^2 m + c^2 n.$$

Úloha 7. V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme O střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD. Dokažte, že přímky OS a CT jsou rovnoběžné. (MO 2013)

Úloha 8. Buď ABC trojúhelník s kružnicí vepsanou ω. Body dotyku kružnice připsaných s úsečkami BC a AC si označíme postupně X a Y. Buď P průsečík AX a BY. Kružnice ω protíná úsečku AX ve dvou bodech, bližší z nich k A označíme Q. Ukažte, že $AQ = XP$. (USAMO 2001)

Úloha 9. Čtyřstěn $ABCD$ má tu vlastnost, že součet obsahů stěn ABC a ABD je stejný jako součet obsahů stěn CDA a CDB. Ukažte, že středy hran AC, AD, BC, BD a střed koule vepsané leží v jedné rovině. (iKS 3 2013/2014)

Úloha 10. Bod P leží uvnitř $\triangle ABC$ a paty jeho příslušných cevián na AB, BC a CA jsou postupně D, E a F. Ukažte, že

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC]$$

právě tehdy, když P leží na jedné z těžnic. (USA TST 2003)

Úloha 11. V trojúhelníku ABC protínají osy úhlů ve vrcholech A, B a C protilehlé strany postupně v bodech D, E, F. Ukažte, že $BDEF$ je tětivový čtyřúhelník právě tehdy, když

$$\frac{b}{a+c} = \frac{c}{b+a} + \frac{a}{c+b}.$$

(Mongolsko TST 2000)

Úloha 12. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník. Označme jako M, N a P postupně středy BC, CA a AB. Nechť osy stan AB a AC protínají AM postupně v bodech D a E. Přímky BD a CE se protínají v bodě F ležící uvnitř ABC. Dokažte, že $ANFP$ je tětivový čtyřúhelník. (USAMO 2008)

Úloha 13. Buď ABC trojúhelník splňující $b+c=3a$. Buď I vepsiště a X, Y dotyky kružnice vepsané se stranami AB a AC. Nechť K a L jsou obrazy bodů D a E podle I. Dokažte, že B, C, K a L leží na jedné kružnici. (ISL 2005)

Úloha 14. Nechť A_1 je v trojúhelníku ABC střed čtverce, který má dva vrcholy na úsečce BC a po jednom na úsečkách AB a CA. Analogicky zadefinujme B_1 a C_1. Ukažte, že přímky AA_1, BB_1 a CC_1 se protínají v jednom bodě. (ISL 2001)

Úloha 15. Buď D pata A-symediány na BC. Skrze D nakresleme rovnoběžky s AB a AC a jejich průsečík s AC a AB označme postupně jako B_1 a C_1. Dokažte, že BCB_1C_1 je tětivový a označme jeho střed jako O_a. Podobně zadefinujme O_b a O_c. Ukažte, že AO_a, BO_b a CO_c se protínají v jednom bodě. (WOOT 2012)

Úloha 16. V trojúhelníku ABC se kružnice připsané dotýkají úseček AB a BC v bodech X a Y. Buď I' obraz vepsiště ABC podle středu AC. Ukažte, že $BXI'Y$ je tětivový právě tehdy, když $AB \perp BC$. (Sharygin 2012)

Literatura a zdroje

[1] Schindler M., Chen. E., *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*

[2] Yiu P., *Introduction to the Geometry of the Triangle*

Hinty

Hint 1.

1) $(1:1:1), (a:b:c), (-a:b:c)$ atp.
2) $(1/2, 1/2, 0)$ atp., $(0, s-c, s-b)$ atp., $(0, s-b, s-c)$ atp. $2s = a+b+c$.
3) $(a:0:b+c)$.
4) $(S_cS_b : S_aS_c : S_bS_a)$, $(a^2S_a : b^2S_b : c^2S_c)$, kde $S_a = b^2+c^2-a^2$.
5) jako středy mezi vepsišti / připsišti.
6) $(a^2/x, b^2/y, c^2/z)$.

Hint 2.

1) $x=0$, atp, $x=1/2$ atp.
2) $y:b = \pm z:c$ atp., $y=z$, atp. $y/b^2 = \pm z/c^2$. (Pamatujte, že tečny jsou exsymediány.)
3) $a^2(z-y)+x(c^2-b^2)=0$, $a^2(z-y)+(1-x)(b^2-c^2)=0$.
4) $(s-a)x-(s-b)y-(s-c)z=0$.
5) $u:v:w = S_B(S_C-S_A) : S_C(S_A-S_B) : S_C(S_A-S_B)$.

Hint 3.

1) $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$, $v=w=0, 3u=a^2+b^2+c^2$, $v=w=0, u=bc$.
2) $u=0$, $v=c^2/2$, $w=b^2/2$.
3) $u=S_A/2$, $v=S_B/2$, $w=S_C/2$.
4) $u=(s-a)^2$, $v=(s-b)^2$, $w=(s-c)^2$.

Hint 4. Prostě to dosaďte do rovnice pro vzdálenost. Moc se s tím neupravujte, jde hlavně o to, že takto jdou ony vzdálenosti pohodlně vyjádřit.
Hint 5. Vyjádřete si $D=(0,d,1-d)$, $E=(1-e,0,e)$ a $F=(f,1-f,0)$. Pro Cevovu větu si uvědomte, že přímka BE je parametrizovaná jako $x=\frac{e}{1-e}z$ a podobně pro ostatní. Pro Menealovu větu si uvědomte, že přímka DF se parametrizuje jako $(1-d)(1-f)x-(1-d)fy+dfz=0$.
Hint 6. Souřadnice X určete pomocí m a n. Následně spočtěte vzdálenost BX.
Hint 7. Dívejte se na věc z pohledu trojúhelníku ABD. Vyjádřete si všechny body a ukažte, že vektory OS i CT jsou násobkem vektoru $(2BD : -BD+CA-AB : -BD-CA+AB)$.
Hint 8. Označte Q' bod takový, že AQ' a PX jsou stejné vektory a ukažte, že vepsiště je střed Q a dotyku vepsané.
Hint 9. Nejtěžší je rozmyslet si, jak funguje barycentrika ve 3D. No, minimálně ty základní věci dost podobně :D
Hint 10. Váhy (x,y,z) bodu P chápejte skutečně jako hmotné body. Poměry obsahů přepiště do poměrů úseček a ty do x,y,z. Pak uhodněte faktorizaci.
Hint 11. Ze tří bodů najděte rovnici kružnice a čtvrtý dosaďte.
Hint 12. Najděte souřadnice F a ověřte, že leží na kružnici. Pro kontrolu $F=(p,q,r)$, kde $p+q+r=1$ a $r/p=c^2/(c^2+b^2-a^2)$ a $q/p=b^2/(b^2+c^2-a^2)$.
Hint 13. Ze tří bodů najděte rovnici kružnice (přejděte k $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$) a ukažte, že za dané podmínky čtvrtý vyhovuje (dosazením, faktorizovat netřeba). Pro kontrolu $K=(xz:yz:(y+x)^2)$ a $L=(xy:(z+x)^2:yz)$.
Hint 14. Nafoukněte každý z čtverců tak, aby jedna jeho strana splývala se stranou trojúhelníka. Pak požijte Conweyův vzorec.

Hint 15. K první části buď stačí něco tušit o antirovnoběžnosti, nebo se prostě spočítá, že vše leží na kružinici $a^2yz + b^2zx + c^2xy = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}x(x+y+z)$. Ke druhé stačí určit podíl B a C souřadnic bodu O_a (Ceva!). Ten najdete jako průsečík dvou os úseček. Vyjde $y/z = S_C/S_B$.
Hint 16. Sestavte rovnici kružnice a dosaďte do ní I'. Ze vzniklé identity faktorizujte $b^2 + c^2 - a^2$.

Postupnosti v Teórii čísel

Martin „Vodka“ Vodička

Abstrakt. Príspevok obsahuje nejaké techniky, ktoré sa dajú použiť pri úlohách kde vystupujú postupnosti, ktoré sú prevažné dané rekurentne a tiež príklady na riešenie.

K úlohám, kde je postupnosť zadaná rekurentne (t.j. ďalší člen je zadaný pomocou predošlých) sa dá pristupovať rôzne. Ukážeme si pár základných spôsobov, čo môžeme s takýmito úlohami robiť.

Jedna vec je, že môžeme skúsiť členy vyjadriť explicitne. Lineárne rekurentné rovnice sa dajú riešiť veľmi ľahko pomocou nasledujúcej vety:

Veta. Majme rekurentnú rovnicu

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = 0.$$

Potom $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0$ je charakteristický polynóm tejto rovnice. Nech $\lambda_1, dots, \lambda_t$ sú jeho korene s násobnosťami $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$. Potom postupnosti

$$\{\lambda_i^n\}, \{n\lambda_i^n\}, \ldots, \{n^{\alpha_i - 1}\lambda_i^n\}$$

pre všetky $1 \le i \le t$ spĺňajú danú rekurentnú rovnicu.

Navyše ľubovoľná ich lineárna kombinácia ich tiež spĺňa, t.j. ak si tieto postupnosti označíme ako $\{b_n^1\}, \{b_n^2\}, \ldots, \{b_n^k\}$, tak aj postupnosť $\{B_n\}$ daná ako $B_n = C_1 b_n^1 + \ldots C_k b_n^k$ spĺňa danú rekurenciu. Navyše každá postupnosť, ktorá spĺňa danú rekurenciu sa dá vyjadriť v tomto tvare, t.j. ako lineárna kombinácia spomínaných postupností.

Samozrejme niekedy je toto vyjadrenie hnusné, lebo obsahuje odmocniny alebo dokonca komplexné čísla. Napriek tomu sa s ním dá niekedy efektívne počítať. Druhý problém je, že niekedy nevieme nájsť korene charakteristického polynómu, (ak je stupňa aspoň 3), a vtedy samozrejme nemáme toto explicitné vyjadrenie.

A tiež sa môže stať, že postupnosť explicitne vyjadríme a bude nám to úplne na nič. Takže pozor na to.

Niekedy nemáme rekurenciu v takom peknom tvare. Avšak vieme rekurentný vzťah vylepšiť tým, že kus upravíme našu postupnosť. Napr. Položime $y_n = x_n + 1$ alebo $y_n = 3x_n$ alebo $y_n = x_n + x_{n+1}, \ldots$ Fantázii sa medze nekladú. Chceme to však vždy urobiť tak, aby sa rekurentný vzťah zlepšil. Triviálny príklad:

Cvičenie. Nech $x_1 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$. Dokážte, že ak je x_n prvočíslo, tak je aj n prvočíslo.

Ďalšia nepríjemná vec, čo sa môže stať je tá, že postupnosť je zadaná rekurentne, avšak n-tý člen nezáleží od predošlých 2,3 členov, ale od všetkých. V takom prípade vieme často spraviť to, že si napíšeme vyjadrenie dvoch po sebe idúcih členov a vzťahy nejak odčítame, aby sa väčeina členov vykrátila. Potom dostaneme jednoduchší vzťah. Triviálny príklad:

Cvičenie. Nech $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_1$. Dokážte, že x_{3k+2} je tretia mocnina.

Ďalšie dobré pozorovanie je nasledujúca triviálna

Lema. Ak je postupnosť $\{a_n\}$ daná rekurentne tak, že n-tý člen závisí len od predošlých k členov, a $\{a_n\}$ má len konečne veľa rôznych členov, tak $\{a_n\}$ je od istého člena periodická.

To znamená, že ak $\{a_n\}$ je ohraničená, tak je od istého člena periodická. Alebo ak počítame len zvyšky takejto postupnosti po delení niečím, tak je postupnosť periodická.

Dôležitá otázka je často to, či je postupnosť periodická od prvého člena alebo nie. To vieme ukázať tak, že zistíme či vieme v postupnosti „chodiť dozadu“, t.j. ukážeme, že n-tý člen vieme vypočítať z nasledujúcich k členov. Potom často pomáha pozrieť sa na „záporné“ členy postupnosti, ktoré sa tam akoby ani nevyskytujú, ale vďaka tomu, že je postupnosť periodická sa tam predsa len niekedy objavia.

Cvičenie. Dokážte, že pre všetky n existuje $k > 0$ také, že $n \mid F_k$.

A niekedy proste nič z toho nepomáha a často stačí stará dobrá indukcia. A keď nepomáha ani to, tak treba vymyslieť niečo úplne iné. Možností je veľa. Ale už nebudem písať blbosti a poďte radšej rátať:

Rátajte!

Úloha 1. Definujme postupnosť

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \left\lfloor \frac{3a_n}{2} \right\rfloor$$

Dokážte, že obsahuje nekonečne veľa párnych aj nepárnych čísel.

Úloha 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje taký index k, pre ktorý je číslo $F_k^4 - F_k - 2$ deliteľné číslom m. (F_n je Fibonacciho postupnosť).

(CPS 2007)

Úloha 3. Postupnosť začínajúca 1, 9, 8, 2 pokračuje tak, že nasledujúci člen je posledná cifra súčtu predchádzajúcich 4 členov. Môže sa 3, 0, 4, 4 objaviť v takej postupnosti?

Úloha 4. Postupnosť $\{a_n\}$ je definovaná vzťahmi $a_0 = 2, a_1 = 4$ a

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}.$$

Určte všetky prvočísla p, pre ktoré existuje kladné celé číslo m také, že p je deliteľom $a_m - 1$. (MEMO 2012)

Úloha 5. Pre dané celé číslo $a_0 > 1$ definujeme postupnosť $\{a_n\}$ nasledovne:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ak } \sqrt{a_n} \text{ je celé číslo,} \\ a_n + 3 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte všetky hodnoty a_0, pre ktoré existuje také číslo A, že pre nekonečne veľa indexov n platí $a_n = A$. (IMO 2017)

Úloha 6. Zistite, koľko existuje postupností celých čísel $\{a_n\}$ takých, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n \neq -1,\ a_{n+2} = \frac{a_n + 2006}{a_{n+1} + 1}$$

(CPS 2006)

Úloha 7. Nech $x_1, x_2, x_3, \ldots$ je postupnosť definovaná nasledovne:

$$x_1 = 4,\ x_{n+1} = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n + 5$$

Prvé členy postupnosti sú $x_1 = 4, x_2 = 9, x_3 = 41, \ldots$.

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel $\{a, b\}$ takých, že $x_a x_b$ je štvorec. (ITAMO 2012)

Úloha 8.

Zistite, či existuje nekonečná postupnosť $x_1, x_2, \ldots$ prirodzených čísel, ktorá obsahuje práve 10^{2016} rôznych čísel, pričom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $x_{n+2} = (x_n, x_{n+1}) + 2016$. (Výberko 2015)

Úloha 9. Nech $a, b \in \mathbb{N}$ a $u_0 = 1,\ u_{n+1} = au_n + b$. Dokážte, že postupnosť obsahuje nekonečne veľa zložených čísel.

Úloha 10. Nech postupnosť je definovaná nasledovne:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 24,\ a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}.$$

Dokážte, že a_n je prirodzené číslo a $n \mid a_n$ pre všetky n.

Úloha 11. Nech x_1 a x_2 sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Pre $n \geq 2$ definujme $x_{n+1} = x_n x_{n-1} + 1$.

a) Dokážte, že pre každé $i > 1$ existuje $j > i$ také, že $x_i^i \mid x_j^j$.

b) Je pravda, že x_1 musí deliť x_j^j pre nejaké $j > 1$?

Úloha 12. Nech m je dané prirodzené číslo väčšie ako 1. Postupnosť x_0, x_1, x_2, $\ldots$ je definovaná nasledovne:

$x_i = 2^i$ pre $0 \leq i \leq m-1$ a $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i-j}$, pre $i \geq m$.

Nájdite najväčšie k, pre ktoré postupnosť obsahuje k po sebe idúcich členov deliteľných m . (IMO Shortlist 2003)

Úloha 13. Nech $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. dokážte, že $2^k \mid a_n \Leftrightarrow 2^k \mid a_n$.

Úloha 14. Nech $a_1 = 11^{11}$, $a_2 = 12^{12}$, $a_3 = 13^{13}$,

$$a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_{n-2} - a_{n-3}|.$$

Nájdite $a_{14^{14}}$.

Úloha 15. Nech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je postupnosť prirodzenýchj čísel taká, že $(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$. Dokážte, že $a_n \geq 2^n$ pre všetky $n \geq 0$. (IMO shortlist 2008)

Úloha 16. Pre postupnosť $\{a_n\}$ platí $a_1 = c$, $a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)}$ pre všetky prirodzené čísla n. Dokážte, že ak c je prirodzené číslo, potom každý člen postupnosti je celé číslo. (KMS 2016/2017)

Úloha 17. Definujme $a_i = i$ pre $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, kde p je nejaké prvočíslo. Ďalej $a_n = a_{n-1} + a_{n-p}$. Nájdite zvyšok čísla a_{p^3} po delení p. .

Úloha 18. Nech $m = 4k^2 - 5$ pre nejaké prirodzené číslo k. Dokážte, že existujú prirodzené čísla a a b také, že postupnosť (x_n) definovaná ako

$$x_0 = a,\ x_1 = b,\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

má všetky členy nesúdeliteľné s m. (IMO Shortlist 2004)

Úloha 19. Nájdite všetky prirodzené čísla M také, že postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definovaná ako

$$a_0 = M + \frac{1}{2}, \quad a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$$

obsahuje aspoň jedno celé číslo. (IMO Shortlist 2015)

Úloha 20. Nech $y_1 = y_2 = 1$, $y_{n+2} = (4k-5)y_{n+1} - y_n + 4 - 2k$. Nájdite všetky prirodzené k také, že každý člen tejto postupnosti je štvorec prirodzeného čísla.

Hinty

Hint 1. Sporom. Ak sú všetky čísla párne/nepárne ľahko sa zbavíte celej časti a viete to vyjadriť.
Hint 2. $F_{-1} = -1$.
Hint 3. Choďte dozadu.
Hint 4. $b_n = a_n/2 + 1$ Teraz ľahko vyjadrite explicitne členy b_n. Zjavne b_n je periodická modulo p a choďte dozadu.
Hint 5. Rozoberte to podľa zvyškov po delení 3. Asi najťažšia časť je pre zvyšok 1, tam použite indukciu.
Hint 6. Napíšte si dva po sebe idúce vzťahy a zbavte sa 2006 a upravte na súčin. Rozlíšte dva prípady podľa toho, či $a_1 = a_3$ alebo nie. Ten druhý skúste sporom vylúčiť.
Hint 7. Napíšte si vyjadrenia dvoch po sebe idúcich členov a nejak tieto rovnice od seba odčítajte aby sa hnusná časť vybila. Potom si treba uvedomiť to, že každé 2 členy postupnosti sú nesúdeliteľné.
Hint 8. Pre jednoduchosť predpokladajte, že všetko je deliteľné 2016 a predeľte. Potom nájdite nejaký krátky cyklus, na ktorom postupnosť skončí (napr. $(2, 2, 3)$) a skonštrujte smerom dozadu predchádzajúce členy.
Hint 9. No to by bol strašná haluz keby nie, že? :D Ale tak vyjadrite si to explicitne a použite prvočíselného deliteľa $a + b$.
Hint 10. Pozrite sa na $b_n = a_n/a_{n-1}$, upravte rekurentný vzťah a explicitne vyjadrite b_n.
Hint 11. Pozrite sa na postupnosť modulo nejaké prvočíslo, ktoré delí a_i b) nie. Zoberte x_1 deliteľné 2 nepárnymi prvočíslami (napr. 15) a nájdite vhodné x_2.
Hint 12. Pozrite sa niekoľko členov dozadu.
Hint 13. Vyjadrite si to explicitne, zapíšte pomocou sumy kombinačných čísel a indukcia.
Hint 14. Pozrite sa na postupnosť $b_n = |a_n - a_{n-1}|$. Uvedomte si, že je ohraničená, a teda časom periodická a nájdite periódu. Potom sa na to ešte pozrite modulo 2, a modulo iné prvočísla si len uvedomte, že členy v perióde nemôžu mať všetky spoločného deliteľa.
Hint 15. Zrejme je postupnosť rastúca. Potom použite indukciu a spor - prdpokladajte, že to pre n neplatí a uvažujte aké sú tieto členy násobky ich spoločného deliteľa. Z indukčného prepokladu by vám mali stačiť len 3 nerovnosti - o $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}$.
Hint 16. Buď rovno induckiou dokážte, že to pod odmocninou je celé alebo si vypíšte pár členov a tipnite predpis $a_{n+1} = 2ca_n - a_{n-1}$ a dokážte indukciou toto. Prípadne z toho vyjadrite explicitne n-tý člen a dokážte len to indukciou. Skrátka nejak použite indukciu :).
Hint 17. Platí, že tá postupnosť je periodická modulo p s periódou $p^2 - 1$. Vyjadrite si a_n pomocou členov $a_{n-p^2-p}, \dots a_{n-p^2-1}$. Jednoduchšie je však pracovať s „obrátenou“ postupnosťou $b_n = a_{-n}$, ktorá má jednoduchší rekurentný vzťah. Alternatívne stačí ukázať, že $x^p - x + 1 \mid x^{p^2} - x$ v $\mathbb{Z}_p[x]$:P
Hint 18. Zoberte si nejaké prvočíslo p, ktoré delí m a vyjadrite si tú postupnosť explicitne modulo p. Využite pri tom, že $\sqrt{5}$ modulo p existuje. Potom len zvoľte vhodné konštanty.
Hint 19. Predpokladajte, že nie a uvažujte postupnosť $b_n = a_n - \frac{3}{2}$. Dokážte, že $v_2(b_n)$ sa stále zmenšuje o 1.
Hint 20. Vyjadrite si y_3, y_5 a ukážte, že nemôžu byť oba štvorce pre $k > 3$ (uzavrite y_5 medzi dva štvorce). Pre $k = 3$ si to vyjadrite explicitne (fuj, blé, humus) a fakt to vyjde.

Invarianty a monovarianty

Vašek Voráček

Abstrakt. Příspěvek obsahuje úlohy na invarianty a monovarianty. V ukázkách jsou jednoduché úlohy na představení jednotlivých typů úloh. Složitější úlohy jsou především z IMO shortlistů a národních olympiád.

Ukázky invariantů

Úloha 1. Drak má 100 hlav. rytíř jich umí najednou useknout 15, 17, 20, nebo 5. následně drakovi naroste v jednotlivých případech 24, 2, 14, nebo 17 hlav. Pokud drak nemá žádnou hlavu, zemře. Může drak zemřít?

Úloha 2. Šachovnici 8×8 jsme pokryli 21 obdélníčky 3×1 tak, že právě 1 políčko zůstalo nepokryté. Kde může být toto volné políčko?

Úloha 3. Petra a Dalila sa najnovšie nehrávajú so zápalkami, ale s peniazmi, ktoré ušetria tým, že si nekupujú zápalky. Zoberú si n korunáčiek a umiestnia ich na stole do jedného radu. Dievča, ktoré je na ťahu, si vyberie jednu mincu, ktorá je znakom hore, otočí ju, ako aj všetky ostatné napravo od nej. Potom je na ťahu druhé dievča. Takto striedavo ťahajú, pričom začína skúsenejšia Petra. Prehrá tá, ktorá už nevie spraviť ťah. Ukážte, že táto hra vždy skončí po konečnom počte krokov. Ktorá hráčka má víťaznú stratégiu? (KMS, 2002/03, Z1, 8)

Úloha 4. Je možné vyplnit šachovnici 10×10 kostičkami 4×1?

Úloha 5. Je dáno 5 bodů: $(-5, 10)$, $(8, 7)$, $(-3, 4)$, $(6, 5)$, $(9, 4)$. Jsou povoleny následující 2 operace. Buď můžeme vybrat 2 body, jeden z nich posunout o jednotku nahoru a druhý o jednotku doprava, nebo vybereme 2 body a jeden nich posuneme o jednotku dolů a druhý o jednotku doleva. Najdi množinu všech bodů (x, y) takových, že po konečném počtu operací mohou být všechny body právě (x, y).

Ukázky monovariantů

Úloha 6. Do kruhu je uspořádáno n lamp. Stav lampy je buď vypnutá, nebo zapnutá. V každém kroku se v jeden moment přepne (změní stav) každá lampa, která nesousedí s lampou stejného stavu. Pro jaká n se po nějakém počtu kroků už nezmění stav žádné lampy při libovolném počátečním rozdělení stavů?

(Kanada 1994, upraveno)

Úloha 7. Mějme na tabuli napsaná přirozená čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. V jednom tahu můžeme vybrat dvě čísla x_i a x_j taková, že ani jedno nedělí druhé a nahradit je postupně $\gcd(x_i, x_j)$ a $\operatorname{lcm}(x_i, x_j)$. Ukaž, že můžeme udělat pouze konečně mnoho tahů. (Putnam 2008)

Úloha 8. Každý senátor má nejvýše 3 nepřátele, nemůže být svým nepřítelem a nepřátelství je vzájemné. Dokaž, že umíme senát rozdělit na 2 frakce tak, že každý senátor má nejvýše jednoho nepřítele ve své frakci.

Úloha 9. Several positive integers are written in a row. Iteratively, Alice chooses two adjacent numbers x and y such that $x > y$ and x is to the left of y, and replaces the pair (x, y) by either $(y + 1, x)$ or $(x - 1, x)$. Prove that she can perform only finitely many such iterations. (IMO Shortlist 2012)

Úloha 10. V rovině je n červených a n modrých bodů. Žádné 3 neleží na přímce. Ukaž, že umíme najít n úseček spojujících červený a modrý bod, tak, že žádné 2 úsečky nemají společný bod.

Těžší úlohy

Úloha 11. Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8. Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz? (KMS, 2003/04, L1, 10)

Úloha 12. Na začátku, 9 ze 100 čtverců v mřížce 10×10 je infikovaných. Pokud čtverec sousedí s alespoň 2 infikovanými čtverci, stane se takové infikovaným. Je možné, že nakonec budou všechny čtverce infikované?

Úloha 13. Five identical empty buckets of 2-liter capacity stand at the vertices of a regular pentagon. Cinderella and her wicked Stepmother go through a sequence of rounds: At the beginning of every round, the Stepmother takes one liter of water from the nearby river and distributes it arbitrarily over the five buckets. Then Cinderella chooses a pair of neighbouring buckets, empties them to the river and puts them back. Then the next round begins. The Stepmother goal's is to make one of these buckets overflow. Cinderella's goal is to prevent this. Can the wicked Stepmother enforce a bucket overflow? (IMO Shortlist 2009)

Úloha 14. 200×200 square is colored in chess order. In one move we can take every 2×3 rectangle and change color of all its cells. Can we make all cells of square in same color? (St Peterburg Olympiad 2010)

Úloha 15. V každém políčku desky $m \times n$ je napsáno přirozené číslo. V jednom kroku můžeme přičíst stejné celé číslo k číslům ve 2 sousedních polí, pokud obě čísla zůstanou nezáporná. Kdy můžeme po konečném počtu kroků dosáhnout stavu, že ve všech polích tabulky je 0? (IMO Shortlist 1989)

Úloha 16. A house has an even number of lamps distributed among its rooms in such a way that there are at least three lamps in every room. Each lamp shares a switch with exactly one other lamp, not necessarily from the same room. Each change in the switch shared by two lamps changes their states simultaneously. Prove that for every initial state of the lamps there exists a sequence of changes in some of the switches at the end of which each room contains lamps which are on as well as lamps which are off. (IMO Shortlist 2005)

Úloha 17. Na začátku je jen jedna kulička a ta je na pozici $(0, 0)$. Pokud je na pozici (i,j) kulička a na pozicích $(i, j + 1)$, ani $(i + 1, j)$ není, pak můžeme z pozice (i, j) odebrat kuličku a dát po 1 kuličce na pozice $(i + 1, j)$ a $(i, j + 1)$. Dokaž, že vždy budou existovat a a b, $a + b \leq 3$ taková, že na pozici (a, b) je kulička.
(Indie TST 2004)

Úloha 18. V bodě $(0, 0)$ jsou 4 kamínky. V jednom kroku můžeme odebrat kamínek z bodu (i, j) a umístit po 1 kamínku na $(i+1, j)$ a $(i, j+1)$. Dokažte, že po libovolném počtu kroků budou vždy v nějakém bodě alespoň 2 kamínky.

Úloha 19. On an infinite chessboard, a solitaire game is played as follows: at the start, we have n^2 pieces occupying a square of side n. The only allowed move is to jump over an occupied square to an unoccupied one, and the piece which has been jumped over is removed. For which n can the game end with only one piece remaining on the board? (IMO 1993 P3)

Úloha 20. Ve vrcholech pětiúhelníka jsou napsaná celá čísla tak, že jejich součet je 2011. V jednom kroku můžeme od každého ze dvou sousedních vrcholů odečíst libovolné m a k jejich protějšímu vrcholu příčíst $2m$. Ukaž, že pokud dosáhneme stavu, ve kterém jsou ve všech vrcholech, kromě jednoho 0 a ve zbývajícím 2011, je tento "zbývající" vrchol určen počáteční konfgurací jednoznačně.

Úloha 21. Each term in a sequence $1, 0, 1, 0, 1, 0$...starting with the seventh is the sum of the last 6 terms mod 10. Prove that the sequence $..., 0, 1, 0, 1, 0, 1...$ never occurs.

Úloha 22. A solitaire game is played on an $m \times n$ board with markers having one white side and one black side. Each of the mn cells contains a marker with its white side up, except for one corner square which has a marker with its black side up. The allowed move is to select a marker with black side up, remove it, and turn over all markers in squares sharing a side with the square of the chosen marker. Determine all pairs (m, n) for which it is possible to remove all markers from the board.
(IMO shortlist 1998)

Úloha 23. There are n markers, each with one side white and the other side black, aligned in a row so that their white sides are up. In each step, if possible, we choose a marker with the white side up (but not one of the outermost markers), remove it and reverse the closest marker to the left and the closest marker to the right of it. Prove that one can achieve the state with only two markers remaining if and only if $n - 1$ is not divisible by 3. (IMO shortlist 2005)

Úloha 24. Máme 3 hromady kamenů. Z jedné hromady můžeme přehodit několik kamenů do druhé, pokud tím zdvojnásobíme počet kamenů ve druhé hromadě. Je možné takto zrušit některou hromadu? (IMO Shortlist 1994)

Úloha 25. We have 2^m sheets of paper, with the number 1 written on each of them. We perform the following operation. In every step we choose two distinct sheets; if the numbers on the two sheets are a and b, then we erase these numbers and write the number $a + b$ on both sheets. Prove that after $m2^{m-1}$ steps, the sum of the numbers on all the sheets is at least 4^m. (IMO Shortlist 2014)

Úloha 26. Let $n \geq 2$ be a positive integer and λ a positive real number. Initially there are n fleas on a horizontal line, not all at the same point. We define a move as choosing two fleas at some points A and B, with A to the left of B, and letting the flea from A jump over the flea from B to the point C so that $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Determine all values of λ such that, for any point M on the line and for any initial position of the n fleas, there exists a sequence of moves that will take them all to the position right of M. (IMO Shortlist 2000)

Úloha 27. Starting with the triple $(1007\sqrt{2}, 2014\sqrt{2}, 1007\sqrt{14})$, define a sequence of triples (x_n, y_n, z_n) by

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(y_n + z_n - x_n)}$$

$$y_{n+1} = \sqrt{y_n(z_n + x_n - y_n)}$$

$$z_{n+1} = \sqrt{z_n(x_n + y_n - z_n)}$$

for $n \geq 0$.Show that each of the sequences $\langle x_n \rangle_{n\geq 0}, \langle y_n \rangle_{n\geq 0}, \langle z_n \rangle_{n\geq 0}$ converges to a limit and find these limits. (Indie TST)

Úloha 28. A crazy physicist discovered a new kind of particle wich he called an imon, after some of them mysteriously appeared in his lab. Some pairs of imons in the lab can be entangled, and each imon can participate in many entanglement relations. The physicist has found a way to perform the following two kinds of operations with these particles, one operation at a time.

(i) If some imon is entangled with an odd number of other imons in the lab, then the physicist can destroy it.

(ii) At any moment, he may double the whole family of imons in the lab by creating a copy I' of each imon I. During this procedure, the two copies I' and J' become entangled if and only if the original imons I and J are entangled, and each copy I' becomes entangled with its original imon I; no other entanglements occur or disappear at this moment.

Prove that the physicist may apply a sequence of much operations resulting in a family of imons, no two of which are entangled. (IMO Shortlist 2013)

Úloha 29. Some positive integers are initially written on a board, where each 2 of them are different. Each time we can do the following moves:

(i) If there are 2 numbers (written in the board) in the form $n, n + 1$ we can erase them and write down $n - 2$

(ii) If there are 2 numbers (written in the board) in the form $n, n+4$ we can erase them and write down $n-1$

After some moves, there might appear negative numbers. Find the maximum value of the integer c such that: Independetly of the starting numbers, each number which appears in any move is greater or equal to c. (Řecko TST)

Literatura a zdroje

[1] Pranav A. Sriram, *Olympiad Combinatorics*

[2] Miro Psota, *Invarianty, monovarianty*, *i*KS sborníček 2015

Hinty

Hint 1. Modulo
Hint 2. Barvení
Hint 3. Binárka
Hint 4. Barvení
Hint 5. Pokud je v množině (a, b), o jakých dalších bodech umíme říci, že tam budou? Potom ověř, jestli se do nějakého takového bodu umíme dostat.
Hint 6. Co se dá říci o chování jednotlivých lamp?
Hint 7. Co se nemění? Co se naopak zvětšuje?
Hint 8. Nějak je rozdělit a pak přesouvat
Hint 9. Najdi výraz, který se v každém kroku zvýší
Hint 10. Nějak to spoj a odstraňuj křížení
Hint 11. modulo 3
Hint 12. Obvod
Hint 13. Najdi invariant v začátku každého kola
Hint 14. Nejde to. obarvi a najdi nějaký spor.
Hint 15. Deska je třeba šachová deska
Hint 16. Sporem
Hint 17. Následující úloha
Hint 18. Předpokládej, že všechny kamínky jsou na samostatném políčku, kterých je konečně mnoho a najdi spor s nějakým invariantem.
Hint 19. 3 barvy
Hint 22. Uhodnout řešení a indukci, na zbytek parita
Hint 23. Na jednu část indukci, na druhou modulo
Hint 24. Binárka a dělení se zbytkem
Hint 25. V průběhu řešení se dá použít AG nerovnost
Hint 27. x, y, z jsou strany trojúhelníka
Hint 28. Je to graf a dá se využít jeho barevnost - nejmenší počet barev, kterými lze obrarvit graf, aby 2 vrcholy spojené hranou měly různou barvu.

Obsah

Diofantovské rovnice (Filip Bialas) 4
Mocnost bodu ke kružnici (Verča Hladíková) 9
Lagrangeova interpolace (Jakub Löwit) 18
Entropie a Jensenova nerovnost (Vašek Rozhoň) 24
Kombinatorické konstrukce (Štěpán Šimsa) 30
Barycentrické souřadnice (Rado van Švarc) 37
Postupnosti v Teórii čísel (Martin „Vodka“ Vodička) 44
Invarianty a monovarianty (Vašek Voráček) 49