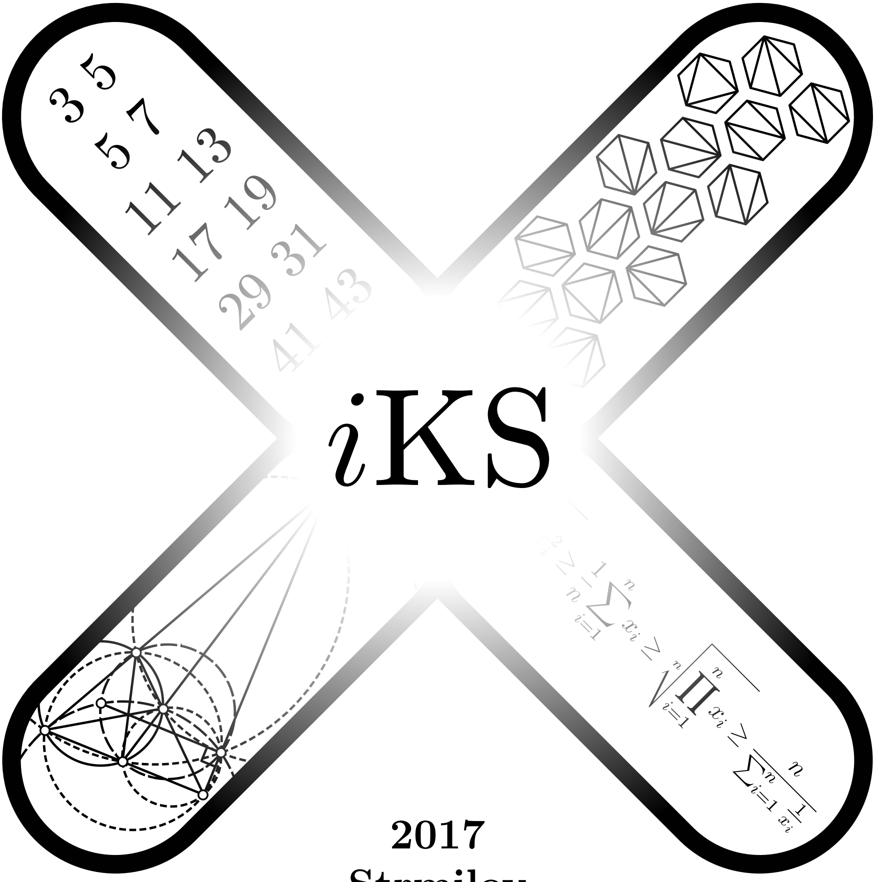

2017

Strmilov

Slavomír Hanzely
David Hruška
Anh Dung „Tonda“ Le
Jakub Löwit
Mirek Olšák
Marian Poljak
Štěpán Šimsa
Rado van Švarc
Martin „Vodka“ Vodička
Václav Voráček

Pravdepodobnostná metóda

Slavomír Hanzely

Abstrakt. Príspevok obsahuje základnú myšlienku pravdepodobnostnej metódy a úlohy na zžitie sa s ňou. Na konci nájdete návody na riešenie spomínaných úloh.

Pravdepodobnostná metóda sa opiera o náhodné javy. Keď chceme dokázať existenciu nejakej situácie, stačí nám ukázať, že pri vhodne zvolenom náhodnom generovaní situácii je nenulová šanca na vygenerovanie danej situácie. Inými slovami medzi vygenerovanými situáciami je menej „ostatných“ situácií ako všetkých situácií.

Začnime vypísaním si všetkých tvrdení.

Definícia. *Elementárnym javom* nazývame situáciu, ktorá nastala po náhodnom procese (napríklad na prvej kocke padla trojka, na druhej dvojka a na tretej trojka). Pravdepodobnosť, že nastal jav A značíme $P(A)$. Ak nastal jav A a súčasne nastal jav B, značíme to $A \cap B$. Ak nastal jav A alebo nastal jav B značíme $A \cup B$. *Nezávislé javy* sú také, pre ktoré platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definícia. *Náhodná veličina* je reálne číslo, ktoré spočítame na základe elementárneho javu. Napríklad číslo, ktoré padlo na prvej kocke alebo počet kociek, na ktorých padla trojka.

Definícia. *Stredná hodnota* náhodnej veličiny X je jej priemerná hodnota, označuje sa $E(X)$. Presnejšie je $E(X)$ vážený aritmetický priemer všetkých hodnôt X počas elementárnych javoch (váhy sú pravdepodobnosti daných javoch).

Veta. Pre každé javy A, B (môžu byť aj závislé) platí $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Veta (Počítanie strednej hodnoty).

(i) Nech A je jav a I_A náhodná veličina, ktorý dáva nulu (ak jav A nenastal) a jednotku (ak A nastal). Potom $E(I_A) = P(A)$.
(ii) Nech X, Y sú náhodné veličiny, potom $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
(iii) Nech X je náhodná veličina a r reálne číslo, potom $E(r \cdot X) = r \cdot E(X)$.

Hurá na úlohy:

Príklad. Majme tabuľku 100 x 100, na každom políčku jedno z čísel 1, 2, …, 5000, každé práve dvakrát. Dokážte, že možno vybrať 100 políčok tabuľky, aby boli splnené nasledovné podmienky.

(i) V každom riadku aj stĺpci je práve jedno vybrané políčko.
(ii) Čísla na vybraných políčkach sú po dvojiciach rôzne.

Riešenie. Zoberme si náhodnú premutáciu $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ čísel $\{1, \ldots, 100\}$. Vyberieme políčka v i-tom riadku a a_i-tom stĺpci (podmienka (1) je splnená). Pozrime sa na číslo j z $\{1, 2, \ldots, 5000\}$. Aká je pravdepodobnosť, že sme vybrali obe políčka s hodnotou j? Ak boli dané políčka v rovnakom riadku, tak je 0, inak je to $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{99}$. Pravdepodobnosť, že sme vybrali dvojicu políčok s rovnakou hodnotou je teda určite nanajvýš $5000 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{99} < 1$. Pravdepodobnosť, že medzi vybranými políčkami nie je dvojica políčok s rovnakou hodnotou je viac ako nula, čím je dôkaz hotový.

Príklad. V jazykovej škole sa vyučuje $2n$ jazykov. Každý z 500 učiteľov hovorí aspoň n jazykmi. Dokážte, že možno vybrať 14 (alebo menej) jazykov takých, že každý učiteľ rozpráva aspoň jedným z nich.

Riešenie. Náhodne si zvoľme 14 jazykov. Pravdepodobnosť, že konkrétny učiteľ nerozpráva konkrétnym jazykom je nanajvýš $\frac{1}{2}$. Pravdepodobnosť, že konkrétny učiteľ nerozpráva žiadnym z daných jazykov je nanajvýš $\frac{1}{2^{14}}$. Pravdepodobnosť, že aspoň jeden učiteľ nerozpráva žiadnym z daných jazykov je $\frac{500}{2^{14}}$.

Úloha 1. V turnaji n hráčov hral každý s každým práve raz. Hamiltonovská cesta je také usporiadanie n hráčov, že prvý porazil druhého, druhý tretieho, … Dokážte, že turnaj mohol dopadnúť tak, že by existovalo aspoň $n!/2^{n-1}$ hamiltonovských ciest.

Úloha 2. Dané sú nesúdeliteľné prirodzené čísla m, n. Aký je počet ciest po mriežke v obdĺžniku $m \times n$ z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu, ktoré idú iba doprava a hore a sú celé pod uhlopriečkou? (MKS 26-5-8)

Úloha 3. Nech X je taká množina konečných postupností núl a jednotiek, že žiadna postupnosť z X nie je začiatkom inej postupnosti z X. Pre $p \in X$ označme $|p|$ dĺžku postupnosti p. Dokážte:

$$\sum_{p \in X} \frac{1}{2^{|p|}} \leq 1.$$

Úloha 4 (Spernerova veta). Nech $\boldsymbol{F}$ je systém množín taký, že žiaden prvok z $\boldsymbol{F}$ nie je podmnožinou iného prvku z $\boldsymbol{F}$. Dokážte

$$\sum_{S \in F} \frac{1}{\binom{n}{|S|}} \leq 1.$$

Úloha 5. V skupine 90 detí má každé aspoň 30 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Dokážte, že možno rozdeliť deti do troch 30-členných skupín tak, aby každé dieťa malo vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta. (CK MO 2011/2012)

Úloha 6. Matematickej súťaže sa zúčastnilo 200 študentov. Každý študent riešil 6 úloh. Každú úlohu vyriešilo aspoň 120 študentov. Dokážte, že možno vybrať dvoch študentov, ktorí spolu vyriešili všetky úlohy. (IMC 2002)

Úloha 7. Majme 2^{d-1} d-prvkových množín, $d \geq 2$. Dokážte, že je možné ofarbiť prvky množín dvoma farbami tak, aby každá množina obsahovala prvky oboch farieb.

Úloha 8. Ukážte, že je možné ofarbiť prvky množiny $\{1, 2, \dots, 1987\}$ štyrmi farbami tak, aby neexistovala jednofarebná desaťprvková aritmetická postupnosť.

(IMO Shortlist 1987)

Úloha 9. Dokážte, že je možné ofarbiť hrany úplného grafu s menej ako $2^{\frac{k}{2}}$ vrcholmi dvomi farbami tak, aby v ňom nebol žiadny úplný jednofarebný podgraf s k vrcholmi.

Úloha 10. V rovine je 100 bodov vo všeobecnej polohe. Dokážte, že počet ostrouhlých trojuholníkov neprevyšuje 70% počtu všetkých trojuhelníkov. (IMO 1970)

Úloha 11. V turnaji hralo n hráčov každý s každým práve raz. Nazvime turnaj k-nezoraditeľný, ak pre každú k-prvkovú množinu hráčov nájdeme iného hráča, ktorý porazil všetkých hráčov z tejto množiny. Dokážte, že pre každé k možno nájsť $n > k$ také, že existuje k-nezoraditeľný turnaj n hráčov.

Úloha 12. Povedzme, že permutácia $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ na množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ má vlastnosť V, ak pre nejaké $i \in \{1, 2, \dots 2n-1\}$ platí $|x_{i+1} - x_i| = n$. Dokážte, že pre každé n je viac permutácii s vlastnosťou V ako bez nej. (IMO 1989)

Úloha 13. V škole sa vyučuje n predmetov, každý sa vyučuje v angličtine a čínštine. Študenti sa učia niektoré (alebo aj všetky) predmety, každý predmet v práve jednom z daných jazykov. Pre každú dvojicu predmetov existuje študent, ktorý sa ich učí v rôznych jazykoch. Nájdite najväčšiu hodnotu n, keď vieme, že každý predmet navštevuje nanajvýš 10 študentov.

Úloha 14. Nech F je množina všetkých n-tíc $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, kde každé A_i je podmnožinou $1, 2, \dots, 1998$. Označme $|A|$ počet prvkov množiny A. Nájdite hodnotu

$$\sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n)} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

(APMO 1998)

Úloha 15. V šachovom turnaji, ktorého se zúčastnilo 40 hráčov, sa odohralo celkom 80 partií, pričom žiadna dvojice spolu nehrala viackrát. Ukážte pre čo najväčšie n, že existuje n hráčov, ktorý medzi sebou nehrali žiaden zápas.

Úloha 16. Na večierku je $n \geq 2$ hostí, pričom poznanie sa je vzájomné. Dokážte, že existujú dvaja ľudia A, B takí, že medzi ostatnými $n-2$ hosťami možno nájsť $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ takých, ktorí majú rovnaký vzťah k A a B (buď ich oboch pozná, alebo ich oboch nepozná). (USAMO 1985)

Literatúra a zdroje

[1] Mirek Olšák, *Od Dirichleta k pravděpodobnosti, sborník iKS 2012*

[2] Law Ka Ho, *Probabilistic Method, Mathematical Excalibur, 2009*

[3] Sourav Chakraborty, *Probabilistic method, lecture notes*

[4] Martin Töpfer, *Pravděpodobnostní metoda*

Hinty

Hint 1. Náhodne si usporiadajme hráčov. Aká je pravdepodobnosť, že dané usporiadanie je hamiltonovská cesta?
Hint 2. Otočte si mriežku tak, aby uhlopriečka bola vodorovne. Ľubovoľná priamka cez mrežové body obdĺžnika (okrem uhlopriečky) nie je vodorovná. Rozdeľte si cesty na skupiny po $m + n$ prvkov také, že v každej skupine je práve jedna cesta vyhovujúca zadaniu.
Hint 3. Postupne náhodne generujte postupnosť núl a jednotiek (obe majú šancu $\frac{1}{2}$). Zastavte sa, keď získate postupnosť z X alebo postupnosť, ktorá je dlhšia ako všetky postupnosti z X. Aká je pravdepodobnosť, že vygenerujete postupnosť z X?
Hint 4. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná podmnožina obsahuje daný prvok F? A aká je pravdepodobnosť, že náhodná podmnožina obsahuje nejaký prvok z F?
Hint 5. Rozdeľte deti náhodne do skupiniek. Aká je pravdepodobnosť, že jedno dieťa nemá vo svojej skupine žiadneho kamaráta? Odhadnite pravdepodobnosť, že aspoň jedno dieťa nemá vo svojej skupine žiadneho kamaráta.
Hint 6. Vezmime si dvoch náhodných študentov. Aká je pravdepodobnosť, že konkrétnu úlohu ani jeden z nich nevyriešil? Aká je pravdepodobnosť, že má aspoň jedna úloha túto vlastnosť?
Hint 7. Ofarbite prvky náhodne (s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$). Aká je pravdepodobnosť, že daná množina je jednofarebná? Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jedna postupnosť je jednofarebná?
Hint 8. Ofarbite množinu farbami náhodne štyrmi farbami. Aká je pravdepodobnosť, že daná desaťprvková postupnosť je jednofarebná? Koľko je aritmetických desaťprvkových postupností?
Hint 9. Ofarbime graf náhodne dvomi farbami. Aká je pravdepodobnosť, že daná k-prvková množina vrcholov tvorí jednofarebný podgraf? Aká je pravdepodobnosť, že niektorá k-prvková množina tvorí jednofarebný podgraf?
Hint 10. Dokážte to pre päť bodov. Odhadnite pravdepodobnosť, že náhodný trojuholnik bude ostroúhlý. Náhodný trojuholník vyberte tak, že vyberiete päť náhodných bodov a dve z nich zahodíte.
Hint 11. Nech zápasy v turnaji skončili náhodne. Pravdepodobnosť, že pre danú množinu hráčov iný hráč prehral s niektorým z nich je nezávislá na n. Pravdepodobnosť, že všetci hráči prehrali s niektorým z daných hráčov (nie nutne rovnakým) je exponenciálna v závislosti od n. Počet všetkých k-prvkových množín hráčov je iba polynomiálna v závislosti na n.
Hint 12. Označme A_i jav, že $|x_{i+1} - x_i| = n$. Koľko je $P(A_i)$? A koľko je $P(A_i \cap A_j)$? Pomocou princípu inklúzie a exklúzie odhadnite $P(V)$.
Hint 13. Odpoveď je 1024, nájdite príklad. Na dokázanie, že viac to byť nemôže, priraďte náhodne každému študentovi primárny jazyk. Rátajte pravdepodobnosť, že sa všetkým študentom na (konkrétnom) predmete zhoduje primárny jazyk s jazykom predmetu. Ukážte, že šanca, že sa to stalo na aspoň jednom predmete je pre $n > 1024$ viac ako 1.
Hint 14. Koľko je členov v súčte? Koľko je priemerná hodnota členu?
Hint 15.
(i) (Návod na n=5) Náhodne vyberte niekoľko hráčov, každého s pravdepodobnosťou 0.25.

Z daných hráčov vyhoďte všetkých (naraz), čo prehrali s nejakým iným vybraným hráčom. Z koľkých zápasov sme v priemere vybrali oboch hráčov (ktorých sme zahodili)?
(ii) (Návod na n=8) Nech majú hráči náhodne pridelený ranking (po dvojiciach rôzny). Vyberte hráčov, ktorý hrali iba s hráčmi s nižším rankingom. Aká je pravdepodobnosť na výber konkrétneho hráča? Zdola odhadnite súčet pravdepodobností hráčov (že boli vybraní).

Hint 16. Uvažujte pevného človeka a náhodnú dvojicu A, B. Zdola odhadnite pravdepodobnosť, že tento človek má rovnaký vzťah k A a B? Aká je stredná hodnota počtu ľudí, ktorý majú rovnaký vzťah k A a B?

Vytvořující funkce

David Hruška

Abstrakt. Ať už pracujeme s kombinatorickými identitami, lineárními rekurencemi nebo prostě jen řešíme náhodnou úlohu na pomezí algebry, kombinatoriky a teorie čísel, stále se setkáváme s posloupnostmi. Teorie, kterou si na přednášce představíme, přiřazuje každé posloupnosti objekt se kterým se většinou lépe pracuje, ale přesto z něj lze původní posloupnost alespoň principiálně zrekonstruovat. Tento koncept má široké využití v mnoha odvětvích matematiky.

Motivace

Dobrým příkladem ilustrujícím kombinatorické vlastnosti nebo možná spíš důsledky aritmetických pravidel je binomická věta. Skutečně, je snadné nahlédnout, že koeficient u x^k polynomu $(1+x)^n$ je právě počet způsobů, jak vybrat k závorek z n, neboli $\binom{n}{k}$.

Úloha 1. Kolika způsoby lze zaplatit částku 12 korun, pokud máme k dispozici dvě pětikoruny, tři dvoukoruny a pět korunových minicí?

Z představy roznásobení závorek $(1+x+x^2+\ldots+x^5)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^{10})$ vidíme, že výpočet koeficient u x^{12} probíhá stejně jako počítání počtu možností ze zadání. Pokud nás zajímá jen toto jedno číslo, tento postup zřejmě příliš nepomůže, ale je to alespoň přehledný způsob řešení, při kterém spíš neuděláme chybu. Navíc, pokud například počítač naučíme násobit polynomy, můžeme mu snadno zadat mnoho podobných úloh rutinním způsobem.

Trocha analýzy na úvod

Zavedeme několik pojmů z matematické analýzy. Naučíme se s nimi alespoň pro naše účely správně pracovat, ale příslušná tvrzení většinou nebudeme dokazovat.

Definice. Mocninnou řadou rozumíme formální sumu $A(x) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Slovo *formální* v předchozím znamená, že ne vždy má uvedený nekonečný součet ten smysl, který bychom mu intuitivně chtěli přisoudit – totiž že je to funkce, která číslu (reálnému nebo komplexnímu) x přiřadí takové číslo $A(x)$, ke kterému se částečné součty $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ „blíží“. Přesněji, pro každé $\varepsilon > 0$ by měl existovat index n_0 takový, že pro každý index $n \geq n_0$ platí $|A(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i| < \varepsilon$.[1] Pokud toto platí, říkáme, že $A(x)$ je součtem řady $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, nebo také že řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *konverguje* k číslu $A(x)$.

[1] Tento výrok spolu s obměnami, které se vztahují ne na řady, ale na posloupnosti a funkce, pro něž definuje tzv. *limity*, je základem celé matematické analýzy, takže stojí za to si na něj zvyknout.

Tvrzení (Konvergence mocninné řady). Nechť $a_0, a_1, \ldots$ je posloupnost reálných[1] čísel splňující

$$|a_n| \leq K^n \tag{E}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a nějaké $K > 0$. Pak pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje. Platí i opačná implikace, neboli podmínka (E) je nutná.

Definice (Operace s mocninnými řadami). Součet, rozdíl a součin (formálních) mocninných řad definujeme následovně:

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \pm \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i := \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \pm b_i) x^i$
- $\displaystyle\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) := \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, kde $\displaystyle c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$.

Tato definice asi nikoho nepřekvapí, protože analogicky to funguje pro polynomy a mocninné řady jsou jen „nekonečné“ polynomy. Zajímavější je fakt, že pokud obě řady splňují podmínku (E) z posledního tvrzení, obě nově definované mocninné řady konvergují a jejich součet je roven součtu (resp. rozdílu nebo součinu) součtů původních řad. Zjednodušeně řešeno, mocninné řady přísušné nepříliš rychle (nejvýše exponenciálně) rostoucím posloupnostem se jakožto funkce proměnné x chovají rozumně na nějakém intervalu kolem nuly.

Nejobtížnějším analytickým pojmem, se kterým budeme (muset) pracovat, je[2] tzv. *derivace.*

Definice. Derivací funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in (a, b)$ rozumíme číslo

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, pro které platí

$$|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

Na první pohled je možná obtížné se takové definice neleknout, ale zatneme zuby a zkusíme ji nějak vstřebat, bude se nám totiž[3] hodit. Co to tedy má znamenat? Jak jsme řekli, součet řady je (pokud existuje) číslo, ke kterému se součty řady „neomezeně přibližují“ součty prvních n členů této řady, když „pošleme n do nekonečna“. Podobně derivace funkce f v bodě x je (pokud existuje) číslo, k němuž se „neomezeně přibližují“ podíly z předchozí definice, jejichž geometrickým významem (nakreslete si) je $\mathrm{tg}(\alpha_h)$, kde α_h je úhel, který svírá sečna grafu f vedená

[1] Pro komplexní čísla to platí úplně stejně, my pro pohodlí zůstaneme u reálných.
[2] opěvovaná i nenáviděná
[3] na přednášce a zejména v reálném životě

body $[x, f(x)]$ a $[x+h, f(x+h)]$, když číslo h pošleme do nuly. S tímto vysvětlením se pokusíme spokojit a vystačit.

Tvrzení (Vlastnosti derivace). Pokud existují $f'(x)$ a $g'(x)$, funkce h splňuje $h(t) = x$ a existuje $h'(t)$, a posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ splňuje podmínku (E), platí

(i) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
(ii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
(iii) $(f(h(t))' = f'(x)h'(t) = f'(h(t))h'(t)$,
(iv) $(x^m)' = mx^{m-1}$ pro každé celé (!) číslo m
(v) $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$

Vytvořující funkce

Po tom, co jsme se tak dlouho babrali s mocninnými řadami, jistě nikoho nepřekvapí, jaký že objekt budeme posloupnostem přiřazovat.

Definice. Pro danou posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ splňuící (E) podmínku definujeme její *vytvořující funkci*[1] jako součet jí příslušné mocninné řady $A(x) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Poznámka. Z tvrzení o konvergenci mocninné řady dostáváme, že funkce $A(x)$ je definovaná na nějakém okolí nuly.

Funkce $A(x)$ je jistě *vytvořena* posloupností $(a_i)_{i=0}^{\infty}$. Lze ale tento postup obrátit a zrekonstruovat posloupnost z její vytvořující funkce? Obecně na tuto otázku dává kladnou odpověď následující tvrzení.

Tvrzení (Taylorova řada). Pokud funkce f lze na nějakém okolí rozvinout do mocninné řady $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ (neboli je jejím součtem, neboli $f(x) = A(x)$), pak platí $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ (čitatel je i-tá derivace funkce f v bodě 0).

To už je na nás přece jen trochu moc derivování, použijeme proto jiný přístup. Vyjdeme z geometrické posloupnosti, jejíž vytvořující funkci snadno určíme a představíme několik operací, které nám umožní z již známých vytvořujících funkcí vytvářet nové. Ještě si však uvedeme jedno tvrzení, které je důsledkem předchozího, ale neobsahuje derivace.

Tvrzení (Zobecněná binomická věta). Pro libovolné reálné číslo r definujeme kombinační číslo $\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$. Pro každé $|x| < 1$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \ldots$$

[1] anglicky *generating function*

Geometrická řada

Důsledkem známého vztahu $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ je vzorec pro součet geometrické řady: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ pro $|x| < 1$.

Cvičení. Z definice součtu řady dokažte vzorec pro součet geometrické řady.

Jelikož geometrická řada s kvocientem x není nic jiného než mocninná řada posloupnosti $(1, 1, \ldots)$, je naše první vytvořující funkce na světě. Přesněji je to první vytvořující funkce nekonečné posloupnosti, protože vytvořující funkce konečných posloupností jsou zřejmě polynomy.

Cvičení (Operace s vytvořujícími funkcemi). Je dána posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ a její vytvořující funkce $A(x)$. Najděte vytvořující funkce posloupností

(i) $(\alpha a_i)_{i=0}^{\infty}$,
(ii) $\left(\alpha^i a_i\right)_{i=0}^{\infty}$,
(iii) $(\underbrace{0, 0, \ldots,}_{k} a_0, a_1 \ldots)$,
(iv) $(a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, a_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, a_2 \ldots)$,
(v) (zajímavější) $(\sum_0^n a_i)_{n=0}^{\infty}$
(vi) $(i \cdot a_i)_{i=0}^{\infty}$

a posloupnosti dané funkcemi:

(i) $A(x)B(x)$ ($B(x)$ je vytvořující funkce $(b_i)_{i=0}^{\infty}$),
(ii) $C(x)$ splňující $C'(x) = A(x)$ na nějakém okolí nuly a $C(0) = 0$.

Návod. Pro bod (v) uvažte součin $(1+x+x^2+\ldots)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$ a u (vi) si vzpomeňte na derivace.

Rekurentní rovnice

Jednou z přímočarých aplikací vytvořujících funkcí je řešení lineárních rekurencí. Hledáme-li posloupnost $(A_i)_{i=0}^{\infty}$ splňující

$$\alpha_k A_{i+k} + \alpha_{k-1} A_{i+k-1} + \ldots + \alpha_0 A_i = B_i$$

pro každé $i \in \mathbb{N}_0$, můžeme sestavit rovnici pro vytvořující funkci hledané posloupnosti. Ukážeme si to na příkladu.

Příklad. Najděte explicitní vzorec pro Fibonacciho čísla, tedy posloupnost splňující $F_0 = F_1 = 1$ a $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

Řešení. Připravte se na pořádné triky. Hledanou vytvořující funkci posloupnousti $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ označme $F(x)$. Vztah $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$ vynásobme výrazem x^i a sečtěme přes všechna i:

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_{i+2} x^n = \sum_{i=0}^{\infty} F_{i+1} x^n + \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^n.$$

Vzpomene-li si na cvičení o operacích s vytvořujícími funkcemi, můžeme získanou rovnost přepsat jako

$$\frac{F(x)-1-x}{x^2}+\frac{F(x)-1}{x}=F(x),$$

z čehož snadno vyjádříme $F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$. Nyní potřebujeme najít rozvoj této funkce do mocninné řady. Na to můžeme použít tvrzení o Taylorově řadě, ale to se nám pochopitelně nechce, takže raději použijeme další trik – rozklad na parciální zlomky. Racionální funkce, jejichž jmenovatele umíme rozložit na součin lineárních dvojčelnů $(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)$ totiž vždy lze zapsat ve tvaru $\sum_i \frac{K_i}{x-x_i}$ pro vhodné kostanty K_i. V našem případě máme $1-x-x^2=-(x-\varphi_1)(x-\varphi_2)$ a

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{x-\varphi_1}-\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{x-\varphi_2},$$

kde $\varphi_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Z vyjádření $\frac{1}{x-\varphi}=\frac{-1}{\varphi}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\varphi}}$, s využitím vztahu $\varphi_1\varphi_2=1$ a druhého bodu cvičení o operacích s vytvořujícími funkcemi dostaneme, že $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi_1^{n+1}-\varphi_2^{n+1}\right)$.

Poznámka. Mohlo by se samozřejmě stát, že hledaná posloupnost nesplňuje podmínku (E), pak její vytvořující funkce neexistuje. Řešení lineárních rekurencí s rozumnými pravými stranami ale vždy rostou nejvýše exponenciálně a navíc nám nikdy nic nebrání tento postup alespoň vyzkoušet.

Cvičení. Explicitně vyjádřete posloupnost $(a)_{i=0}^{\infty}$ splňující $a_0=0$ a $a_{i+1}=2a_i+1$ pro každé $i\geq 0$.

Návod. Vyjde $a_i=2^i-1$.

Cvičení. Explicitně vyjádřete posloupnost $(a)_{i=0}^{\infty}$ splňující $a_0=1$ a $a_{i+1}=2a_i+i$ pro každé $i\geq 0$.

Návod. Vyjde $a_i=2^{i+1}-i-1$ a je to kencr.

Kombinatorické identity

V této kapitole vystačíme namísto mocninných řad většinou s polynomy.

Příklad. Dokažte, že $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$.

Řešení. Vyjdeme z binomické věty: $(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Jak si poradíme s násobením k? Zderivujeme obě strany dle x a dostaneme $n(1+x)^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Položíme $x=1$ a jsme hotovi.

Cvičení. Dokažte, že $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

Návod. Uvažte koeficient u x^n v polynomu $(1+x)^{2n}$.

Cvičení. Spočítejte $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}^2$.

Návod. Přidejte někam minus.

Úlohy

Téma vytvořujících funkcí je rozsáhlé, obtížné a trikové. Totéž platí o následujících úlohách, takže používání hintů je vřele doporučeno.

Úloha 2 (vylepšená motivační úloha). V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy se od sebe nepoznají. Kolik je různých možností, jak z takové krabice vybrat 70 míčků?

Úloha 3. Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvanácti hracími kostkami padne právě 30 ok.

Úloha 4. Najděte vzorec pro součet prvních n druhých (resp. třetích) mocnin přirozených čísel.

Úloha 5. Zjistěte, kolik existuje n-členných posloupností nul a jedniček, v nichž se nikde nevyskytují dvě nuly vedle sebe.

Úloha 6 (rozklady). Dokažte, že počet rozkladů (tzn. způsobů jak zapsat číslo jako součet několika jiných čísel, přičemž nezáleží na jejich pořadí) čísla n s různými částmi je stejný jako počet rozkladů čísla n s lichými částmi.

Úloha 7. Sečtěte $\displaystyle\sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \binom{k}{n-k}$.

Úloha 8. Dokažte $\displaystyle\sum_{a+b=n} \binom{2a}{a}\binom{2b}{b} = 4^n$.

Úloha 9. Sečtěte $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

Úloha 10 (magický součin). Vynásobte $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right)$ pro $|x| < 1$.

Úloha 11. Nechť $n \geq 2$ aritmetických posloupností s diferencemi $r_1, \ldots, r_n$ disjunktně pokrývá $\mathbb{N}$. Dokažte, že $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} = 1$ a že se nějaké dvě z diferencí rovnají.

Literatura a zdroje

[1] Matoušek J., Nešetřil J., *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2002

[2] Chen E., *Summations*, http://www.mit.edu/ evanchen/handouts/Summation/Summation.pdf

[3] http://www.imomath.com

Hinty

Hint 2. Začněte stejně jako v motivační úloze. Místo přímého roznásobování polynomů použijte vztahu $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ a zobecněné binomické věty.
Hint 3. Viz (vylepšená) motivační úloha.
Hint 4. Dvakrát (resp. třikrát) zderivujte geometrickou řadu.
Hint 5. Kdo to vyřeší, získá
Hint 6. Počet rozkladů čísla n je koeficient u x^n v „nekonečném“ součinu $(1 + x + x^2 + \ldots)(1+x^2+(x^2)^2+\ldots)(1+x^3+(x^3)^2+\ldots)\ldots = \Pi_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$. Rozmyslete si, že je to pravda a že se stačí omezit na konečný počet činitelů. Upravte toto tvrzení pro účely zadání a ono se to pokrátí.
Hint 7. Uvažte vytvořující funkci této sumy pro n a prohoďte sumy (zapamatujte si tenhle trik!). Vyjde F_{n+1}.
Hint 8. Vytvořující funkci pravé strany znáte a suma vlevo odkazuje na násobení řad. Rozviňte $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ pomocí zobecněné binomické věty do mocninné řady.
Hint 9. Uvažte vytvořující funkci této sumy pro m a prohoďte sumy (zapamatujte si tenhle trik!). Vyjde $\binom{n}{m}2^{n-m}$.
Hint 10. Binárka.
Hint 11. Šikovně přeskupte členy geometrické řady a po těchto částech posčítejte. Dokažte $\frac{x}{1-x} = \frac{x^{a_1}}{1-x^{r_1}} + \frac{x^{a_2}}{1-x^{r_2}} + \ldots + \frac{x^{a_n}}{1-x^{r_n}}$. Zbavte se výrazu $1-x$ a pošlete $x \to 1$. Pro druhou část postupujte sporem a uvažte vhodnou komplexní odmocninu z 1.

Polynomy

Anh Dung Le

Abstrakt. Polynomy jako funkce díky svému jednoduchému tvaru vykazují mnoho pěkných a zajímavých vlastností. Podíváme se na jejich chování v různých tělesech a číselných oborech $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$. Ukážeme si pár užitečných vět k ověření jejich ireducibility a vyšetření jejich kořenů.

Pomocné věty

Tvrzení. Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Pokud $\frac{r}{s}$ je racionální kořen polynomu f, pak $s \mid a_n$, $r \mid a_0$.

Věta (Eisenstein). Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ je polynom s celočíselnými koeficienty takový, že $p \mid a_i$ pro $0 \leq i \leq n-1$, $p \nmid a_n$ a $p^2 \nmid a_0$. Pak $f(x)$ je nerozložitelný.

Věta (Gauss). Je-li polynom s celočíselnými koeficienty rozložitelný v $\mathbb{Q}$, pak je rozložitelný také v $\mathbb{Z}$.

Věta (Extended Eisenstein). Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ je polynom s celočíselnými koeficienty takový, že $p \mid a_i$ pro $0 \leq i < k$, $p \nmid a_k$ a $p^2 \nmid a_0$. Pak $f(x)$ nerozložitelný faktor stupně alespoň k.

Věta (Perron). Nechť $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ je polynom s celočíselnými koeficienty takový, že $a_0 \neq 0$. Dále:

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|.$$

Pak $f(x)$ je nerozložitelný.

Věta (Rouché). Nechť c je jednoduchá uzavřená křivka. Pokud f, g jsou dva polynomy takové, že $|f(z)| > |g(z)|$ pro všechny body z uvnitř c, pak f a $f + g$ mají stejný počet nul.

Věta (Základní věta algebry). Polynom s komplexními koeficienty stupně n má přesně n kořenů včetně násobností.

Úlohy

Příklad 1. Nechť f je polynom s celočíselnými koeficienty takový, že $f(0)$ a $f(1)$ jsou liché. Dokažte, že f nemá celočíselný kořen.

Příklad 2. Dokažte, že celočíselný polynom nerozložitelný v $\mathbb{Z}$ nemá vícenásobný kořen v $\mathbb{C}$.

Příklad 3. Najděte exponenty, aby platilo:

(i) $x^k - 1 \mid x^n - 1$,
(ii) $x^2 + x + 1 \mid (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$,
(iii) $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} - x^n + 1$,
(iv) $x^2 - x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$,
(v) $x^2 - x + 1 \mid x^{2n} - x^n + 1$.

Příklad 4. Pro a, b, c reálná navzájem různá zjednodušte

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

Příklad 5. Pro a, b, c reálná navzájem různá dokažte:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0.$$

Příklad 6. Najděte všechny polynomy f, g v $\mathbb{Z}$ takové, že $f(g(x)) = x^{2007} + 2x + 1$.

Příklad 7. Nechť P je polynom stupně n s n různými kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dokažte:

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$$

(Polsko 1979)

Příklad 8. Nabývá-li polynom stupně n celočíselné hodnoty v $n+1$ po sobě jdoucích celočíselných hodnotách, tak už nabývá celočíselné hodnoty v celém $\mathbb{Z}$.

Příklad 9. Nechť $P(x)$ je polynom stupně $n > 1$ s celočíselnými koeficienty a nechť k je kladné celé číslo. Polynom Q je k-krát složení polynomu P. Dokažte, že Q má nejvýše n celočíselných pevných bodů. (IMO 2006)

Příklad 10. Najděte všechna přirozená k taková, že kdykoliv $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty splňující $0 \leq P(c) \leq k$ pro $0 \leq c \leq k+1$, pak $P(0) = P(1) = \ldots = P(k+1)$. (ISL 1997)

Příklad 11. Nechť $P(x)$ je monický polynom s celočíselnými koeficienty takový, že všechny jeho kořeny leží na jednotkové kružnici. Ukažte, že všechny kořeny $P(x)$ jsou kořeny jedničky.

Příklad 12. Pokud q je racionální číslo takové, že $\cos(q\pi)$ je taky racionální, pak $\cos(q\pi) \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$.

Příklad 13. Pro $p > 3$ prvočíslo najděte počet nerozložitelných polynomů v $\mathbb{Z}$, které jsou tvaru $x^p + px^k + px^l + 1$, kde $1 \leq l < k < p$.

Příklad 14. Nechť $f \in \mathbb{Z}[x]$ se stupněm n, jehož koeficienty jsou ± 1. Navíc platí $(X-1)^{2^k} \mid f$. Dokažte, že $n \geq 2^{k+1} - 1$.

Příklad 15. Nechť p je prvočíslo tvaru $4k+3$. Dokažte, že $(x^2+1)^n + p$ je nerozložitelný v $\mathbb{Z}$ pro každé přirozené n.

Příklad 16. Dokažte, že $x^n + 5x^{n-1} + 3$ je nerozložitelný v $\mathbb{Q}$ pro každé $n > 1$. (IMO 1993)

Příklad 17. Najděte a, pro která je polynom $x^n + ax^{n-1} + pq$ $(n > 2)$ rozložitelný v $\mathbb{Q}$.

Příklad 18. Nechť p je prvočíslo, $n_1 > n_2 > \ldots > n_p$ jsou přirozená čísla a $d = gcd(n_1, \ldots, n_p)$. Dokažte, že:

$$P(x) = \frac{X^{n_1} + \ldots + X^{n_p} - p}{X^d - 1}$$

je nerozložitelný v $\mathbb{Q}$.

Příklad 19. Nechť $\overline{a_n \ldots a_0}$ je dekadický zápis prvočísla p a předpokládejme, že $a_n > 1$. Dokažte, že $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ je nerozložitelný v $\mathbb{Q}$. (Balkan 1989)

Příklad 20. Nechť p je prvočíslo a k přirozené číslo nedělitelné p. Dokažte, že $x^p - x - k$ je nerozložitelný v $\mathbb{Q}$.

Příklad 21. Nechť $P(x)$ je kubický polynom s celočíselnými koeficienty. Předpokládejme, že $xP(x) = yP(y)$ pro nekonečně dvojice různých celých čísel (x, y). Dokažte, že P má celočíselný kořen.

Příklad 22. Existují polynomy P, Q takové, že:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Příklad 23. Nechť $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$. Dokažte, že $f(x)$ je nerozložitelný v $\mathbb{Z}$, ale rozložitelný v $\mathbb{Z}_p$ pro každé prvočíslo p.

Příklad 24. Nechť p je prvočíslo. Ukažte, že $f(x) = x^{p-1} + 2x^{p-2} + \ldots + (p-1)x + p$ je nerozložitelný.

Příklad 25. Nechť $f \in \mathbb{Z}[x]$ nerozložitelný polynom s celočíselnými koeficienty. Předpokládejme, že $|f(0)|$ není čtverec, pak $f(x^2)$ je taky nerozložitelný.

Příklad 26. Nechť f je nerozložitelný polynom a předpokládejme, že má dva kořeny, jejichž součin je 1. Dokažte, že f má sudý stupeň.

Příklad 27. Nechť a je celé číslo, $n \geq 3$ taky celé číslo. Dokažte, že následující polynom je nerozložitelný:

$$x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + ax - 1.$$

Příklad 28. Nechť $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ celá čísla. Dokažte, že následující polynom je nerozložitelný:

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - a_n.$$

Příklad 29. Nechť $p(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Musí vždy existovat kladné celé k takové, že $p(x) - k$ je nerozložitelný?

Příklad 30. Rozhodněte, zda existuje posloupnost navzájem nesoudělných přirozených čísel $a_0, a_1, \ldots$ taková, že pro každé n je $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ nerozložitelný polynom?

Příklad 31. Nechť n je kladné celé číslo a $A_1, \ldots, A_k$ partita $\mathbb{N}$. Ukažte, že existuje A_i taková, že existuje nekonečně mnoho nerozložitelných polynomů stupně n s koeficienty z A_i.

Příklad 32. Dokažte, že $x^n - x - 1$ je nerozložitelný pro všechna $n \geq 2$.

Příklad 33. Nechť $f_1, \ldots, f_n$ jsou polynomy s celočíselnými koeficienty. Ukažte, že existuje rozložitelný polynom $g \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že $f_i + g$ je nerozložitelný pro všechna i.

Příklad 34. Najděte všechny monické polynomy s celočíselnými koeficienty $p(x)$ stupně dva, pro které existuje polynom $q(x)$ takový, že $p(x)q(x)$ je polynom s koeficienty ± 1. (ISL 2005)

Příklad 35. Nechť f je monický polynom s celočíselnými koeficienty, jehož kořeny mají absolutní hodnotu menší nebo rovno 1. Dokažte, že všechny kořeny f jsou buď 0 nebo kořeny 1.

Příklad 36. Najděte všechny dvojice $m, n \geq 3$ takové, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel a, pro která:

$$a^n + a^2 + 1 \mid a^m + a - 1.$$

(IMO 2002)

Příklad 37. Pro každé kladné celé n ukažte, že existuje kladné celé k takové, že:

$$k = f(x)(x+1)^{2n} + g(x)(x^{2n} + 1)$$

pro nějaké celočíselné polynomy f, g a najděte nejmenší k v závislosti na n.

Literatura a zdroje

[1] Nguyen Van Mau: *Cac van de ve da thuc I,II*

[2] Yufei Zhao: *Integer polynomials*,
`http://yufeizhao.com/olympiad/intpoly.pdf`

Hinty

Hint 2. Derivace.
Hint 3. Jaké jsou kořeny levé strany?
Hint 4. Dosaďte do x hodnoty a, b, c.
Hint 5. Vynásobte výraz společným jmenovatelem, pak uvažujte polynom v a.
Hint 8. BÚNO to jsou body $0, 1, \ldots, n$. Polynom rozepište ve tvaru $a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + \ldots + a_nx(x-1)\ldots(x-n)$.
Hint 9. $a - b \mid P(a) - P(b)$.
Hint 12. Vzpomeňte si, jak se rozkládá $\cos(nx)$ na $\sin(x)$ a $\cos(x)$.
Hint 13. Pracujte v mod p.
Hint 14. Pracujte v mod 2.
Hint 15. Pracujte v mod p.
Hint 17. Eisenstein mod p, pak pracujte v mod p.
Hint 18. Vyšetřete absolutní hodnotu kořenů.
Hint 20. Pracujte v mod p.
Hint 22. Jak vypadá limita v nekonečnu?
Hint 35. Dokažte, že existuje konstanta c která je větší než koeficienty f_j v absolutní hodnotě, kde f_j mají kořeny, které jsou j-tou mocninou kořenů f.

Čísla a čtverečky

Jakub Löwit

Abstrakt. Čísla a čtverečky jsou na první pohled celkem odlišné objekty. Přesto si nejsou úplně cizí, a co víc – existuje hned několik přístupů, jak je „ztotožnit“. Tím mnohdy dostáváme dobrou intuitivní představu o tom, co se vlastně děje. Jindy nám takový přístup umožní oddelegovat nějaký problém do úplně jiné části matematiky, kde se zčistajasna stává snadnějším (nebo alespoň méně těžkým).

Minkowského věta

Začneme tímto klasickým výsledkem, který je sám o sobě hezký. Sílu věty si demonstrujeme na pěkných (a dalších) příkladech.

Definice (Konvexní těleso). Množina bodů $M \in \mathbb{R}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ se nazývá *konvexní*, pokud s každými dvěma body obsahuje celou úsečku tyto body spojující, tj. $x,\ y \in M$ implikuje $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$ pro každé $\lambda \in [0,1]$. Dále M je středově symetrická (kolem počátku), pokud $x \in M$ implikuje $-x \in M$, a je omezená, pokud leží v nějaké kouli.

Definice (Mřížka). Buď $n \in \mathbb{N}$. Mřížkou $\Lambda = \Lambda(B)$ v $\mathbb{R}^n$ s bází $B = v_1, \dots, v_n$, kde v_i jsou lineárně nezávislé vektory, rozumíme množinu všech celočíselných lineárních kombinací vektorů z B, tedy $\Lambda = \{\sum_{i=1}^n a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$. Základním rovnoběžnostěnem $T = T(\Lambda)$ mřížky Λ pak rozumíme množinu $T = \{\sum_{i=1}^n a_i v_i \mid a_i \in [0,1)\}$. Objem mřížky $\mathrm{Vol}(\Lambda)$ pak definujeme jako objem základního rovnoběžnostěnu $T(\Lambda)$.

Lemma 1. Objem $\mathrm{Vol}(\Lambda)$ mřížky Λ nezávisí na volbě báze.

Poslední lemma tedy ospravedlňuje zavedení objemu mřížky. Toto lemma ale vůbec není jen nějaký detail – samo o sobě často pomůže s řešením úlohy. Dále je dobré si uvědomit, že posunuté kopie T o celočíselné vektory tvoří rozklad celého $\mathbb{R}^n$.

Než se pustíme do práce, uvědomme si ještě jednu věc – obecná mřížka je silný nástroj, protože nám dovoluje vypustit silné věty na širší škálu problémů.

Příklad 2 (Minkovského věta o konvexním tělese). Ať Λ je mřížka v $\mathbb{R}^n$ a $M \in \mathbb{R}^n$ je konvexní, omezená a středově symetrická množina. Pokud navíc

$$\mathrm{Vol}(M) > 2^n \cdot \mathrm{Vol}(\Lambda),$$

potom M obsahuje mřížový bod různý od počátku.

Pojďme se podívat na použití této věty. Chceme-li ukázat, že existuje nějaký mřížový bod s požadovanými vlastnostmi, stačí nám říct, že tyto vlastnosti mají všechny body v $\mathbb{R}^n$ v dostatečně velké konvexní, omezené a středově symetrické množině. Naši větu lze velmi často využít poměrně přímočaře – stačí pouze spočítat objem onoho vhodného tělesa v $\mathbb{R}^d$ a máme hotovo. Jindy je ale třeba myslet dopředu a zvolit si lišácky už i původní mřížku.

Příklad 3 (Německý lesík). Německý lesík obsahuje v každém mřížovém bodě kromě počátku strom se stejnou (nenulovou) tloušťkou kmene. V počátku stojí Němec a kochá se pravidelností lesa. Ukažte, že pokud je lesík dostatečně velký, Němec nevidí ven.

(starodávný folklór)

Příklad 4. Uvažte přirozená čísla a, b, c splňující rovnost $ac = b^2 + b + 1$. Ukažte, že rovnice $ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = 1$ má celočíselná řešení.

(Polsko)

Příklad 5. Ať n je přirozené číslo takové, že rovnice $x^2+xy+y^2 = n$ má racionální řešení. Dokažte, že pak má už i celočíselná řešení.

(Kömal)

Příklad 6. Předpokládejte, že a, b jsou taková racionální čísla, pro která má rovnice $ax^2 + by^2 = 1$ nějaké racionální řešení. Ukažte, že pak už jich má nekonečně mnoho.

(Kurschak Competition)

Příklad 7. Ukažte, že prvočíslo $p \geq 3$ lze zapsat jako součet dvou čtverců právě tehdy, když p dává zbytek 1 modulo 4.

Příklad 8. Existuje sféra v $\mathbb{R}^3$, na které leží právě jeden bod se všemi souřadnicemi racionálními?

(Tournament of the Towns)

Příklad 9. Mějme a, b, c přirozená čísla, jež splňují $ac = b^2 + 1$. Ukažte, že rovnice $ax^2 + 2bxy + by^2 = 1$ má celočíselné řešení.

(Kömal)

Příklad 10 (Lagrangeova věta o čtyřech čtvercích). Každé přirozené číslo lze zapsat jako součet čtyř čtverců celých čísel.

Příklad 11. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, označme $f(n)$ počet způsobů, jak rozložit n na součet celočíselných mocnin dvojky (na jejich pořadí přitom nezáleží). Dokažte existenci konstant a, b takových, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^{\frac{n^2}{2} - n\log_2(n) - an} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2} - n\log_2(n) - bn}.$$

(vylepšené IMO 1997)

Fareyovy zlomky

Definice (Fareyovy zlomky). Fareyovými zlomky řádu n rozumíme posloupnost $\mathcal{F}_n$ všech zlomků $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$ v základním tvaru, kde $1 \leq q \leq n$, seřazených podle velikosti.

Příklad 12 (Farey-Cauchyova věta). Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jsou dva vedlejší Fareyovy zlomky. Potom $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$.

Předešlý příklad tedy vlastně říká, že rozdíl vedlejších Fareyových zlomků je v jistém smyslu nemenší možný.

Příklad 13. Ať $\frac{a}{b} < \frac{e}{f} < \frac{c}{d}$ jsou sousední Fareyovy zlomky. Pak

$$\begin{aligned} e &= a + c, \\ f &= b + d. \end{aligned}$$

Příklad 14. Ať $n \in \mathbb{N}$. Označme M množinu všech mřížových bodů ležících v trojúhelníku (včetně hranice) určeném body $[1, n]$, $[n, n]$, $[n, 1]$, které navíc mají nesoudělné souřadnice. Spočtěte $\sum_{(x,y)\in M} \frac{1}{xy}$.

Definice (Fordova kružnice). Pro každé racionálnímu číslo $\frac{p}{q}$ nazveme kružnici s průměrem $\frac{1}{q^2}$, která leží nad první souřadnicovou osou a dotýká se jí v bodě $\frac{p}{q}$ jeho Fordovou kružnicí.

Příklad 15. Ukažte, že dvě Fordovy kružnice se dotýkají právě tehdy, když jim odpovídající zlomky sousedí v posloupnosti Fareyových zlomků nějakého řádu.

Definice (Medián). Mediánem dvou zlomků $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ rozumíme zlomek $\frac{a+c}{b+d}$.

Definice (Stern-Brocotův strom). Stern-Brocotův strom je rekurzivně sestavený nekonečný binární strom s vrcholy ohodnocenými kladnými racionálními čísly. V nultém kroku obsahuje pouze vrchol $\frac{1}{1}$. V i-tém kroku obdržíme další řádek stromu o 2^i vrcholech tak, že pod každé číslo napíšeme jeho medián s největším menším číslem ve stromě a s nejmenším větším číslem ve stromě (pokud některé z nich neexistuje, použijeme vhodný ze zlomků $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$).

Příklad 16. Ukažte, že Stern-Brocotův strom obsahuje každé kladné racionální číslo právě jednou, a to ve zkráceném tvaru.

Příklad 17. Pro racionální číslo $\frac{p}{q}$ definujme jeho jednoduchost jako $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{pq}$. Spočtěte součet jednoduchostí n-tého řádku Stern-Brocotova stromu.

Pickova formule

Známá Pickova formule sice na první pohled může působit překvapivě, na druhý zase triviálně. Přestože se nejedná o komplikované tvrzení, existuje hned několik způsobů, jakými nás může překvapit. Často můžeme najít celkem překvapivé souvislosti s jinými tvrzeními.

Pracujeme pouze s jednoduchými mnohoúhelníky (tedy neprotínají samy sebe).

Příklad 18 (Pickova formule). Mějme libovolný mnohoúhelník M s vrcholy v mřížových bodech mřížky Λ v rovině. Označme V počet mřížových bodů, které leží ostře uvnitř M, dále nechť H je počet mřížových bodů na hranici M. Potom je obsah M roven $\mathrm{Vol}(\Lambda) \cdot (V + \frac{H}{2} - 1)$.

Příklad 19 (Děravá verze). Mějme libovolný mnohoúhelník M s vrcholy v mřížových bodech rovinné mřížky Λ. Označme V počet mřížových bodů, které leží ostře uvnitř M, dále nechť H je počet mřížových bodů na hranici M. Nakonec ať D je rovno počtu „děr“ v M. Potom je obsah M roven $\mathrm{Vol}(\Lambda) \cdot (V + \frac{H}{2} + D - 1)$.

Příklad 20. Existuje rovnostranný trojúhelník s vrcholy ve vrcholech běžné mřížky v $\mathbb{R}^2$?

Příklad 21. Ať M je mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech. Pro každý mřížový bod p mnohoúhelníku M označme $f(p)$ velikost úhlu (v radiánech), pod kterým je vidět M z p. Dále $g(p) = \frac{f(p)}{2\pi}$. Dokažte, že obsah M je roven sumě $g(p)$ přes všechny body $p \in M$.

Příklad 22. *Půlbodem* nazývejme libovolný bod o souřadnicích $(k/2, l/2)$, kde k a l jsou celá čísla. Ukažte, že každý půlbod, který leží ostře uvnitř mřížového mnohoúhelíka, lze získat jako střed úsečky spojující dva mřížové body, které samy leží neostře v tomto mnohoúhelníku.

Příklad 23. Mějme mřížový trojúhelník ABC takový, že jedinými mřížovými body na jeho hranici jsou jeho vrcholy a uvnitř něj leží právě jeden mřížový bod. Dokažte, že tento bod je těžištěm trojúhelníku ABC.

Příklad 24 (Eulerova formule). Ať G je rovinný graf s v vrcholy, e hranami a s stěnami. Potom platí $v - e + s = 2$.

Dále si můžete rozmyslet, že z Pickovy formule plyne také Farey-Cauchyova věta. To nám tedy ukazuje souvislost Pickovy formule s rozkladem roviny na základní rovnoběžnostěny. Podívejme se nyní, co se dá říct o Pickově formuli a vyšších dimenzích.

Příklad 25. Rozhodněte, zda platí nějaká obdoba Pickovy formule ve vyšších dimenzích (tedy jestli objem r-dimenzionálního mnohostěnu lze pro pevné $r > 2$ obecně vyjádřit polynomiálním vztahem, který využívá pouze počet mřížových bodů ostře uvnitř mnohostěnu a na jeho hranici).

Definice (Konvexní V-mnohostěn). Pro $r, n \in \mathbb{N}_0$, $r \leq n$ rozumíme konvexním r-dimenzinálním mnohostěnem P v $\mathbb{R}^n$ konvexní obal konečněno počtu bodů v $\mathbb{R}^n$. Přitom r je nejmenší číslo takové, že v $\mathbb{R}^r$ existuje konvexní mnohostěn shodný s P.

Příklad 26 (Ehrhart's theorem). Ukažte, že pro každý r-dimenzionální mnohostěn P v $\mathbb{R}^n$ lze najít polynom stupně r takový, že pro všechna $m \in \mathbb{N}$ platí $f(m) = |\mathbb{Z}^n \cap mP|$.

Racionální aproximace

Na chvíli se od celých čísel přesuneme k číslům racionálním a podíváme se na nějaké jejich vlastnoti, které souvisí s geometrií čísel a mřížkami.

Příklad 27 (Dirichletova věta o racionálních aproximacích). Pro dané $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{Q}$ existují čísla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

Příklad 28. Pro dané $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existuje nekonečně mnoho racionálnch čísel $\frac{p}{q}$ splňujících

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Iracionální čísla tedy jdou docela dobře aproximovat racionálními čísly s „malými“ jmenovateli. Všimněme si, že pokud budeme uvažovat čísla $\frac{p}{q}$ pouze ve zkráceném tvaru, pro racionální α má tato nerovnost pouze konečně mnoho řešení.

Příklad 29 (Hurwitz's theorem). Pro všechna $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ má nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

nekonečně mnoho racionálních řešení $\frac{p}{q}$. Přitom $\sqrt{5}$ je největší taková konstanta (pro libovolnou větší konstantu už existují iracionání čísla, pro která má přísušná nerovnost pouze konečně mnoho řešení).

Předchozí věty nám dobře popisují obecné vlastnosti aproximování reálných čísel čísly racionálními. O konkrétních číslech nám toho ale říkají velmi málo. Z tohoto důvodu nyní bude chtít pro libovolné reálné α induktivně zadefinovat posloupnost racionálních čísel, která jej dobře aproximují. K tomu využijeme analogii ke známému Euklidovu algoritmu.

Definice (Řetězové zlomky). Pro α libovolné reálné induktivně zadefinujeme posloupnosti a_i, b_i tak, že $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, $b_0 = \alpha - a_0$. Dále pro $i + 1 \geq 1$ mohou nastat dva případy. Pokud $b_i = 0$, algoritmus skončí. V opačném případě definujeme $a_{i+1} = \left\lfloor \frac{1}{b_i} \right\rfloor$, $b_{i+1} = \frac{1}{b_i} - a_{i+1}$.

Nyní konečně n-tou konvergentu $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ definujeme jako

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Řetězovým zlomkem čísla α myslíme výraz

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}.$$

tedy limitu konvergent pro $n \to \infty$.

Všimněme si, že a_0 je celé, a_i pro $i \geq 1$ jsou přirozené, b_i leží v intervalu $[0, 1)$. Všechny konvergenty jsou tedy racionální čísla. Intuitivně vidíme, že se konvergenty postupně blíží k α. Jak ale něco takového může souviset s geometrií čísel? Odpovědí je Euklidův algoritmus, který má pěkné geometrické znázornění. A můžou nám nějaké obrázky pomoci s řešením takto jemných algebraických problémů? Společně s tím, co už známe – můžou!

Při obrázkové reprezentaci Euklidova algoritmu pro aproximaci nějakého reálného α se vyplatí použít mřížku s bázovými vektory $(\alpha, 1)$, $(-1, 0)$.

Příklad 30. Pro racionální číslo $\frac{p}{q}$ splývá hledání odpovídajícího řetězového zlomku s Euklidovým algoritmem pro hledání $\gcd(p, q)$. Speciálně α má konečný řetězový zlomek právě tehdy, když je racionální.

Z obrázkové reprezentace algoritmu je zřejmé, že konvergenty aproximují číslo α lépe a lépe, a to střídavě z obou stran. Nyní si vychutnejme praktičnost mřížky na příkladu, který nám ukáže, jak moc je aproximace řetězovým zlomkem dobrá.

Příklad 31. Ukažte, že pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\epsilon \in \mathbb{R}$ pevná má nerovnost $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\epsilon}{q^2}$ nekonečně mnoho racionálních řešení $\frac{p}{q}$ právě tehdy, když ji splňuje nekonečně mnoho různých konvergent $\frac{p_n}{q_n}$ čísla α.

Obdélníky a reciprocita

Učiňme nyní krok stranou a vychutnejme si úplně jiný aspekt korelace čísel a čtverečků – druhým mocninám se přece neříká čtverce jen tak. Dokonce už staří řekové interpretovali součiny jako obdélníky, a i v olympiádní matematice nám takový přístup může přijít k duhu. Prvočísla typicky postrádají pravidelnost a vhodná obdélníčková reformulace problému nám ji mnohdy poskytne.

Příklad 32. Nalezněte bijekci $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ danou nějakým polynomem.

(folklor)

Příklad 33. Pro reálná $a_{i,j}$ dokažte nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (a_{i,j} - a_{i+1,j})^2} \geq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (a_{1,j} - a_{n,j})^2}$$

a určete, kdy nastává rovnost.

(folklor)

Příklad 34. Ivan má dvě nesoudělná čísla a, b. Před sebou má Turecké vojsko. Postupně se dívá na čísla 1, 2, ..., ab. Za každé číslo zaútočí na jednoho Turka. Ivan Turka zabije právě tehdy, kdy je mezi přečtenými čísly sudý počet násobků čísel a, b. Kolik Turků Ivan celkem pobil?

(ruský folklor)

Příklad 35. Uvažme mřížku $p \times p$, která je nakreslena na toru. Určete maximální počet mřížových bodů takový, že žádné tři z nich neleží na přímce.

Příklad 36. David a Honza jedou autem. Neshodli se, kdo bude řídit, a tak si zvolili nesoudělná čísla d a h. David po každých d kilometrech zahne o 90 stupňů doprava a Honza každých h kilometrů zahne o 90 stupňů doleva. Pokud by měli oba zahnout najednou, tak budou pokračovat rovně. Na začátku míří ke svému cíli. Dokažte, že se k němu dostanou nezávisle na jeho vzdálenosti od startu, právě když $d \equiv h \pmod 4$.

(MKS 36-5-8)

Příklad 37 (Frobenius Coin Problem). Máte dány mince dvou nesoudělných hodnot a, b. Najděte největší číslo, které nejde pomocí takových mincí zaplatit.

Příklad 38 (Sylvester's theorem). Právě polovina čísel $1, 2, \ldots, (a-1)\cdot(b-1)$ jde zaplatit pomocí mincí s nesoudělnými hodnotami a, b.

Definice (Kvadratický zbytek). Číslo $1 \leq a \leq p-1$ nazýváme kvadratickým zbytkem modulo p, jestliže existuje nějaké celé x splňující $x^2 \equiv a \pmod p$.

Kvadratických zbytků modulo p je přitom vždy právě $\frac{p-1}{2}$. K tomuto zjištění si stačí rozdělit nenulové zbytky modulo p na dvě poloviny (což je obecně dobrý způsb, jak se ke zbytkům chovat).

Definice (Legendreův symbol). Ať p je prvočíslo, a celé číslo. Potom definujeme Legendreův symbol jako

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } p \mid a, \\ 1, & \text{pokud } a \text{ je kvadratický zbytek modulo } p, \\ -1, & \text{pokud } a \text{ je kvadratický nezbytek modulo } p. \end{cases}$$

Lemma 39 (Eulerovo kritérium). Pro prvočíslo $p \geq 3$ a a celé platí $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$.

Eulerovo kritérium je přitom důsledkem Malé Fermatovy věty a faktu, že každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů modulo p. Taková myšlenka rozhodně není triviální, a později se určitě ještě bude hodit. Dále si všimněme, že

Lemma 40 (Gaussovo lemma). Mějme prvčíslo $p \geq 3$ a a libovolné celé. Označme m počet čísel $a, 2a, \ldots, \frac{p-1}{2}$, jejichž zbytek modulo p je ostře větší než $\frac{p-1}{2}$. Potom $\left(\frac{a}{p}\right) = a^m$.

Gaussovo lemma plyne z faktu, že násobení zbytků modulo p nenulovým zbytkem a tyto zbytky pouze permutuje.

Lemma 41 (Zolotarevovo lemma). Pro prvočíslo $p \geq 3$ a a nesoudělné s p platí $\left(\frac{a}{p}\right) = \epsilon(\pi_a)$, kde π_a značí permutaci indukovanou na zbytcích modulo p násobením číslem a, ϵ značí její znaménko.

Co tedy víme? Kvadratické zbytky souvisí s rozdělením zbytků „na dvě poloviny“ a algebraicky si dobře rozumí s jejich permutováním. Co je ale pro nás důležitější – pokud uvážíme vhodnou tabulku, mají často zajímavé geometrické vlastnosti.

Příklad 42 (Kvadratická reciprocita). Pro prvočísla p, $q \geq 3$ platí vztah

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Další Minkowského věty

Udělejme si nyní krátký výlet trochu hlouběji do Minkowského teorie o geometrie čísel. Na to bude potřeba trochu vysokoškolské matiky, a od olympiádního uplatnění se tím trochu vzdálíme. Na druhou stranu si tím lépe osaháme Minkowského větu a získáme mírný nadhled. Začneme přitom tvrzeními, na které moc hluboké teorie potřeba není.

Příklad 43 (Věta o lineárních formách). Ať $A = (a_{ij})$ je $n \times n$ invertovatelná matice nad reálnými čísly. Jsou dána kladná reálná čísla c_1, c_2, …, c_n, pro která platí $\prod_{i=1}^{n} c_i > |\det(A)|$. Dokažte existenci celých čísel x_1, x_2, …, x_n, z nichž je alespoň jedno číslo nenulové a pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí nerovnost $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| < c_i$.

Příklad 44 (Součin homogenních lineárních forem). Mějme $n \times n$ invertovatelnou matici $A = (a_{ij})$ nad reálnými čísly. Potom existují celá čísla x_1, x_2, …, x_n, ne všechna nulová, splňující $\prod_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \frac{n!}{n^n} \cdot |\det(A)|$.

Příklad 45. Ať $A = (a_{ij})$ je $n \times n$ symetrická matice nad racionálními čísly. Navíc pokud $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je bod s alespoň jednou souřadnicí nenulovou, pak $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j > 0$. Dokažte existenci bodu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, který má alespoň jednu souřadnici nenulovou a platí pro něj

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j < n \cdot (\det(A))^{\frac{1}{n}}.$$

Příklad 46. Pro $n \leq 4$ uvažme symetrickou matici A $n \times n$ nad celými čísly s $\det(A) = 1$. Potom existuje matice B nad celými čísly taková, že $A = B^T B$, kde B^T značí matici získanou z B osovou symetrií podle hlavní diagonály.

Zajímavostí je, že předchozí tvrzení obecně platí dokonce pro $n \leq 7$. Využít jej v olympiádním příkladu je sice trikové, ale není to nemožné, jak si hned můžete vyzkoušet.

Příklad 47. Buďte x, y, $z \in \mathbb{N}$ taková, že $xy = z^2 + 1$. Dokažte, že potom je $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$, $z = ac + bd$ pronějaká celá čísla a, b, c, d.

(Irán 2001)

S vysokoškolskou matematikou se (částečně) rozloučíme uvedením supersilné verze Minkowského věty, jejíž důkaz už je těžký. Obyčejná Minkowského věta totiž mluví prostě o „velkých“ věcech. Vůbec ale neklade důraz na to, „kterým směrem“ jsou velké. To následující věta bohatě vynahrazuje.

Definice (Postupná minima). Mějme konvexní, omezenou a středově symetrickou množinu M v $\mathbb{R}^d$. Jako i-té postupné minimum množiny M, které označíme μ_i, myslíme nejmenší hodnotu λ takovou, že λM obsahuje i lineárně nezávislých bodů.

Nejdříve tedy vezmeme λ tak malé, aby λM neobsahovalo žádné mřížové body kromě počátku. Nyní budeme λ postupně zvětšovat až λM bude obsahovat alespoň jeden mřížový bod na své hranici. Toto λ označíme jako μ_1 a pojmenujeme ho prvním postupným minimem. Dále pokračujeme podobně – zvětšujeme λ, dokud nenarazíme na mřížový bod lineárně nezávislý na všech předchozích, načež si zaznamenáme další minimum (někdy si můžeme zaznamenávat i několik minim současně). Proces skončí, když obsadíme všech d dimenzí (a díky podmínkám kladeným na M se tak nutně stane).

Věta 48 (Minkowského věta o postupných minimech). Ať Λ je mřížka v $\mathbb{R}^d$, M konvexní, omezená a středově symetrická množina. Dále nechť pro i od 1 do d jsou μ_i její postupná minima. Potom platí nerovnost

$$\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{d}\frac{2}{\mu_i} \leq \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\det(\Lambda)} \leq \prod_{i=1}^{d}\frac{2}{\mu_i}.$$

Speciálně si rozmyslete, jak z této věty plyne původní Minkowského věta. Někdy jsou proto tyto věty označovány jako první a druhé Minkowského věta o postupných minimech.

Pro libovolnou dimenzi najděte konvexní množiny, pro které v předchozí větě nastává první, popřípadě druhá rovnost.

Náhodné lumpárny

Zbývá vypsat hromadu příkladů na volné chvíle. Jejich řazení mírně souvisí s obtížností, z velké části je ale také náhodné. Některé z uvedených příkladů jsou celkem těžké, obzvláště ty, co mají název. Část příkladů souvisí s Minkowského větou, která je pak cenným pomocníkem.

Příklad 49. Je dán konvexní pětúhelník v rovině s vrcholy v mřížových bodech. Ukažte, že vnitřní pětiúhelník pěticípé hvězdy, kterou tyto body určují, obsahuje alespoň jeden mřížový bod.

(Rusko)

Příklad 50. Dvě posloupnosti celých čísel $a_1, a_2, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ splňují pro všechna přirozená $n > 2$ vztah $(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0$. Dokažte, že existuje kladné číslo k takové, že $a_k = a_{k+2016}$. (iKS 5-A5)

Příklad 51. V rovině je mnohoúhelník s obsahem alespoň n. Dokažte, že obsahuje $n+1$ mřížových bodů takových $A(x_i, y_i)$ takových, že $x_i - x_j$, $y_i - y_j$ jsou celá čísla pro libovolná $i, j \in 1, 2, ...n+1$.

(Čína TST 1998)

Příklad 52. Uvažte polynom $P(x)$ stupně n s celočíselnými koeficienty, který má n reálných kořenů x_1, x_2, …, x_n a navíc je ireducibilní nad racioálními čísly. Dokažte, že

$$\prod_{1 \le i < j \le n} |x_i - x_j| \ge \frac{n^n}{n!}.$$

Příklad 53. Rozhodněte, zda čtverec $n \times n$ může pokrýt $(n+1)^n$ celočíselných mřížových bodů.

(AMM)

Příklad 54. Nechť a, b, c, d jsou přirozená čísla taková, že existuje 2004 dvojic (x, y), $0 \le x, y \le 1$, pro které jsou čísla $ax+by$, $cx+dy$ celá. Najděte $\gcd(b, d)$, víte li, že $\gcd(a, c) = 6$.

(Bulharsko 2005)

Příklad 55 (Scott's theorem). Ostře uvnitř mnohoúhelníku M s alespoň čtyřmi vrcholy leží přesně $k > 0$ celočíselných mřížových bodů. Ukažte, že P pokrývá nejvýše $3k+6$ mřížových bodů.

Příklad 56. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $g(n)$ počet způsobů, jak zaplatit $n!$ pomocí mincí v hodnotách $k!$ pro $1 \le k \le n$ (na pořadí mincí nezáleží). Dokažte, že existuje konstanta c taková, že

$$n^{\frac{n^2}{2} - cn} \cdot e^{\frac{-n^2}{4}} \le f(n) \le n^{\frac{n^2}{2} + cn} \cdot e^{\frac{-n^2}{4}}.$$

(Putnam 2007)

Příklad 57. Uvažte graf G, jehož vrcholy odpovídají bodům s racionálními souřadicemi v $\mathbb{R}^n$ pro n přirozené, přičemž dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když je vzdálenost odpovídajích bodů rovna 1. Najděte nejmenší n takové, že G je souvislý.

(Irán 1998)

Příklad 58. V rovině je dán kruh se středem v počátku a poloměrem R. V každém mřížovém bodě kruhu kromě počátku stojí nekonečně vysoká válcovitá žirafa s poloměrem r (mimo kruh žirafy nejsou). Přitom r je zvoleno tak, aby bylo co největší a zároveň aby při pohledu z počátku bylo vidět i něco jiného než žirafy. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \le r < \frac{1}{R}.$$

(AMM)

Příklad 59. Pro přirozené $n \geq 2$ uvažme čtverec $[0, n] \times [0, n]$. Uvnitř tohoto čtverce leží mnohoúhelník P s obsahem alespoň n. Dokažte, že P pokrývá alespoň jeden mřížový bod.

Příklad 60. Je dána mřížka 2004×2004. Najděte největší přirozené n takové, že lze nakreslit konvexní n-úhelník s vrcholy v mřížových bodech zadané mřížky.

(USA TST 2004)

Příklad 61. V rovině leží mnohoúhelník $A_1A_2\dots A_k$, jehož vrcholy leží v mřížových bodech a na jedné kružnici. Ať existuje liché přirozené číslo n, které dělí druhé mocniny délek všech stran mnohoúhelníku. Ukažte, že pak už n dělí dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku.

(IMO 2016)

Příklad 62. Najděte všechny šestice a, b, c, x, y, z celých čísel splňující $ax^2 + by^2 + cz^2 = abc + 2xyz - 1$, $ab + bc + ca \geq x^2 + y^2 + z^2$, a, b, $c > 0$.

Příklad 63 (Davenport-Cassels). Ukažte, že každé přirozené číslo, které je součtem tří čtverců racionálních čísel, je také součet tří čtverců celý čísel.

Příklad 64 (Straus theorem). Dokažte, že v $\mathbb{R}^n$ pro n přirozené lze najít $n+2$ bodů, jejichž vzdálenosti jsou lichá čísla, právě tehdy, když $16 \mid n+2$.

Příklad 65 (Hensley's theorem). Dokažte, že pro všechna k, $n \in \mathbb{N}$ existuje konstanta $B(n, k)$ taková, že pro každý n-dimenzionální mnohostěn s vrcholy v mřížových bodech, který obsahuje ostře uvnitř právě k mřížových bodů, platí $\mathrm{Vol}(P) \leq B(n, k)$.

Příklad 66 (Lagarias-Ziegler's theorem). Dokažte, že pro $n, k \in \mathbb{N}$ pevná existuje pouze konečně mnoho různých n-dimenzionálních mnohostěnů s vrcholy v celočíselných mřížových bodech, které obsahují právě k mřížových bodů ostře uvnitř.

Příklad 67 (Schinzel circles). Ukažte, že pro každé přirozené n existuje kružnice v rovině, na které leží právě n mřížových bodů.

Příklad 68 (Kulikowski sphere). Ukažte, že pro každé přirozené n existuje sféra v prostoru, na které leží právě n mřížových bodů.

Příklad 69 (Browkin's theorem). Pro každý rovinný obrazec a každé přirozené číslo n existuje jemu podobný obrazec, který obsahuje právě n mřížových bodů.

Příklad 70 (Blichfeld's theorem). Nechť A je omezená oblast v rovině s obsahem $S > n$ po $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje obrazec v rovině shodný s A, který obsahuje alespoň $n+1$ mřížových bodů. Tvrzení platí obdobně v $\mathbb{R}^d$ pro libovolné $d \in \mathbb{N}$.

Literatura a Zdroje

[1] Gabriel Dospinescu, Titu Andreescu: Problems from the Book
[2] PraSečí přednášky od Vejtka Musila, Jardy Hančla a dalších
[3] Skripta Martina Klazara k předmětu Úvod do teorie čísel
[4] Apostol: Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory
[5] Goldman: Queen of Mathematics
[6] Fuchs, Tabachnikov: Mathematical Omnibus
[7] Wolfram Math World
[8] Mathlinks
[9] Cut the Knot

Algoritmy

Marian Poljak

Abstrakt. Asi jste si všimli, že kombinatorik na mezinárodních olympiádách spíše přibývá než ubývá. V posledních letech se také objevilo hned několik úloh, které jsou pomocí algoritmického postupu řešitelné. V tomto příspěvku se tedy podíváme na užití algoritmů pro řešení vesměs pokročilých kombinatorik.

Pod pojmem *algoritmus* rozumíme nějaký přesný návod či postup, kterým lze provádět nějakou proceduru či řešit úlohu. Přestože se jedná o informatický pojem, algoritmy jdou velmi účinně použít na některé typy úloh. K jejich použití se uchylujeme zejména,

- je-li třeba najít ne úplně triviální konstrukci,
- máme-li zadanou nějakou operaci,
- je-li třeba redukovat nepřehlednou konfiguraci,
- hledáme-li výherní strategii.

Hladové algoritmy

Hloupé algoritmy, které se snaží za každé situace vybrat nějaké lokální optimum a tím dospět k rozumnému výsledku. Přestože tento výsledek zdaleka nemusí být optimální a koneckonců ani rozumný, při správném použití může hladový algoritmus pomoct najít konstrukci, zjednodušit situaci či najít vyjádření nějakých objektů.

Příklad 1 (Binárka). Dokažte, že každé přirozené číslo lze zapsat jako součet jedné nebo více mocnin dvojky jediným způsobem.

Příklad 2 (Fibonárka, Zeckendorf's theorem). Dokažte, že každé přirozené číslo lze zapsat jediným způsobem jako součet jednoho nebo více Fibonacciho čísel, z nichž žádné dvě nejsou po sobě jdoucí ve Fibonacciho posloupnosti.

Příklad 3 (Faktoriálka). Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existují jednoznačně určená nezáporná celá čísla $a_1, \ldots, a_n$ taková, že $a_i \leq i$ pro všechna i a platí

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots$$

Příklad 4. Nechť d je nejvyšší stupeň daného grafu. Dokažte, že tento graf lze obarvit nejvýše $d + 1$ barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu.

Příklad 5. Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou podmnožiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ o velikosti 3. Dokažte že $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ prvků $\{1, 2, \ldots, n\}$ může být obarveno tak, aby každé A_i obsahovalo alespoň jeden neobarvený prvek.

Příklad 6. Je možné vybrat 1983 různých přirozených čísel menších nebo rovných 100 000, z nichž žádné 3 netvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti? (IMO 1983)

Příklad 7. Uvažujme tabulku se dvěma řádky a n sloupci. Do každé buňky tabulky napíšeme kladné reálné číslo tak, aby součet čísel v každém sloupci byl roven 1. Ukažte, že umíme vybrat jedno číslo z každého sloupce tak, aby součet vybraných čísel v každém řádku byl nejvýše $\frac{n+1}{4}$. (Rusko 2005)

Příklad 8. Množina přímek v rovině v obecné pozici (tj. žádné 3 neprocházejí stejným bodem, žádné 2 nejsou rovnoběžné) rozdělí rovinu na území, z nichž některá mají konečný obsah. Dokažte, že pro dostatečně velká n lze pro libovolnou množinu přímek v rovině v obecné pozici obarvit alespoň $\sqrt{n}$ přímek růžově tak, aby žádné konečné území nemělo zcela růžový okraj. (IMO 2014)

Příklad 9. Kamínky vážící dohromady 9 tun je třeba přepravit pomocí náklaďáků. Víme, že žádný kamínek neváží víc než tunu a každý náklaďák uveze 3 tuny. Kolik nejméně náklaďáků je třeba, aby šlo všechny kamínky naráz přepravit? (Německo 2000)

Příklad 10. Nechť n je přirozené číslo. Danil a Lenka hrají hru – Danil má k listů papíru, kde k je také přirozené číslo. Na každý z listů Danil napíše některá z čísel od 1 do n (může napsat klidně všechna nebo žádné) – zbývající čísla vždy dopíše na druhou stranu papíru (tj. na každém listu budou dohromady z obou stran všechna čísla od 1 do n). Nyní může Lenka otočit nějaké listy na druhou stranu. Pokud se Lence povede, aby po tomto otočení byla vidět všechna čísla od 1 do n, zvítězí. Najděte nejmenší k, pro které Lenka vždy dovede zvítězit. (Nizozemsko 2014)

Příklad 11. Množinu tří nezáporných čísel $\{x, y, z\}$, kde platí $x < y < z$ nazveme divnou, pokud $\{z - y, y - x\} = \{a, b\}$ pro daná $0 < a < b$. Ukažte, že množina všech nezáporných celých čísel se dá zapsat jako sjednocení navzájem disjunktních divných množin. (IMO shortlist 2001, zobecněné)

Příklad 12. Buď n přirozené číslo. Najděte nejmenší celé číslo k s následující vlastností – Pro libovolná reálná čísla $a_1, \ldots, a_d$ taková, že $a_1 + a_2 + \ldots + a_d = n$ a $0 \le a_i \le 1$ pro všechna i od 1 do d je možné tato čísla rozdělit do k skupin (z nichž některé mohou být prázdné) tak, aby součet čísel v každé skupině nepřevyšoval 1. (IMO shortlist 2013)

Příklad 13. Přerovská banka razí mince s hodnotou $\frac{1}{n}$ pro každé kladné celé číslo n. Mějme konečnou kolekci takových mincí (ne nutně různých hodnot), která má celkovou hodnotu nejvýše $99 + \frac{1}{2}$. Dokažte, že tuto kolekci je možné rozdělit na 100 nebo méně částí tak, aby každá část měla celkovou hodnotu nejvýše 1. (IMO 2014)

Invarianty a monovarianty

Najít si veličinu, která pro nějaké dané operace stále zachovává svou hodnotu nebo ji upravuje výhradně monotónně se může fakt hodit.

Příklad 14. Nechť $a_1, \ldots, a_n$ ($n > 3$) jsou reálná čísla taková, že

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$$

a zároveň

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 + \ldots + (a_n)^2 \geq n^2.$$

Dokažte, že $\max\{a_1, \ldots, a_n\} \geq 2$. (USAMO 1999)

Příklad 15. Ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku je napsáno šest nezáporných celých čísel, jejichž součet je 2003^{2003}. Miro má povolenu následující operaci: vybrat si jeden vrchol a nahradit číslo v něm napsané za absolutní hodnotou rozdílu čísel napsaných v sousedních vrcholech. Dokažte, že Miro dovede provést takovou sekvenci tahů, po které bude ve všech šesti vrcholech napsáno číslo 0. (USAMO 2003)

Příklad 16. Kuba má 3 účty v bance, na každém z nich je celočíselné (kladné) množství peněz. Může dělat převody z účtu na účet pouze tehdy, zdvojnásobí-li tento převod množství peněz na cílovém účtu. Dokažte, že Kuba vždy umí převést všechny své peníze do dvou účtů (tj. ve třetím bude 0). Dovede je vždy všechny převést do jednoho? (IMO shortlist 1994)

Příklad 17. V každém čtverečku tabulky m krát n je napsáno přirozené číslo. Povoleným tahem je přičtení celého čísla k ke dvěma sousedním čtverečkům tak, aby se v žádném z nich neobjevilo záporné číslo. Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby bylo možné po konečně mnoha operacích docílit tabulky plné nul.
(IMO shortlist 1989)

Příklad 18. Mějme n krabic $B_1, B_2, \ldots, B_n$ poskládaných do řady. Je v nich dohromady n míčků.

1) Je-li alespoň jeden míček v B_1, můžeme jej přesunout do B_2.
2) Je-li alespoň jeden míček v B_n, můžeme jej přesunout do B_{n-1}.
3) Jsou-li alespoň 2 míčky v B_k, kde $2 \leq k \leq n-1$, můžeme jeden z nich přesunout do B_{k-1} a druhý do B_{k+1}.

Dokažte, že pro libovolné počáteční rozložení míčků lze docílit toho, aby v každé krabici byl právě jeden míček. (China Girls 2011)

Příklad 19. Na tabuli je $n \geq 2$ přirozených čísel. V každém kroku vybereme dvě z nich a obě nahradíme jejich součtem. Určete všechna čísla n, pro která je takto vždy možno dospět (v konečném počtu kroků) k n shodným číslům. (MEMO 2008)

Příklad 20. Mějme n imonů, z nichž každá dvojice může či nemusí být spojená. Můžeme provádět dvě operace:

1) Zničit imon, který je spojen s lichým počtem imonů.
2) Zdvojnásobit počet imonů vytvořením kopie ke každému existujícímu imonu. Dva okopírované imony budou spojeny právě tehdy, byly-li spojené jejich vzory.

Dále se každý imon spojí se svou kopií. Žádná další spojení během této operace nevzniknou ani nezaniknou.

Dokažte že lze docílit stavu, kdy nebudou žádné dva imony spojené.

(IMO shortlist 2013)

Algoritmy redukce

Souvisí s monovarianty, v některých předchozích příkladech jsme je koneckonců už využili. Jedná se o algoritmy, které nám pomůžou uchopit a ulehčit složité kombinatorické cancery za současného zachování pointy a struktury problému.

Příklad 21. Mějme uspořádanou množinu šesti celých čísel $S = \{a, b, c, d, e, f\}$. Za tah považujeme operaci, kterou každé z těchto šesti čísel buď zvýšíme nebo snížíme o 1. Ukažte, že existuje konečná posloupnost tahů taková, která převede množinu S do takového tvaru, aby platilo $aef = bdf = cde$. (Cody Johnson)

Příklad 22 (Cancer). Mějme konečnou souvislou množinu S jednotkových čtverců vybraných z rovinné jednotkové mřížky. Tato množina je dokonale pokryta pravoúhlými rovnoramennými trojúhelníky s přeponou délky 2 – tyto trojúhelníky se nepřekrývají a nepřesahují mimo S. Navíc, každá přepona trojúhelníku je rovnoběžná buď s vodorovným nebo svislým směrem. Dokažte, že počet těchto trojúhelníků musí být dělitelný čtyřmi. (USAMTS 2015)

Příklad 23. Mějme body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uspořádané na kružnici a bod O uprostřed. Na každém z bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n, O$ je umístěn konečný počet karet, $n \geq 3$. Máme povoleny následující operace:

1) Pokud jsou na nějakém bodě A_i alespoň 3 karty, můžeme odebrat 3 karty a dát po jedné z nich do bodů A_{i-1}, A_{i+1}, O.
2) Pokud je alespoň n karet v bodě O, můžeme je odtud odebrat a rozdat po jedné do bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Dokažte, že pokud je celkový počet karet alespoň $n^2 + 3n + 1$ tak můžeme docílit situace, ve které bude v každém vrcholu alespoň $n + 1$ karet po konečně mnoha krocích. (China 2010)

Příklad 24. Mějme m breberek v jedné místnosti a n ve druhé. Máme povoleny následující operace:

1) Odebrat stejný počet breberek z obou místností.
2) Zdvojnásobit počet breberek v jedné z místností.

Je vždy možné vyprázdnit obě místnosti v konečném počtu kroků? A co když se při operaci 2 bude ztrojnásobovat namísto zdvojnásobení? (UK 2011)

Příklad 25. Mějme krabice $B_1, B_2, \ldots, B_6$ poskládané za sebou. Každá z nich zpočátku obsahuje jednu minci. Máme povoleno následující:

1) Vybrat neprázdnou krabici jinou než B_6, odebrat z ní 1 minci a přidat 2 mince do krabice za ní následující.

2) Vybrat neprázdnou krabici jinou než B_5 a B_6, odebrat z ní 1 minci a prohodit obsahy mincí následujících dvou krabic.

Určete, jestli existuje konečná posloupnost operací povolených typů taková, aby bylo prvních 5 krabic prázdných a B_6 obsahovala přesně $2010^{2010^{2010}}$ mincí.

(IMO 2010)

Příklad 26. Na matematické soutěži jsou někteří účastníci kamarádi. Kamarádství je vzájemné. Skupinu, ve které se každí dva spolu kamarádí, nazveme *parta*. Jako *velikost* party označme počet jejích členů. Za předpokladu, že největší velikost party je sudá dokažte, že lze účastníky rozdělit do dvou místností tak, aby největší velikost party v jedné místnosti byla stejná jako největší velikost party ve druhé.

(IMO 2007)

Omylem vytištěná nerovnost

Příklad 27. Dokažte, že pro všechna kladná reálná a, b, c platí:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2 + b^2}{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{c^2 + a^2}}.$$

Literatura a zdroje

[1] Cody Johnson, *Algorithms*, `https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2015-04/article_1_algorithms.pdf`

Hinty

Hint 1. Silná indukce.
Hint 2. Silná indukce.
Hint 3. Silná indukce.
Hint 4. A nestačí třeba prostě barvit a barvit?
Hint 5. Ekvivalentně přeformuluj tak, aby jsi pracoval s množinami, které mají alespoň jeden prvek obarvený. Poté zkus barvit co nejlépe.
Hint 6. Vyber 1,2 a pak postupně to, co jde. Pak zjisti, co jsou ta čísla zač a kolik jich je.
Hint 7. Búno je seřaď, poté vezmi nejvyšší index, pro který něco platí a odhadni, že to vlastně stačí.
Hint 8. Zkus navrhnout algoritmus, pomocí kterého se vždy obarví nějaká přímka a také se označí nejvýše 2 vrcholy, u nichž už další přímku růžově obarvit nemůžeme.
Hint 9. 10*0,9=9
Hint 10. Binární vyhledávání.
Hint 11. Konstruuj pomocí hladového algoritmu a po cestě barvi čísla třemi barvami podle jejich pozice v divné množině.
Hint 12. $\frac{n}{2n-1}$
Hint 13. Nejdřív se hladově zbav mincí $\frac{1}{1}$, dvojic mincí $\frac{1}{2k}$ a $2k$-tic mincí $\frac{1}{2k+1}$. Potom větší mince odhadni a menší k nim nějak přisyp.
Hint 14. Zkus najít algoritmus, který bude zachovávat součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, součet druhých mocnin bude ostře zvětšovat a udělá hodně dvojek.
Hint 15. Modulo 2 se hodí + zadaná operace nemůže zvýšit maximum konfigurace.
Hint 16. Nějaký algoritmus, který by ostře snižoval minimum těchto tří účtů by se hodil. Opět je důležitá binárka.
Hint 17. Obarvi ke zjištění nutné podmínky. Dále se zamysli nad algoritmem, který skoro ze všeho udělá nuly.
Hint 18. Jaký bude stav, budeme-li provádět druhou a třetí operaci dokud to jde?
Hint 19. Bude-li n sudé, můžeme čísla sloučit do dvojic, na které aplikujeme operaci. Bude se hodit dělení všech čísel dvěma a sčítání maximálního a minimálního prvku.
Hint 20. Barevnost grafu (kolika nejméně barvami lze imony obarvit tak, aby žádné 2 spojené neměly stejnou barvu).
Hint 21. Redukce všech čísel na nuly a jedničky.
Hint 22. Důležité pozorování – stačí dokázat tvrzení pro „do sebe zapadající“ množiny/cykly trojúhelníků, S je totiž jejich sjednocením. Pak zkus tvar těchto cyklů nějak zjednodušovat za zachování počtu trojúhelníků modulo 4. Rozeber milion případů.
Hint 23. Nejdřív zkus provádět první operaci, dokud to jde – při jakém stavu to už nepůjde? Pak půjde hned několikrát druhá a nějak se to urozebírá.
Hint 24. To první jde. To druhé ne.
Hint 25. Jde to. $(x, 0, 0) -> (x - y, 2^y, 0)$
Hint 26. Nejdřív dej do jedné místnosti největší partu a do druhé zbytek. Potom se to hodí nějak přibližně vyrovnat, aby velikosti největších part v obou místnostech byly už skoro stejné. Konec je třeba dorozebírat.
Hint 27. Dá se snadno zesymetričnit.

Harmonické čtveřice

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Příspěvek seznamuje s konceptem harmonických poměrů v planimetrii. Uvádí tvrzení, díky nimž lze harmonické konfigurace nacházet v geometrických úlohách olympiádního typu a používat je k často rychlému a elegantnímu řešení. Každá kapitolka obsahuje několik úloh k procvičení dané techniky.

Úmluva. Symbolem AB budeme značit tradičně přímku procházející body A, B a někdy navíc i délku *orientované úsečky* s krajními body A a B.

Dvojpoměr a promítání na přímky

Mějme přímku AB a na ní bod X. Polohu bodu X vzhledem k A a B můžeme vyjádřit tzv. *dělicím poměrem.*

Definice. Nechť X je bod na přímce AB různý od bodů A, B. Dělicí poměr bodu X vzhledem k bodům A a B je číslo $(AB, X) = \frac{AX}{BX}$.

Cvičení. Rozmyslete si, že pro dané body A, B je poloha bodu X hodnotou (AB, X) jednoznačně určena. Kdy je $(AB, X) > 0$?

Vzájemnou polohu čtyř bodů na přímce můžeme popsat podobnou veličinou.

Definice. *Dvojpoměr* bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) ležících na jedné přímce je číslo

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Cvičení. Dokažte, že

$$(AB, CD) = (CD, AB) = (BA, DC) = \frac{1}{(AB, DC)} = \frac{1}{(DC, AB)} = \frac{1}{(BA, CD)}.$$

Poslední cvičení nám říká, že význačné hodnoty dvojpoměru jsou 1 a -1. Z rovnosti $(AB, CD) = 1$ ovšem plyne, že $A = B$ nebo $C = D$, takže nás bude více zajímat hodnota -1.

Definice. Body A, B, C, D ležící na přímce tvoří *harmonickou čtveřici*, pokud platí $(AB, CD) = -1$.

Cvičení. Rozmyslete si, jak zhruba harmonické čtveřice vypadají. V jakém pořadí mohou na přímce ležet jejich body?

Tvrzení. Jsou dány přímky p, q a bod X mimo ně. Bodem X procházejí čtyři přímky, které protínají přímku p postupně v bodech A, B, C, D a přímku q postupně v bodech A', B', C', D'. Potom platí $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.

My budeme toto tvrzení používat hlavně pro promítání harmonických čtveřic. Příslušné čtyři přímky tvoří v tom případě *harmonický svazek.*

Jak poznat harmonickou čtveřici?

To nám velmi usnadní následující tvrzení.

Tvrzení. V následujících běžných konfiguracích se vyskytují harmonické čtveřice:

(i) Pokud M je střed AB, pak $(AB, M\infty) = -1$.
(ii) Ceviány AD, BE, CF se protínají v P. Označme $D' = EF \cap BC$. Pak platí $(BC, DD') = -1$.
(iii) Na průměru AB kružnice k se středem O je dán bod X. Je-li X' jeho obraz v kruhové inverzi podle k (tj. platí-li $|OX| \cdot |OX'| = |OA|^2 = |OB|^2$), pak $(AB, XX') = -1$.

Tvrzení („Dvě ze tří"). Nechť A, B, C, D leží na přímce a P mimo ni. Pak z libovolných dvou následujících bodů plyne třetí:

(i) $(AC, BD) = -1$,
(ii) $|\angle APC| = 90°$,
(iii) $|\angle BPC| = |\angle CPD|$, kde úhly chápeme orientovaně.

A konečně jsou tady…

Úlohy I

Úloha 1. Mějme trojúhelník ABC, bod I je jeho vepsiště, bod I_a jeho A-připsiště, D je průsečík osy úhlu u A a strany BC. Dokažte, že $(AD, II_a) = -1$.

Úloha 2. Ceviány AD, BE, CF se protínají v P. Označme $Q = BC \cap EF$, $R = AD \cap EF$, $S = CF \cap BR$ a $T = DF \cap BR$. Ukažte, že

$$(QR, EF) = (AP, DR) = (CS, PF) = (BS, RT) = -1.$$

Úloha 3. Body D, E, F jsou zvoleny postupně na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC tak, že $AD \cap BE \cap CF = K$. Přímka FD protíná přímku BE v bodě X, P je střed úsečky AK a EP protíná přímku AB v bodě Y. Dokažte $XY \parallel AD$.

Úloha 4. Na přímce p jsou dány body B, D, C v tomto pořadí. Dokažte, že všechny body A takové, že AD je osa úhlu BAC, leží na pevné kružnici (tzv. *Apolloniově kružnici*).

Úloha 5 (Blanchet Theorem). Na A-výšce AD trojúhelníka ABC je dán bod P. Označme $X = BP \cap AC$, $Y = CP \cap AB$. Dokažte $|\angle XDA| = |\angle YDA|$.

Úloha 6. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán pevný bod P. Body X, Y se pohybují po AB, AC tak, že $\angle XPA = \angle YPA$. Ukažte, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 7. Je dán trojúhelník ABC, body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB označme postupně D, E, F. Bod X leží uvnitř trojúhelníku ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku XBC se dotýká jeho stran v bodech D, Y a Z. Dokažte, že E, F, Y, Z leží na jedné kružnici. (IMO Shortlist 1995)

Úloha 8. V trojúhelníku ABC označme D patu osy úhlu u A a I_b, I_c vepsiště trojúhelníků ABD, ACD.

(i) Je-li $Q = BC \cap I_bI_c$, dokažte $|\angle DAQ| = 90°$. (Sharygin 2013)
(ii) Označíme-li průsečíky I_bI_c s AB, AC postupně M, N, dokažte, že MC a NB se protnou na AD.

Úloha 9. Je dána kružnice ω se středem O a tětivou AB ($O \notin AB$). Bod C leží na ω tak, že AC půlí úsečku OB. Označme $D = AB \cap OC$ a $F = BC \cap AO$. Dokažte, že $|AF| = |CD|$.

Harmonické čtyřúhelníky

Užitečným nástrojům není zdaleka konec. Co zkusit promítat na kružnice?

Tvrzení. Je dán bod P ležící na kružnici k a mimo přímku p. Přímky a, b, c, d protnou p v A', B', C', D' a k v A, B, C, D. Pak platí[1]

$$|(A'B', C'D')| = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|}.$$

Definice. Řekneme, že tětivový čtyřúhelník $ABCD$ je *harmonický*, pokud pro délky jeho stran platí $ac = bd$.

Pozorování. S použitím předchozího tvrzení si snadno rozmyslíme, že čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kružnice ω je harmonický právě tehdy, když pro libovolný bod $P \in \omega$ tvoří přímky PA, PB, PC, PD harmonický svazek.[2]

Tvrzení (O harmonických čtyřúhelnících). Buď D bod na oblouku BC kružnice k opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje bod A. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) Čtyřúhelník $ABDC$ je harmonický.
(ii) Přímka AD je A-symediána v $\triangle ABC$ (tedy čára symetrická s A-těžnicí podle osy úhlu u A).
(iii) Přímka AD a tečny ke k skrz B a C procházejí jedním bodem.

Cvičení. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v P. Dokažte, že pokud je BP symediána v ABC, pak AP je symediána v ABD.
(Rumunsko TST 2006)

Pojďme to vyzkoušet!

[1] Obecnější tvrzení bez absolutních hodnot také platí, ale potřebovali bychom k jeho formulaci komplexní čísla.
[2] Pokud například $P = A$, uvažujeme místo PA tečnu k ω v bodě A.

Úlohy II

Úloha 10. Kružnice vepsaná rovnoramennému trojúhelníku ABC ($|AB| = |AC|$) se dotýká AC v E. Přímka různá od BE vedená bodem B protíná kružnici vepsanou v bodech F, G. Přímky EF, EG protnou BC v K, L. Dokažte $|BK| = |CL|$.
(MEMO 2008)

Úloha 11. V trojúhelníku ABC platí $|AC| = 2|AB|$. Označme P průsečík tečen k jemu opsané kružnici ω vedených body A a C. Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici ω. (ČR TST 2012)

Úloha 12. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Označme $F = AB \cap CD$, $E = AD \cap BC$ a $T = AC \cap BD$. Předpokládejme, že A, B, T, E leží na kružnici, která protíná přímku EF v bodě P. Označme M střed úsečky AB. Dokažte, že $|\angle APM| = |\angle BPT|$. (Írán TST 2004)

Úloha 13. Paty kolmic z bodu D tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ na přímky BC, CA, AB označme postupně P, Q, R. Dokažte, že $|PQ| = |QR|$ právě tehdy, když se osy úhlů $\angle ABC$ a $\angle ADC$ protínají na úhlopříčce AC. (IMO 2003)

Úloha 14. V tětivovém pětiúhelníku $ABCDE$ platí $AC \parallel DE$ a střed M tětivy BD splňuje $|\angle AMB| = |\angle BMC|$. Dokažte, že BE půlí tětivu AC.

Poláry

Posledním objektem, který si ukážeme, budou *poláry.* Motivací pro jejich zkoumání je následující tvrzení.

Tvrzení. Tečny ke kružnici k vedené bodem A se jí dotýkají v bodech T, U. Přímka p procházející bodem A protne přímku TU v B a kružnici k v X, Y. Pak $(AB, XY) = -1$.

Definice. Buď k kružnice se středem O a $X \neq O$. Přímku, která prochází obrazem X' bodu X v kruhové inverzi podle k a je kolmá na OX, nazýváme *polárou* bodu X (vzhledem ke k). Bod X je *pól* přímky p (vzhledem ke k).

Tvrzení. Ať P, Q jsou body a p, q jejich poláry (vzhledem k nějaké kružnici k). Pak platí, že pokud P leží na q, pak Q leží na p.

Tvrzení. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsaný do kružnice k. Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Pak trojúhelník PQR je *selfpolar*, tedy PQ je polára bodu R, PR je polára bodu Q a QR je polára bodu P.

Teď už to musí jít samo, ne?

Úlohy III

Úloha 15. Je dána kružnice k a přímka p, která ji neprotíná. Po přímce p se pohybuje bod P. Tečny z P ke k se jí dotýkají v T a U. Dokažte, že přímka TU prochází pevným bodem.

Úloha 16. Je dána půlkružnice γ s průměrem UV. Její body P, Q splňují $UP < UQ$. Tečny k γ v bodech P a Q se protínají v bodě R. Označme $S = UP \cap VQ$. Dokažte $RS \perp UV$.

Úloha 17. Je dán trojúhelník ABC s vepsištěm I. Body dotyku kružnice vepsané s odpovídajícími stranami označme A_1, B_1, C_1. Dále označme $D = BC \cap B_1C_1$ a $F = DI \cap AA_1$. Dokažte $|\angle AFB| = |\angle AFC|$.

Úloha 18. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se středem I se dotýká jeho stran AB, AC v F, E. Označme N průsečík EF a A-těžnice AM. Dokažte $NI \perp BC$.

Obtížnější úlohy

Úloha 19. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. Kružnice s průměrem AB protne CH v bodech X a Y, kružnice s průměrem AC protne BH v bodech Z a W. Dokažte, že (nezávisle na označení) se XZ a YW protínají na BC.

(Brazílie 2013)

Úloha 20. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB v D, E, F. Úsečka AD protne vepsanou podruhé v J a přímky BJ, CJ protnou vepsanou podruhé v K, L. Dokažte, že KC, LB a AD procházejí jedním bodem.

Úloha 21. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patou A-výšky D a kolmištěm H. Kružnice skrz B a C protne kružnici nad průměrem AH v X a Y. Označíme-li P projekci D na XY, dokažte $|\angle BPD| = |\angle CPD|$. (Japonsko 2013)

Úloha 22. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Přímky AB a CD se protnou v bodě E, přímky BC, AD v bodě F. Průsečík úhlopříček označme P a projekci P na EF označme O. Dokažte, že $|\angle BOC| = |\angle AOD|$. (China TST 2002)

Literatura a zdroje

[1] David Hruška; *Harmonické čtveřice*, Zásada 2014, `http://mks.mff.cuni.cz/soustredeni/`
[2] Pepa Tkadlec; *Dvoupoměr a poláry*, Sborník *i*KS, 2013
[3] *http://www.artofproblemsolving.com*

Hinty

Hint 1. Využijte tvrzení „dvě ze tří“.
Hint 2. Vždy najděte správný bod, z nějž promítat.
Hint 3. Najděte harmonický svazek vycházející z Y.
Hint 4. Dokreslete čtvrtého do party k B, D, C a využijte tvrzení „dvě ze tří“.
Hint 5. Zkombinujte konfiguraci „Ceva–Mene“ a tvrzení „dvě ze tří“.
Hint 6. Podívejte se na XY z P a z A.
Hint 7. Čtvrtý do party k B, D, C a mocnost.
Hint 8.
(i) Kde je čtvrtý do party k I_bI_c a $X = AD \cap I_bI_c$?
(ii) Pokud mají dvě harmonické čtveřice společný bod, pak spojnice zbylých tří odpovídajících si dvojic procházejí jedním bodem.
Hint 9. Dokažte sporem(!), že $OB \parallel FD$.
Hint 10. Označte zbylé body dotyku, najděte harmonický čtyřúhelník a promítněte ho.
Hint 11. Dokažte, že BX, kde X je průnik osy BC a ω, je symediána v ABC.
Hint 12. Dokažte, že $PATB$ je harmonický.
Hint 13. Dokažte, že oba výroky jsou ekvivalentní s tím, že $ABCD$ je harmonický.
Hint 14. Začněte tím, že AC je symediána v ABD.
Hint 15. Kterým zajímavým bodem prochází polára bodu na přímce p?
Hint 16. Dokažte, že RS je polára bodu K.
Hint 17. Dokažte a využijte, že AA_1 je polára D.
Hint 18. Dokazujte, že N je pól rovnoběžky s BC bodem A.
Hint 19. Pokud mají dvě harmonické čtveřice společný bod, pak zbylé tři spojnice procházejí jedním bodem.
Hint 20. Ukažte, že $JKDL$ je harmonický.
Hint 21. Chordály tří kružnic procházejí jedním bodem.
Hint 22. Dokažte, že OP je společná osa jistých dvou úhlů.

Inverze

Rado Švarc

Abstrakt. V příspěvku zavedeme inverzi a ukážeme si spoustu příkladů.

Inverze je jedno z nejexotičtějších geometrických zobrazení. Přestože nezachovává ani tak jednoduché objekty jako jsou přímky, má řadu překvapujících a užitečných vlastností, díky nimž je velmi silným nástrojem při řešení jinak obtížných geometrických úloh.

Definice

Úmluva. Rovinu rozšíříme o (jediný) bod ∞, o němž prohlásíme, že leží na všech přímkách.

Definice. *Inverze* je geometrické zobrazení určené kružnicí k se středem O a poloměrem r, které bodu A přiřadí bod A' podle následujících pravidel:

(i) Když je $A = O$, potom $A' = \infty$.
(ii) Když je $A = \infty$, potom $A' = O$.
(iii) Jinak je A' bod polopřímky OA, pro který platí

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2.$$

Základní vlastnosti

Tvrzení. Platí několik jednoduchých vlastností:

1) Inverze je bijekce, pokud ji navíc provedeme dvakrát podle stejné kružnice, dostaneme identitu.
2) Pevné body inverze podle kružnice k jsou přesně body této kružnice.
3) Pokud leží bod A „uvnitř“ kružnice k, leží obraz A' „vně“, a naopak.

Lemma. Je dána kružnice k se středem I a poloměrem r. Uvažujme libovolnou dvojici bodů X, Y. Označme X', Y' obrazy bodů X, Y v inverzi podle kružnice k. Pak $\angle IXY = \angle X'Y'I$.

Tvrzení (Tětivové čtyřúhelníky). Je dána kružnice k se středem I a body A, B takové, že neleží na jedné přímce s I. Označme A', B' obrazy bodů A, B v inverzi podle k. Pak body A, B, A', B' leží na jedné kružnici.

Tvrzení (Stěžejní). Uvažme inverzi určenou kružnicí k se středem I. Pak

(i) obrazem přímky procházející bodem I je ona sama,
(ii) obrazem přímky **ne**procházející bodem I je kružnice procházející bodem I,

(iii) obrazem kružnice procházející bodem I je přímka **ne**procházející bodem I,
(iv) obrazem kružnice **ne**procházející bodem I je kružnice **ne**procházející bodem I.

Tvrzení. Podle předchozího tvrzení je obrazem kružnice k se středem O nějaká kružnice k' se středem S (neprochází-li k středem inverze I). Pak bod S leží na polopřímce IO, ale není to obraz bodu O (inverze tedy na sebe nezobrazuje středy kružnic).

Tvrzení (Konstrukce obrazu). Je dána kružnice k a bod A vně této kružnice. Tečny ke kružnici k vedené bodem A se jí dotýkají v bodech T, U. Pak obraz A' bodu A v inverzi podle kružnice k je střed úsečky TU.

Základní příklady

V následujících cvičeních byste neměli potřebovat žádnou hlubokou myšlenku, jen základní znalosti inverze a schopnost identifikovat vhodný střed.

Tvrzení (Feuerbachova kružnice). Buď ABC trojúhelník se středy stran A_0, B_0, C_0, patami výšek X, Y, Z a středy spojnic vrcholů z kolmištěm[1] D, E, F. Pak body A_0, B_0, C_0, D, E, F, X, Y a Z leží na jedné kružnici. Této kružnici říkáme Feuerbachova.

Tvrzení (Eulerova přímka). Nechť G, O, H, a N jsou postupně těžiště, opsiště, kolmiště a devítiště[2] trojúhelníku ABC. Pak H, N, G a O leží v tomto pořadí na přímce a platí $HN : NG : GO = 3 : 1 : 2$. Této přímce se říká Eulerova.

Cvičení 1. Buď ABC pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u B. Nechť X a Y jsou body na stranách AB a BC. Ukažte, že paty kolmic z B na AY, YX, YC a CA leží na jedné kružnici.

Cvičení 2. Nechť ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 jsou kružnice takové, že ω_i a ω_{i+1} se dotýkají s A_i (kde $\omega_5 = \omega_1$). Ukažte, že $A_1A_2A_3A_4$ je tětivový čtyřúhelník.

Cvičení 3. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T a obě mají vnitřní dotyk s kružnicí m po řadě v bodech U, V. Přímka UT protne kružnici m podruhé v bodě X. Ukažte, že $TV \perp VX$. (KMS)

Cvičení 4. Buď $ABCD$ čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami, které se protínají v E. Ukažte, že obrazy bodu E podle stran $ABCD$ všechny leží na jedné kružnici. (USAMO 1993/2)

Cvičení 5. Je dána půlkružnice t nad průměrem AB. Přímka p kolmá na AB protíná úsečku AB v bodě C a půlkružnici t v bodě D. Kružnice k se dotýká úsečky AC v bodě E, půlkružnice t v bodě T a navíc přímky p. Dokažte, že DE půlí úhel ADC. (Izrael 1995)

[1] Kolmiště je neoficiální název pro ortocentrum.
[2] Devítiště je neoficiální název pro střed Feuerbachovy kružnice.

Cvičení 6. Nechť KL a KN jsou tečny z bodu K ke kružnici k. Na polopřímce opačné k NK leží bod M. Buď P druhý průsečík k s (KLM). Patu kolmice z N na ML označme jako Q. Ukažte, že $\angle MPQ = \angle KML$.

Cvičení 7. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

1) kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2, kružnice ω_2 body A_2 a A_3, kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2,
2) kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Dokažte, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají. (MKS 24-2-7)

Cvičení 8. Buď ABC trojúhelník takový, že K je střed strany AB a L střed strany AC. Nechť P je druhý průsečík kružnic (ABL) a (AKC). Buď Q druhý průsečík úsečky AP s (KAL). Dokažte, že $AQ = 2PQ$. (Baltic Way 2006)

Cvičení 9. Jsou dány pevné kružnice k a l protínající se v bodech A, B. Uvažme nějaké dvě kružnice m, n, které mají obě vnější dotyk s k, vnitřní dotyk s l a navíc se samy dotýkají v bodě X. Ukažte, že bod X leží na pevné kružnici nezávislé na volbě m a n.

Cvičení 10. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB postupně v bodech D, E, F. Bod X leží uvnitř trojúhelníka ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku BCX se dotýká jeho stran BC, CX, XB postupně v bodech D, Y, Z. Ukažte, že body E, F, Y, Z leží na jedné kružnici. (IMO SL 1995)

Cvičení 11. Uvažujme půlkružnici ω nad průměrem AB se středem O. Přímka ℓ protíná přímku AB v bodě M a půlkružnici ω v bodech C a D tak, že $MA > MB$ a $MD > MC$. Kružnice (AOD) a (BOC) se protínají v bodě K. Ukažte, že K leží na kružnici nad průměrem MO. (Rusko 1995, Írán 1996)

Cvičení 12. Kružnice k, l se protínají v bodech A, D. Jejich společná tečna bližší bodu A se dotýká k v E a l v F. Rovnoběžka s touto tečnou procházející bodem D protne kružnice k, l podruhé v bodech C, B. Kružnice opsané trojúhelníkům CDF a BDE se podruhé protínají v bodě P. Ukažte, že body D, A a P leží v přímce. (Brkos 2011)

Přepočítávací lemma

Inverze není shodné ani podobné zobrazení. Přesto dokážeme vyjádřit vzdálenost obrazů dvou bodů následujícím způsobem.

Lemma (Přepočítávací lemma). Je dána kružnice k se středem I a poloměrem r. Uvažujme libovolnou dvojici bodů X, Y. Označme X', Y' obrazy bodů X, Y v inverzi podle kružnice k. Pak $|X'Y'| = |XY| \cdot \frac{r^2}{|IX| \cdot |IY|}$.

Cvičení 13 (Ptolemaiova nerovnost). Buď $ABCD$ čtyřúhelník. Pak

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

přičemž rovnost nastává právě pro tětivové čtyřúhelníky.

Cvičení 14. Buď k kružnice se středem S ležící uvnitř trojúhelníka ABC. Nechť B_1 a B_2 jsou dotyky tečen z B ke k. Označme průsečík B_1B_2 s BS jako B'. Analogicky sestrojíme body A' a C'. Ukažte, že pokud

$$\frac{1}{SA} : \frac{1}{SB} : \frac{1}{SB} = BC : CA : AB,$$

pak trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný.

Cvičení 15. Nechť P je bod uvnitř trojúhelníku ABC takový, že

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Nechť D a E jsou vepsiště trojúhelníků APB a APC. Ukažte, že přímky AP, BD a CE se protínají v jednom bodě. (IMO 1996/2)

Cvičení 16. Buď P bod a Γ_1, Γ_2, Γ_3 a Γ_4 kružnice obsahující P takové, že Γ_1 se zvenku dotýká Γ_3 a Γ_2 se zvenku dotýká Γ_4. Označme druhý průsečík Γ_i s Γ_{i+1} jako A_i. Ukažte, že

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_2A_3}{A_3A_4 \cdot A_4A_1} = \frac{PA_2^2}{PA_4^2}.$$

(IMO SL 2003/G4)

Cvičení 17. Nechť A, B, C, D jsou 4 body takové, že C a D leží na stejné straně od AB a platí $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ a $\angle ADB = 90^\circ + \angle ACB$. Určete poměr

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$$

a ukažte, že tečny ke kružnicím (ACD) a (BCD) z bodu C jsou na sebe kolmé. (IMO 1993/2)

Personalizujeme si inverzi

Přestože při invertování je obvykle důležitý pouze střed inverze, občas se hodí mít i správný poloměr.

Definice. Řekneme, že dvě kružnice ω_1 a ω_2 jsou kolmé, když se protínají a tečny k ω_1 a ω_2 v jejich průniku jsou na sebe kolmé.

Tvrzení. Uvažme inverzi určenou kružnicí k se středem I. Pak kružnice ω různá od k se v této inverzi zobrazí sama na sebe právě tehdy, když jsou ω a k kolmé.

Tvrzení. Pro kružnici k a bod T vně ní existuje inverze se středem T, v niž se k zobrazí sama na sebe.

Tvrzení. Jsou-li ω_1, ω_2, ω_3 tři kružnice ležící vně sebe, jejichž středy neleží na přímce, pak existuje inverze, která každou z nich zobrazuje na sebe samotnou.

Cvičení 18. Nechť ω_1 a ω_2 jsou dvě kolmé kružnice. Označme střed ω_1 jako O. Nechť AB je průměr ω_1 takový, že B leží uvnitř ω_2. Sestrojíme dvě kružnice procházející A a O, které se dotýkají ω_2 v bodech F a G. Ukažte, že $FBGO$ je tětivový čtyřúhelník. (ELMO SL 2013)

Cvičení 19. Buď Ω kružnice s tětivou AB a ω kružnice dotýkající se AB v bodě K a Ω v bodě T. Označme si jako M střed oblouku AB, který neobsahuje T. Ukažte, že M leží na přímce TK a že mocnost M k ω je MB^2.

Cvičení 20. Je dán trojúhelník ABC. Označme polovinu jeho obvodu s. Na přímce AC nalezneme body X, Y tak, že $BX = s = BY$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku XBY se dotýká kružnice připsané trojúhelníku ABC vzhledem k vrcholu B.

Cvičení 21. Buď $ABCD$ dvojstředový čtyřúhelník.[1] Ukažte, že čtyřúhelník vytvořený z bodů dotyku kružnice vepsané má kolmé úhlopříčky.

Cvičení 22. Kružnice ω_1, ω_2, ω_3 leží vně sebe. Kružnice ω se jich dotýká zvenku v bodech A_1, A_2, A_3 a kružnice Ω se jich dotýká zevnitř v bodech B_1, B_2, B_3. Ukažte, že přímky A_1B_1, A_2B_2 a A_3B_3 se protínají v jednom bodě.

Cvičení 23 (Shoemaker's Knife). Nechť A, B, C jsou tři body ležící v tomto pořadí na přímce. Zkonstruujme půlkružnice Γ_{AC}, Γ_{AB}, ω_0 postupně nad průměry AC, AB a BC (všechny na stejné straně od AC). Pro každé přirozené k buď ω_k kružnice dotýkající se Γ_{AC}, Γ_{AB} a ω_{k-1}.

Ukažte, že pro každé n je vzdálenost středu ω_n od AC rovna n-násobku průměru ω_n.

Cvičení 24. Kružnice ω_a a ω_b mají vnější dotyk v bodě T. Jejich vnější společná tečna ℓ se dotýká ω_a a ω_b v A a B. Buď ω kružnice se středem v bodě O a poloměrem r, která se dotýká ω_a i ω_b zvenku a pro kterou je ℓ tečna. Ukažte, že $OT \geq 3r$.

Cvičení 25 (Feuerbachova věta). Ukažte, že Feuerbachova kružnice trojúhelníka ABC se dotýká jeho kružnice vepsané i všech jeho kružnic připsaných.

Cvičení 26 (Steinerovo porisma). Uvnitř kružnice k je dána kružnice ℓ. Předpokládejme, že existuje n-prvkový řetěz kružnic $m_1, \ldots, m_n$ takový, že každá kružnice v řetězu má vnější dotyk se svými dvěma sousedními kružnicemi a s ℓ a vnitřní dotyk s k. Potom každá kružnice mající vnější dotyk s ℓ a vnitřní dotyk s k je částí nějakého n-prvkového řetězu.

Překlápíme

Speciální případ toho, kdy se hodí zvolit si partikulární poloměr je skládání inverze s překlápěním podle osy úhlu.

Tvrzení. Nechť M a N jsou body na úsečkách AB a BC takové, že $MN \parallel AC$. Pak inverze s středem v B a poloměrem $\sqrt{BA \cdot BN}$ složená s překlopením podle osy úhlu ABC zobrazuje body A, C, M a N postupně na N, M, C a A.

[1] To je čtyřúhelník, který je zároveň tečnový a tětivový.

Důsledek. Inverze s středem v B a poloměrem $\sqrt{BA \cdot BC}$ složená s překlopením podle osy úhlu ABC na sebe zobrazuje body A a C.

Cvičení 27. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Ω. Kružnice ω se dotýká stran AB a BC a má vnitřní dotyk s Ω v bodě P. Přímka ℓ je rovnoběžná s AC, protíná vnitřek $\triangle ABC$ a dotýká se ω v bodě Q. Ukažte, že $\angle ABP = \angle QBC$.
(EGMO 2013/5)

Cvičení 28. Nechť M, N jsou body na stranách AB a AC trojúhelníku ABC takové, že $MN \parallel BC$. Přímky BN a CM se protínají v bodě P. Kružnice (MPB) a (NPC) se podruhé protínají v bodě Q. Ukažte, že $\angle BAQ = \angle CAP$.
(Balkán 2009)

Cvičení 29. Buď M střed strany AC v trojúhelníku ABC. Tečny ke kružnici (ABC) v A a C se protínají v T. Ukažte, že $\angle ABM = \angle CBT$.

Cvičení 30. Označme O opsiště trojúhelníka ABC. Jeho Feuerbachova kružnice protíná kružnici opsanou AOC v dvou bodech K a L. Dokažte, že $\angle ABK = \angle CBL$.
(iKS 3-4, Srbsko 2015/3)

Cvičení 31. Na straně BC trojúhelníku ABC leží body K a L tak, že $\angle BAK = \angle CAL < \frac{1}{2}\angle BAC$. Kružnice ω_1 se dotýká přímek AB a AL, kružnice ω_2 se dotýká přímek AC a AK. Předpokládejme, že se ω_1 a ω_2 protínají v P a Q. Dokažte, že $\angle PAC = \angle QAB$. (Kazachstán 2012)

Cvičení 32 (Kosnitha Theorem). Buď O opsiště $\triangle ABC$. Označíme si O_a, O_b a O_c opsiště trojúhelníků BOC, COA a AOB. Pak se přímky AO_a, BO_b a CO_c protínají v jednom bodě.

Cvičení 33. Je dán trojúhelník ABC. Na přímce AB leží body D a E v pořadí D, A, B, E tak, že $DA = AC$ a $BE = BC$. Osy úhlů v A a B protínají protilehlé strany postupně v P a Q a kružnici opsanou ABC postupně v M a N. Označme jako O_1 a O_2 postupně opsiště trojúhelníků CBE a DAC. Průsečík AO_1 a BO_2 nazvěme X. Ukažte, že $CX \perp PQ$. (Srbsko 2008, Slovensko TST 2008)

Cvičení 34. Rovnoběžka ℓ se stranou BC ostroúhlého trojúhelníka ABC vepsaného do kružnice ω protne jeho strany AB, AC postupně v bodech D, E a kratší oblouky AB, AC kružnice ω v bodech K, L (v pořadí K, D, E, L). Kružnice k_1 se dotýká úseček BD a DK a kružnice ω, kružnice k_2 se dotýká úseček CE, EL a kružnice ω. Určete množinu všech průsečíků vnitřních tečen kružnic k_1 a k_2 pro pohyblivé ℓ.
(RMM 2011/3)

Stereometrie

Tvrzení. Inverze v prostoru funguje tak, jak bysme čekali.

Cvičení 35. V prostoru se vznáší kružnice k a bod A mimo rovinu danou kružnicí k. Označme B kolmou projekci bodu A do dané roviny. Uvažme libovolný bod C

kružnice k a kolmou projekci D bodu B na přímku AC. Ukažte, že existuje kružnice l taková, že nezávisle na volbě bodu C bude bod D ležet na l. (MKS 36-6-6)

Cvičení 36. Je dán trojúhelník ABC a dále mimo rovinu danou tímto trojúhelníkem bod S takový, že $SA = SB = SC$. Na úsečkách SA, SB, SC nalezneme postupně body X, Y, Z tak, aby rovina XYZ byla rovnoběžná s rovinou ABC. Buď O střed sféry opsané čtyřstěnu $SABZ$. Dokažte, že přímka SO je kolmá na rovinu XYC. (iKS 2-2)

Cvičení 37. Sféra se středem v rovině ABC prochází A, B a C. Bod S leží mimo tuto rovinu tak, aby tato sféra protínala úsečky AS, BS a CS v bodech X, Y a Z různých od bodů A, B, C a S. Roviny dotýkající se této sféry v bodech X, Y a Z se protínají v bodě O. Ukažte, že O je opsiště čtyřstěnu $SXYZ$.

Cvičení 38. Šestistěn má osm vrcholů a každá jeho stěna je čtyřúhelník. Ukažte, že pokud sedm z těchto vrcholů leží na jedné sféře, pak na ní leží i ten osmý.

Další příklady

Abysme toho neměli málo, tak hurá do dalších příkladů!

Cvičení 39. Buď ℓ přímka, na které leží body A, B a C, ale ne P. Ukažte, že P leží na kružnici opsané trojúhelníku z opsišť $\triangle BPA$, $\triangle APC$ a $\triangle CPB$.

Cvičení 40. Buď O opsiště trojúhelníka ABC. Body E, F leží na úsečkách OB, OC tak, že platí $BE = OF$. Nechť M a N jsou středy oblouků EOA a AOF. Dokažte, že $\angle ENO + \angle OMF = 2\angle BAC$. ($i$KS 6-5)

Cvičení 41. Buď $ADBE$ čtyřúhelník, ve kterém $AD \perp DB$ a $BE \perp EA$. Jeho průsečík diagonál si označme jako C a střed AB si označme jako O. Nechť γ je kružnice opsaná $\triangle BOD$ a nechť F je bod na γ takový, že OF tvoří průměr γ. Nakonec si označme druhý průsečík polopřímky FC s γ jako G. Dokažte, že A, O, G a E leží na jedné kružnici. (Čína Západ 2006/6)

Cvičení 42. Lichoběžník $ABCD$ s $AB \parallel CD$ je vepsaný v kružnici ω. Bod G leží uvnitř $\triangle BCD$. Polopřímky AG a BG podruhé protnou ω v P a Q. Rovnoběžka k AB procházející skrze G protíná BD a BC v bodech R a S. Dokažte, že $PQRS$ je tětivový právě tehdy, když G leží na ose úhlu CBD. (USAMO 2009/5)

Cvičení 43. Buď ABC trojúhelník s vepsištěm I a opsištěm O. Nechť D, E a F jsou dotyky kružnice vepsané $\triangle ABC$ se stranami. Označme jako G těžiště $\triangle DEF$. Ukažte, že O, I a G leží na jedné přímce.

Cvičení 44. Buď ABC trojúhelník s vepsištěm I a kružnicí vepsanou dotýkající se stran BC, CA a AB v bodech D, E a F. Označme jako Q takový bod, že $BA \perp AQ$ a $BC \perp CQ$. Průsečík QI s DF nazvěme P. Ukažte, že $EP \perp DF$. (NIMO 2014)

Cvičení 45. V různostranném ostroúhlém trojúhelníku ABC s kolmištěm H označme jako α', β' a γ' hodnoty $180^\circ - \angle BAC$, $180^\circ - \angle CBA$ a $180^\circ - \angle ACB$. Body

H_a, H_b, H_c uvnitř $\triangle ABC$ splňují

$$\begin{array}{lll} \angle BH_aC = \alpha', & \angle CH_aA = \gamma', & \angle AH_aB = \beta', \\ \angle CH_bA = \beta', & \angle AH_bB = \alpha', & \angle BH_bC = \gamma', \\ \angle AH_cB = \gamma', & \angle BH_cC = \beta', & \angle CH_cA = \alpha'. \end{array}$$

Ukažte, že body H, H_a, H_b a H_c leží na jedné kružnici.

(Mathematical Reflections, Kenny)

Cvičení 46. Nechť $A_1A_2A_3$ je různostranný trojúhelník s vepsištěm I. Buď C_i ta menší z kružnic procházejících I, které se dotýkají A_iA_{i+1} a A_iA_{i+2}. Označme jako B_i druhý průsečík C_{i+1} a C_{i+2}. Ukažte, že opsiště trojúhelníků A_1B_1I, A_2B_2I a A_3B_3I leží všechna na jedné přímce. (IMO SL 1997)

Cvičení 47. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník ve kterém $AB > AC$. Označme jeho kružnici opsanou, jeho kolmiště, patu výšky z A a střed strany BC postupně jako Γ, H, F a M. Nechť Q a K jsou takové body na Γ, že $HQ \perp QA$ a $HK \perp KQ$. Předpokládejme, že A, B, C, K a Q jsou všechny různé body a leží na Γ v tomto pořadí. Ukažte, že (KQH) a (KFM) se dotýkají. (IMO 2015/3)

Cvičení 48. Kružnice ω vepsaná ostroúhlému trojúhelníku ABC se dotýká strany BC v K. Nechť D je pata výšky z A a M je střed AD. Pokud N je druhý společný bod ω a KM, ukažte, že se ω dotýká (BNC). (IMO SL 2002 G7)

Cvičení 49. Trojúhelníky ABC a XYZ sdílí vepsanou kružnici a navíc body B, C, Y, Z leží v přímce. Uvažme kružnici, která se dotýká úseček AB, AC a navíc kružnice opsané trojúhelníku ABC, a její bod dotyku s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC označme T. Ukažte, že pokud X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, tak T leží na kružnici opsané trojúhelníku XYZ. (*i*KS 3-1, Taiwan TST 2014)

Cvičení 50. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník s kružnicí opsanou ω a buď ℓ tečna k ω. Přímky ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c vzniknou z ℓ překlopením podle přímek BC, CA a AB. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c se dotýká ω.

(IMO 2011/6)

Cvičení 51. Buď ABC trojúhelník a P bod. Přímka procházející P protíná podruhé kružnice (APB), (BPC), (CPA) v bodech P_a, P_b, P_c. Nechť ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c jsou tečny k (APB), (BPC), (CPA) v bodech P_a, P_b, P_c. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c se dotýká (ABC).

Literatura a zdroje

[1] Evan Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*,

[2] Josef Tkadlec, Michal Rolínek: *107 Geometry Problems from the AwesomeMath Year-Round Program*,

[3] Dušan Djukić: *Inversion*,

[4] Josef Tkadlec: *Kruhová inverze*,

[5] Cosmin Pohoata: *110 Geometry Problems for the International Mathematical Olympiad*

Hinty

Hint 1. Zinvertujte podle B a použijte buď Thaletovky v původním obrázku, nebo prosté přehazování úhlů.
Hint 2. Zinvertujte podle libovolného z A_i a dvě kružnice, které se změní na přímky, si nakreslete svisle.
Hint 3. Zinvertujte podle T. Pak je to jen přehození úhlu a symetrie.
Hint 4. Dokreslete si kružnice se středem ve vrcholech čtyřúhelníka, které procházejí skrz E.
Hint 5. Invertujte podle E a najděte rovnoramenný trojúhelník.
Hint 6. Zinvertujte podle M. Dokreslete si střed obrazu k a s pomocí stejnolehlosti doúhlete.
Hint 7. Zinvertujte podle A_1 a najděte středovou souměrnost.
Hint 8. Upravte si dokazovanou rovnost do invertovatelnějšího stavu. Pak zinvertujte podle A.
Hint 9. Zinvertujte podle A a použijte symetrii.
Hint 10. Zinvertujte podle D. V novém obrázku použijte osy úseček.
Hint 11. Zinvertujte podle ω a najděte Feuerbachovu kružnici.
Hint 12. Zinvertujte podle D. Pokud znáte Gergonnův bod, jste hotovi. Jinak použijte Cevovu větu.
Hint 13. Zinvertujte podle libovolného z vrcholů. Použijte přepočítávací lemma (a trojúhelníkovou nerovnost).
Hint 14. Body A', B', C' jsou obrazy A, B, C v inverzi podle k. Použijte přepočítávací lemma.
Hint 15. Nejprve pomocí věty o ose úhlu převeďte úlohu na důkaz metrické rovnosti. Pak zinvertujte podle P a dopočítejte.
Hint 16. Zinvertujte podle P a použijte přepočítávací lemma.
Hint 17. Zinvertujte podle D a pomocí přepočítávacího lemmatu a úhlení popište, jak vypadá trojúhelník ABC.
Hint 18. Zinvertujte podle ω_1. Dokreslete si střed EF.
Hint 19. Zinvertujte podle kružnice se středem M s poloměrem MB. Body A a B se zachovají, body K a T se prohodí.
Hint 20. Jak daleko jsou body dotyku kružnice připsané s BA a BC od B?
Hint 21. Zinvertujte podle kružnice vepsané. Najděte tětivový rovnoběžník.
Hint 22. Zinvertujte podle kružnice, která zachovává ω_1, ω_2 i ω_3.
Hint 23. Zinvertujte podle kružnice se středem v A, která zachovává ω_n.
Hint 24. Zinvertujte podle kružnice, která má střed v T a zachovává ω.
Hint 25. Udělejte inverzi se středem ve středu strany, která zachovává kružnici vepsanou a jednu z kružnic připsaných. Dopočítejte, že Feuerbachova kružnice se změní na jejich druhou společnou tečnu.
Hint 26. Invertujte tak, aby se kružnice k a ℓ staly soustřednými.
Hint 27. Udělejte inverzi se středem B a poloměrem $\sqrt{AB \cdot BX}$ složenou s překlopením podle osy úhlu ABC, kde X je průsečík ℓ s BC.

Hint 28. Uvědomte si, že Q leží na kružnicích (ANB) a (AMC). Pak udělejte vhodnou inverzi se středem v A, překlopte podle osy a rozmyslete si, že máte hotovo.

Hint 29. Udělejte inverzi se středem B a poloměrem $\sqrt{AB \cdot BC}$ složenou s překlopením podle osy úhlu ABC. Využijte mocnost.

Hint 30. Uvažujte inverzi se středem B a poloměrem $\sqrt{\frac{AB \cdot BC}{2}}$ složenou s překlopením podle osy úhlu ABC.

Hint 31. Udělejte inverzi se středem v A a takovým poloměrem, aby se po složení této inverze s překlopením přes osu $\angle BAC$ kružnice ω_1 a ω_2 prohodily.

Hint 32. Udělejte inverzi se středem B a poloměrem $\sqrt{\frac{AB \cdot BC}{2}}$ složenou s převrácením podle osy úhlu ABC.

Hint 33. Dokreslete si opsiště trojúhelníku PCQ. Uvažte inverzi se středem v B a poloměrem $\sqrt{AB \cdot BC}$ složenou s překlopením podle osy úhlu ABC a analogickou inverzi z A. Použijte isogonal conjugates.

Hint 34. Uvažuje inverzi se středem A a poloměrem $\sqrt{AB \cdot AE}$ složené s překlopením podle osy úhlu BAC. Potom uvažujte obraz k_1 podle osy úhlu BAC a dokončete úlohu skládáním stejnolehlostí.

Hint 35. Všimněte si, že inverze středem v A a poloměrem AB prohazuje D a C.

Hint 36. Udělejte inverzi se středem S, která prohazuje A a X.

Hint 37. Udělejte inverzi se středem S, která prohazuje A a X.

Hint 38. Zinvertujte podle jednoho ze sedmi vrcholů. Podívejte se na to ze správné roviny. Znalost Miquelovy věty vám zjednoduší práci.

Hint 39. Zinvertujte podle P a využijte Simsonovu přímku.

Hint 40. Zbavte se B a C, zinvertujte podle O a z vhodných metrický vztahů ukažte rovnoběžnost.

Hint 41. Zinvertujte přes O a najděte Feuerbachovu kružnici.

Hint 42. Zinvertujte podle B. Všimněte si, že $PQRS$ je lichoběžník, tedy je tětivový právě tehdy, když je rovnoramenný.

Hint 43. Zinvertujte podle kružnice vepsané to, co se dá rozumně zinvertovat. Nešahejte na to, co se invertuje blbě. Pak najděte Eulerovu přímku.

Hint 44. Částečně zinvertujte podle kružnice vepsané, najděte rovnoramenný lichoběžník a trochu úhlete.

Hint 45. Ukažte, že H_b je průsečík (AHC) kružnice nad průměrem BH. Analogicky pro ostatní. Zinvertujte podle H. Výslednou kolineárnost buď ukažte Menealovkou, nebo si uvědomte, že se jedná o chordálu dvou kružnic.

Hint 46. Zinvertujte podle I. Nalezněte nějaké stejnolehlé trojúhelníky a z nich odvoďte, že se nějaké tři přímky protínají v jednom bodě. Doúhlete.

Hint 47. Zinvertujte podle H a najděte pár obdélníků. Hodí se všimnout si, že Q, M a H leží na přímce.

Hint 48. Vyjádřete $\tan \angle BKM$ jen pomocí úhlů v ABC. Potom si zadefinujte L jako bod na ω takový, že ω se dotýká (BLC). Abyste ukázali, že $N = L$, udělejte inverzi podle K a pak zatněte zuby a spočítejte $\tan \angle BKL$.

Hint 49. Zinvertujte podle kružnice vepsané. Najděte hafo kružnic se stejným poloměrem, dokreslete středy některých z nich, najděte pár kosočtverců. Najděte střed hledané kružnice a ukažte, že je to fakt střed.

Hint 50.

(i) Zinvertujte podle kolmiště ABC. Fakt.

(ii) Podívejte se na následující cvičení a uvědomte si, že speciální případ, kdy P je kolmiště ABC nám dává řešení.

Hint 51.

(i) Zinvertujte podle P.

(ii) Kružnice opsané trojúhelníkům vytvořených ze tří z přímek $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ a ℓ (kde čárky značí obrazy po inverzi) se protínají v M.

(iii) Doúhlete, že M leží na spojnici opsišt vhodných trojúhelníků a tudíž je bodem botyku kružnic opsaných jiným trojúhelníkům (těm, kterým chceme).

Funkcionálky nad prirodzenými číslami

Martin „Vodka“ Vodička

Abstrakt. Príspevok obsahuje veľa funkcionálnych rovníc nad celými číslami, ktoré sa za posledné roky vyskytli v olympiádach. Okrem toho obsahuje zopár základných tipov, čo sa s funkcionálkami dá robiť.

Čo všetko sa dá s funkcionálkami nad $\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{Z}$ robiť? No sú to funkcionálky, takže najprv nezabudnite vždy dosadiť nuly, resp. jednotky, môže to niečo hodiť. Tak isto ako pri normálnych funkionálkach sa oplatí zisťovať nejaké vlastnosti funkcie ako prostosť, surjektívnosť, rastúcosť…

Okrem toho ale treba často využiť, že sú tam len prirodzené čísla. Často sa proste dá len indukciou dospieť k predpisu. Ak nie, môže sa oplatiť skúmať nejaké deliteľnosti, dosadzovať prvočísla, atď.

Môžeme si dať zopár ľahkých príkladov na úvod, aby sme si ukázali nejaké základné metódy:

Ľahký príklad. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f(m) + f(n) = f(m + n).$$

Ľahký príklad. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré majú pre každé prirodzené číslo m nasledujúcu vlastnosť: ak označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$ všetky delitele čísla m, platí

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdots f(d_n) = m.$$

(Domáce kolo MO A, 2016/2017)

Ľahký príklad. Nájdite všetky (-/bijektívne/rastúce) funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f(m)f(n) = f(mn).$$

Ľahký príklad. Nájdite všetky ohraničené funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$x - y \mid f(x) - f(y).$$

Ľahký príklad. Nájdite všetky prosté funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Ľahký príklad. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ také, že

$$f(f(n)) = n + 1987.$$

(IMO 1987)

Ak ste čakali, že tu bude nejaká väčšia teória alebo nebodaj nejaké vety, tak ste na omyle, pretože žiadne vety na fukcionálky nepoznám :(.

Je to tým, že každý príklad je predsa len kúsok iný, a preto je najlepšie mať niečo zrátané, aby ste vedeli aké všetky finty sa dajú používať. Pred tým, než sa dáme do rátania, sa musím priznať, že som lenivý:

Poznámka. Ak je v úlohe napísaný nejaký vzťah, v ktorom vystupujú nejaké premenné, a nie je uvedené inak, tak uvedený vzťah platí pre všetky možné hodnoty premenných z definičného oboru hľadanej funkcie.

Indukcia

Príklad 1. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(m + n) - 1 \mid f(m) + f(n)$ a $n^2 - f(n)$ je štvorec. (Romanian District Olympiad 2014)

Príklad 2. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$(n - 1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n.$$

(Kanada 2015)

Príklad 3. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

Príklad 4. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla a, b, c spĺňajúce $a + b + c = 0$ platí

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(IMO 2012)

Príklad 5. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(f(n)) + f(n + 1) = n + 2$.

Príklad 6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(n)$ je štvorec a

$$f(m + n) = f(m) + f(n) + 2mn.$$

Príklad 7. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(f(n)) < f(n + 1)$.

Príklad 8. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(n!) = f(n)!$ pre všetky prirodzené n a tiež $m - n \mid f(m) - f(n)$ pre všetky rôzne prirodzené m, n.

(USAMO 2012)

Príklad 9. Nájdite všetky surjektívne funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené čísla a, b platí práve jedna z rovností

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a + b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

(MEMO 2015)

Prvočísla

Príklad 10. Uvažujme všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(nf(m)) = mf(n)$. Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(2007)$.

Príklad 11. Uvažujme všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(n^2 f(m)) = mf^2(n)$. Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(1998)$. (IMO 1998)

Príklad 12. Nech n je nepárne prirodzené číslo. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, aby pre všetky celé čísla x a y platilo $f(x) - f(y) \mid x^n - y^n$. (výberko 2012)

Príklad 13. Určte všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$(g(m) + n)(m + g(n)).$$

je štvorcom celého čísla pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$. (IMO 2010)

Rôzne

Príklad 14. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f(mf(n)) = n + f(2015m).$$

(Moldavsko TST 2015)

Príklad 15. Dané je prirodzené číslo k. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ také, že $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k$.

Príklad 16. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n.$$

(IMO Shortlist 2013)

Príklad 17. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f(mn) = [m, n] \cdot (f(m), f(n)).$$

(Kórea 2013)

Príklad 18. Nech n je dané prirodzené číslo. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + ny.$$

(Čínske výberko 2012)

Príklad 19. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f(f(m) + f(n)) = m + n.$$

Príklad 20. Určte všetky také funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky kladné celé čísla a, b existuje nedegenerovaný trojuholník so stranami dĺžok $a, f(b), f(b + f(a) - 1)$. (IMO 2009)

Príklad 21. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ také, že $f(f(f(n))) = f(n+1)+1$. (shortlist 2013)

Hinty

Hint 1. proste indukcia
Hint 2. proste indukcia
Hint 3. f je prostá... a indukcia
Hint 4. Vypočítajte $f(0)$, určte si $f(1)$, indukciou dorátajte hodnoty všade.
Hint 5. Ak $f(2) = 2$ máte (rekurentne) každú hodnotu. Na presný prepis si tipnite „lineárnu“ funkciu a indukciou ho dokážte. Ak $f(2) = 1$, máte za chvíľu spor.
Hint 6. Indukciou vyjadrite všetko pomocou $f(1)$. Všetky hodnoty ale musia byť štvorce - z toho určte $f(1)$.
Hint 7. Indukciou na n ukážte, že $f(m) \geq n$, pre všetky $m \geq n$.
Hint 8. Uvedomte si, že ak platí pre nejaké n, že $f(n) > 2$, tak potom spočítaním $f(n!), f((n!)!), \ldots$ a využitím podmienky máme, že nutne $n \mid f(n)$. Potom indukciou ukážte, že $f(n) = n$ (použitím podmienky pre $(n-1)!$ a $n!$).
Hint 9. Predpokladajte, že $f(a) < f(1)$ a dostaňte spor. Potom odvoďte $f(2k+1) = 1$, $f(2k) > 1$ a pokračujte analogicky indukciou ďalej.
Hint 10. Dosadením jednotiek zistite prostosť, $f(1) = 1$ a surjektívnosť. Potom dosaďte za m $f(m)$ máte multiplikatívnosť.
Hint 11. Teraz sa nedá $f(1)$ určiť, a tak položte $f(1) = a$. Skúste upraviť $f(x)^2 f(y)^2$. Mali by ste dostať, že $f(x)f(y) = af(xy)$. A z toho už je ľahké zostrojiť f.
Hint 12. BUNV $f(0) = 0, f(1) = 1$. Zistite, čo môže byť $f(p)$. Potom už len pre pevné y dosaďte dostatočne veľké prvočíslo p a je to.
Hint 13. Ukážte, že $p \mid f(a) - f(b) \Rightarrow p \mid a - b$, pre prvočíslo p.
Hint 14. Dosaďte $m = 1$, prostosť, spravte pravú stranu rovnú $f(2015) + f(4030)$ dvoma spôsobmi.
Hint 15. Tipnite si riešenie. Ak je v nejakom n iná hodnota skúmajte $f(n), f(f(n)), \ldots$ a nájdite spor.
Hint 16. Dokážte prostosť. Z deliteľnosti spravte nerovnosť a uvedomte si, že$f(m) - m$ nadobúda len konečne veľa hodnôt. Dosaďte m, n s rovnakou touto hodnotou.
Hint 17. Nech $f(1) = c$. Dosadením $(mc, 1)$ a potom (m, c) dospejte k tomu, že $c \mid f(m)$.
Hint 18. Zoberte si dve rôzne y_1, y_2 a aplikujte vzťah zo zadania na x y_2-krát s y_1 a y_1-krát s y_2. A teraz buď je f periodická, alebo nie.
Hint 19. Prostosť, položte $m + n = K$ a usúďte, že aj ľavá strana musí byť konštantná.
Hint 20. Sporom dokážte, že $f(1) = 1$ (lebo by bola periodická). Potom máte prostosť, a zase sporom ukážte, že $f(2) = 2$ (dosaďte $a = 2$ a niečo z toho odvoďte). Potom už je to ľahké.
Hint 21. Odvoďte vzťah $f^4(n+1) = f^4(n) + 1$. Z toho máte prostosť a predpis pre $f^4(n)$. Uvažujte obory hodnôt $f, f^2, f^3, \ldots$. V každom kroku prídete o rovnako veľa čísel, a všimnite si koľko ich stratíte medzi f a f^3. Odvoďte z toho nejaký záver pre f a vyskúšajte pár možností.

Obsah