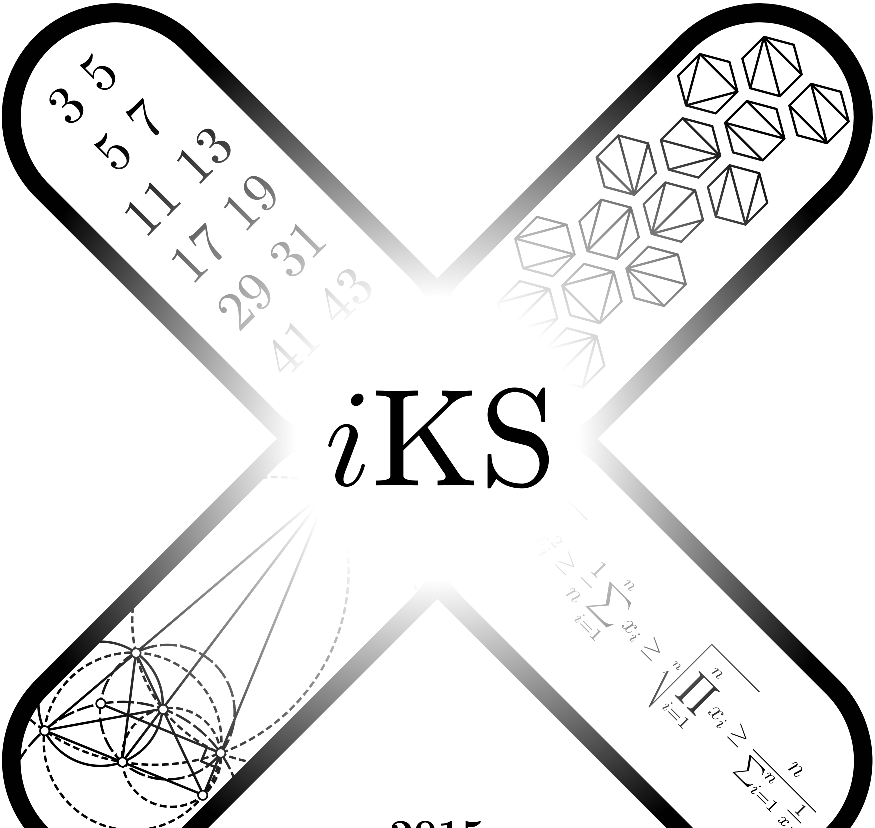


2015

Kunžak

Kuba Svoboda

Martin „Vodka“ Vodička

Mirek Olšák

Anh Dung „Tonda“ Le

Miro Psota

David Hruška

Štěpán Šimsa

Jakub „Xellos“ Šafin

p-valuace

Kuba Svoboda

Abstrakt. Při dokazování dělitelností, ale i třeba rovností se nám hodí vědět, jak moc jedno číslo dělí to druhé. K určení tohoto nám slouží p-valuace čísla. Na přednášce se podíváme na některé věty a tvrzení, které nám počítání s p-valuacemi usnadňují.

Definice. $v_p(n) = k \Leftrightarrow p^k \mid\mid n$, neboli $p^k \mid n$ a zároveň $p^{k+1} \nmid n$.

Tvrzení. Pro připomenutí si rozmyslete:

- $v_p(a \pm b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$, a za předpokladu $v_p(a) \neq v_p(b)$ nastává rovnost,
- $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$,
- jestliže $a \mid b$, potom pro každé p platí $v_p(a) \leq v_p(b)$,
- $v_p(\gcd(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)) = \min\{v_p(a_1), v_p(a_2), \ldots, v_p(a_n)\}$,
- $v_p(\operatorname{lcm}(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)) = \max\{v_p(a_1), v_p(a_2), \ldots, v_p(a_n)\}$.

Lemma. Mějme x, y celá čísla a n kladné číslo a prvočíslo p takové, že $\gcd(n, p) = 1$ a $p \mid x - y$ a $p \nmid y$, $p \nmid x$. Potom

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y).$$

Vezmeme-li navíc n liché (a pro změnu $p \mid x + y$), tak můžeme říct

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y).$$

Pro jistotu. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}).$$

Pro liché n

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-1}y + \ldots + y^{n-1}).$$

Lemma (Lifting the exponent). Nechť jsou x a y celá čísla a $p > 2$ prvočíslo takové, že $p \mid x - y$ a zároveň $p \nmid x$ a $p \nmid y$, potom

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

Vezmeme-li navíc n liché (a pro změnu $p \mid x + y$), tak můžeme říct

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n).$$

Lemma (Co s dvojkou?). Nechť x, y jsou lichá čísla taková, že $4 \mid x - y$ a n přirozené, potom

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n).$$

Pokud je n sudé a $2 \mid x - y$, potom

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1.$$

Tvrzení (Legendrova formule).

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Věta (Legrange). Nechť p je prvočíslo a

$$n = a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_{k-1} p + a_k$$

je zápis n v soustavě o základu p. Potom platí

$$v_p(n!) = \frac{n - (a_0 + a_1 + \ldots a_{k-1} + a_k)}{p - 1}.$$

Věta (Kummer). U binomického koeficientu $\binom{n}{m}$ je p-adická valuace rovna počtu přenosů do vyššího řádu při provádění sčítání čísel $n - m$ a m zapsaných v soustavě o základu p.

Věta. Nechť p je prvočíslo, potom počet binomomických koeficientů $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$, které jsou dělitelné p je

$$n + 1 - (n_0 + 1)(n_1 + 1) \ldots (n_r + 1),$$

kde $n_0, n_1, \ldots$ značí rozvoj n zapsaný v soustavě o základu p.

Super věc.

$$v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n - 1}{p - 1} \right\rfloor.$$

Cvičení.

- Dokaž $2^n \nmid n!$ a obecně pro prvočíslo p, $p^n \nmid ((p-1)n)!$.
- Najdi všechna $n \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{n-1} \mid n!$.
- Dokaž, že existuje nekonečně $m \in \mathbb{N}$ takových, že $m - v_2(m!) = 2015$.
- Dokaž, že $\binom{2n}{n}$ je násobek $n + 1$.
- Najdi všechna $n > 1$, pro které $\binom{2n}{n}$ je sudé, ale nedělitelné 4.

- Dokaž, že počet lichých čísel v pascalově trojúhelníku je v každém řádku mocnina dvou.
- Najdi všechna čísla n, pro která $n!$ končí přesně na 2015 nul.

Úloha 1. Dokaž, že když jsou a, n přirozená a p je liché prvočíslo takové, že $a^p \equiv 1 \pmod{p^n}$, potom $a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$ (Unesco competition)

Úloha 2. Nechť $P_n = (19+92)(19^2+92^2)\dots(19^n+92^n)$. Rozhodni jestli existuje takové m, že P_m je dělitelné 33^{33}.

Úloha 3. Pro přirozená čísla a, b, c dokaž, že když $c \mid a^c - b^c$, potom $c \mid \frac{a^c-b^c}{a-b}$.

Úloha 4. Pro každé přirozené n dokaž identitu

$$(n+1)\operatorname{lcm}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}\right) = \operatorname{lcm}(1, 2, 3, \dots, n+1)$$

Úloha 5. Dokaž pro všechna nezáporná n, m, že číslo $\frac{(2m)!(2n)!}{n!m!(m+n)!}$ je celé.

(stará IMO)

Úloha 6. Dokaž, že existuje konstanta c taková, že když pro přirozená a, b, n platí $a!b! \mid n!$, potom $a + b < n + c \cdot \log n$. (Paul Erdös)

Úloha 7. Pro p prvočíslo a n přirozené dokaž, že součin

$$\frac{1}{p^{n^2}} \prod_{i=1;2\nmid i}^{2n-1} \left(((p-1)i)! \binom{p^2 i}{pi} \right)$$

je celé číslo, které není dělitelné p.

Úloha 8. Dokaž, že pro přirozená a, b, c, d splňující $ab = cd$ platí

$$\gcd(a, c) \cdot \gcd(a, d) = a \cdot \gcd(a, b, c, d).$$

(Polská MO)

Úloha 9. Nechť p je prvočíslo a a přirozené, najdi všechna n taková, že $2^p + 3^p = a^n$.

(Irská MO)

Úloha 10. Najdi všechna řešení rovnice $(n-1)! + 1 = n^m$ v přirozených číslech.

Úloha 11. Najdi všechna přirozená n, že $2^n \mid 3^n - 1$.

Úloha 12. Nechť n, q jsou přirozená a všichni dělitelé q jsou větší než n. Dokaž, že

$$(q-1) \cdot (q^2-1) \cdot \ldots \cdot (q^{n-1}-1) \equiv 0 \pmod{n!}.$$

(Rumunská výběrovka)

Úloha 13. Dokaž, že pro každé n platí $n! \mid \prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k)$.

Úloha 14. Nechť p je prvočíslo, najdi všechna n přirozená, že p nedělí $\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

(Lucemburská MO)

Úloha 15. Dokaž, že pro žádné $n > 1$ neplatí $n \mid 2^{n-1} + 1$.

Úloha 16. Najdi všechna a a n taková, že $4(a^n + 1)$ je třetí mocnina.

Úloha 17. Najdi všechna přirozená n, pro které existují přirozená x, y taková, že $\gcd(x, y) = 1$, $k > 1$ a $3^n = x^k + y^k$. (Ruská MO)

Úloha 18. Nechť $m > 1$ a n splňuje $n \mid a^m - 1$ pro všechna a nesoudělná s n. Dokaž, že $n \leq 4m(2^m - 1)$ a najdi všechny případy rovnosti. (Rumunská výběrovka)

Úloha 19. Dokaž pro n přirozené a a, b celá čísla

$$n! \mid a(a + b)(a + 2b) \dots (a + (n - 1)b)b^{n-1}.$$

(IMO shortlist)

Úloha 20. Najdi všechna přirozená n, pro které je $\frac{2^n+1}{n^2}$ celé číslo.

Úloha 21. Existuje takové n přirozené, že n má přesně 2000 prvočíselných dělitelů a $n \mid 2^n + 1$? (IMO 2000)

Úloha 22. Nechť $0 < a_1 < \ldots < a_n$ jsou celá. Najdi největší m, pro které můžeme najít čísla $0 < b_1 < \ldots < b_m$ taková, že splňují

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{a_k} = \sum_{k=1}^{m} b_k$$

a zároveň

$$\prod_{k=1}^{n}(2^{a_k})! = \prod_{k=1}^{m} b_k!$$

.

Úloha 23. Dokaž, že pro každé $n > 5$ platí, že $n!$ je dělitelný počtem svých dělitelů. (Paul Erdös)

Úloha 24. Najdi všechna přirozená řešení pro x, y, z, rovnice $x^{2009} + y^{2009} = 7^z$.

Úloha 25. Dokaž nebo vyvrať: Jestliže a je kladné větší než 1, pak $v_p(a^{q-1} - 1) = 1$ pro nekonečně q

Úloha 26. $m_0, m_1, \ldots, m_r$ a $n_0, n_1, \ldots, n_r$ jsou cifry m respektive n v zápisu v soustavě o základu p. Dokaž

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{n_i}{m_i} \pmod{p}.$$

(Lucas 1878)

Hinty

Hint 1. Pro liché prvočíslo umíme LTE docela dobře… Jo a $1 = 1^{547}$.
Hint 2. Čekal jsi, že se tady objeví hint… nic tu není, jsi na to sám… no dobře, udělej 10 kliků a hint se objeví. Máš? Tak tedy: Není to nic jiného než přímočará aplikace LTE.
Hint 3. Rozděl si celou věc na dva případy $c \mid a - b$ a ten druhý…
Hint 4. Vzpomeňte si na Kummera a potom si vezměte prvočíslo, které to dělí.
Hint 5. Tak to je snad jasné tedy dost, případně Lagrange.
Hint 6. V přirozených číslech není nejpřirozenější přirozený logaritmus, ale dvojkový. Co vyzkoušet něco s dvojkou?
Hint 7. Prostě spočítej v_p toho čísla.
Hint 8. Všechno si to vem v_p. Potom se to rozpadne na případy, ale to je už v pohodě.
Hint 9. $n = 1$
Hint 10. No, je zajímavé, že každé p^α, které dělí n, dělí levou stranu přesně m krát…
Hint 11. Je to docela přímočaré, LTE!
Hint 12. Malý fermat, trochu odhadů
Hint 13. Vezmi postupně každé $p \leq n$, pro něj spočítej v_p obou stran.
Hint 14. Vyzkoušej pro dvojku a odvoď něco.
Hint 15. Rozlož n na prvočísla a dívej se na $v_2(p-1)$.
Hint 16. $a = 1$, jedině.
Hint 17. $x + y = 3^m$.
Hint 18. Víš co jsou Fermatova čísla? 2^{2^n}
Hint 20. Jak jste si asi všimli, tak jediné takové n je 3.
Hint 21. Vem si zpočátku hezké číslo, které má jen jednoho prvočíselného dělitele. Potom z něj vyrob další s větším počtem dělitelů.
Hint 22. $m \leq n$, nechť dokazování započne!
Hint 23. To nedáš, vzdej to, přesuň se na něco jednoduššího. (tzv. demotivační hint). Chceme si nějak dobře vyjádřit počet dělitelů, co kdybychom to vyzkoušeli tak jak nám říká Lagrange… a pro každé prvočíslo je to menší než něco…
Hint 24. Co když si vše spočítáme ve v_7?
Hint 25. Tohle jsem našel jako otevřený problém, nevím to jistě, jestli to platí, ale nemůžu to vyvrátit.
Hint 26. Pokud jste unavení z teorie čísel, tak zkuste generující funkce. Pokud ne, tak $(1+X)^p \equiv 1 + X^p \pmod{p}$.

Úlohy o cifrách

Martin „Vodka“ Vodička

Abstrakt. Príspevok obsahuje veľa úloh, ktoré sú o cifernom zápise čísla, obyčajne v desiatkovej sústave. Hovorí o tom, aké rôzne triky sa pri nich dajú používať a ako treba myslieť.

Začneme veľmi krásnou definíciou:

Definícia. Pod ciferným (dekadickým) zápisom čísla n rozumieme $(k+1)$-ticu cifier $a_0, \ldots, a_k$, pri čom platí:

$$\sum_{i=0}^{k} 10^i a_i = n,\ \ a_i \in \{0,1,...,9\}, a_k \neq 0.$$

Zapisujeme $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$.

Poznámka. V úlohách často pod pojmom číslo n myslím jeho ciferný zápis.

Definícia. Ciferný súčet čísla $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$ je $\sum_{i=0}^{k} a_i$.

Hahaha. Veď to je známe od základnej školy. Musíme si však uvedomiť, že ciferný zápis čísla nemá v podstate nič spoločné s prirodzeným číslom, keď sa na neho pozrieme s číselnoteoretického hľadiska. Skrátka nehovorí nič o deliteľoch, či je to prvočíslo, či je to štvorec, atď. Pár súvislostí tam predsa je tak si nejaké základné veci povieme. Začneme asi jedinou vetou, ktorú budeme používať a ani tú nie moc.

Veta (Eulerova). $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, ak $(a, n) = 1$.

Poznámka. Väčšinou bude stačiť „Dirichletova“ časť, t.j., že taký exponent existuje. V skutočnosti to ukazuje dva rôzne prístupy - kombinatorický(že z Dirichleta exponent existuje) a číselnoteoretický (že vieme cez kongruencie dokázať, že je to presne $\varphi(n)$). Niektoré úlohy tu budú aj viac kombinatorické, no niekde kombinatorika nebude stačiť.

Z pochopiteľných dôvodov budeme túto vetu často používať tak, že jedno z čísel a, n bude 10 alebo nejaká jeho mocnina.

Uvedomíme si, že z hľadiska ciferného zápisu sú prvočísla 2 a 5 akési špeciálne. A to preto, že delia 10. Vieme, že posledných k cifier je len zvyšok po delení 10^k. Z toho vyplýva ľahké no použiteľné

Tvrdenie. Číslo je deliteľné 2^k (resp. 5^k) práve vtedy keď jeho posledné k-číslie je.

A spomeňme ešte jedno easy

Tvrdenie. Nech $S(n)$ je ciferný súčet n. Potom $S(n) \equiv n \pmod{9}$.

Občas sa vyskytuje nie len ciferný zápis prirodzeného čísla, ale aj čísla racionálneho (iracionálne obyčajne nebývajú). Tu už definíciu písať nebudem, hádam mi to odpustíte :). Zaujímavé sú periodické zápisy, teda také v ktorých sa nejaká k-tica cifier opakuje do nekonečna. Platí toto:

Tvrdenie. $\overline{0, a_1 a_2 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_k a_1 \dots} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{10^k - 1}$.

Z Eulerovej vety vidno, že každé racionálne číslo má periodický zápis. A vidíme, že dĺžka periódy súvisí s rádom 10 modulo menovateľ. A budeme prekvapený, že periodické zápisy môžu pomôcť aj pri úlohách z celými číslami, ale nechajte sa prekvapiť :)

Hlavný fakt je, že tej teórie až tak veľa nie je. Dokonca občas môže pomôcť si spomenúť ako sme násobili a odčítavali na základnej škole. A aby ste nemali pocit, že som vám vôbec neporadil, tak je tu ešte jedna všeobecná

Rada. Ak pri ciferných úlohách neviete, či sa to dá alebo nie, obyčajne sa to dá.

Základ je však rozmýšľať správnym smerom. A aby ste v tom získali cvik, tak si dáme

Niečo na rozohriatie

Úloha 1. Zistite, aká dlhá (počet cifier) je neperiodická časť desatinného zápisu $\frac{1}{n}$ v závislosti od n. (India 2015)

Úloha 2. Nech x_1 je prirdodzené číslo. Postupnosť $\{x_n\}_{n \geq 1}$ je taká, že x_{n+1} dostaneme tak, že k x_n pripočítame nejakú jeho nenulovú cifru. Dokážte, že postupnosť obsahuje nekonečne veľa párnych čísel. (India 2005)

Úloha 3. Dokážte, že existuje prirodzené číslo N také, že z ľubovoľného čísla $a > N$ vieme vybrať niekoľko cifier za sebou tak, aby vytvorili číslo deliteľné 2011. (Kanada 2011)

Úloha 4. Nech m, n sú prirodzené čísla také, že m má d cifier a $d < n$. Vypočítajte ciferný súčet $(10^n - 1)m$. (Honkong 1994)

Úloha 5. Pre prirodzené číslo a definujme a' ako číslo, ktoré dostaneme, keď a prečítame odzadu. Nech a_1 je prirodzené a platí $a_{n+1} = a_n + a'_n$. Dokážte, že a_7 nie je prvočíslo. (Francúzsko 2007)

Úloha 6. Nech a, b sú také racionálne čísla, že dĺžka periódy v desatinnom zápise ab aj $a + b$ je T. Dokážte, že dĺžka periódy v zápisoch a, b nie je väčšia ako T. (Rusko 2006)

Úloha 7. Vypočítajte ciferný súčet $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdots (10^{2^n} - 1)$ v závislosti od n. (KMS 2013/2014)

Úloha 8. Dokážte, že existuje n-ciferné číslo deliteľné 5^n, ktoré má všetky cifry nepárne. (USAMO 2003)

Úloha 9. Nech p je prvočíslo a m prirodzené. Dokážte, že existuje číslo n také, že v zápise p^n sa nachádza blok aspoň k za sebou idúcich núl. (Japonsko 2001)

Úloha 10. Prirodzené číslo a môžeme zredukovať na prirodzené číslo b, ak b dostaneme po vydelení a jeho cifrou na mieste jednotiek. Nájdite všetky čísla, ktoré možno po konečnom počte redukcií zredukovať na 1. (Mexiko 2004)

Úloha 11. Dokážte, že neexistuje také n, že prvá cifra čísel $(n+k)!$ je k pre všetky $1 \leq k \leq 9$. (IMO shortlist 2001)

Úloha 12. Číslo $13\ldots3$, s $k > 1$ ciframi 3, je prvočíslo. Dokážte, že $6 \mid k^2 - 2k + 3$. (Kazachstan 2012)

Úloha 13. Nájdite najmenšie prirodzené číslo ktoré sa dá zapísať ako súčet 2002 čísel s rovnakým ciferným súčtom a aj ako súčet 2003 čísel s rovnakým ciferným súčtom. (Rusko 2002)

Úloha 14. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (m, n) také, že

$$\underbrace{111\ldots1}_{m \text{ jednotiek}} \times \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ jednotiek}}$$

je palindróm. (Brazília 2005)

Úloha 15. Dokážte, že číslo $(\underbrace{9999\ldots99}_{2005})^{2009}$ sa dá dostať z čísla $(\underbrace{9999\ldots99}_{2008})^{2009}$ vymazaním niekoľkých jeho cifier. (Indonézia TST 2010)

Úloha 16. Ciferný súčet čísla N je 100, ciferný súčet čísla $5N$ je 50. Dokážte, že N je párne. (výberko 2006)

Tak a teraz isto zvládnete aj toto

Úloha 17.

a) Existuje také prirodzené číslo n, že na konci ciferného zápisu $n!$ je 2004 a potom samé cifry 0 a 4?
b) Existuje také prirodzené číslo n, že na začiatku ciferného zápisu $n!$ je 2004?

(Nemecko TST 2005)

Úloha 18. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k existuje také prirodzené číslo n, že v zápise čísla 2^n v desiatkovej sústave sa nachádza blok práve k za sebou idúcich núl. (CPS 2006)

Úloha 19. Zistite aký najmenší ciferný súčet môže mať násobok $10^k - 1$. (výberko 2009)

Úloha 20. Nech $S(n)$ je ciferný súčet n. Dokážte, že existuje 2012 rôznych prirodzených čísel $n_1, \ldots, n_{2012}$ takých, že $S(n_1) + n_1 = \cdots = S(n_{2012}) + n_{2012}$. (India 2002)

Úloha 21. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje n-ciferné číslo, ktoré nemá cifru 0 a je deliteľné svojim ciferným súčtom. (IMO shortlist 1998)

Úloha 22. Jedané prirodzené číslo n, ktoré nie je mocninou 2. Dokážte, že existuje prirodzené číslo m s nasledujúcimi vlastnosťami:

1) m je súčin dvoch po sebe idúcih prirodzených čísel
2) Ciferný zápis m pozostáva z dvoch rovnakých blokov n čifier.

(MEMO 2010)

Úloha 23. Nájdite najväčšie n pre ktoré existuje postupnosť nenulových cifier $a_0, \ldots, a_n$ taká, že pre všetky prirodzené $k \leq n$ platí $\overline{a_{k-1} \ldots a_0} \mid \overline{a_k \ldots a_0}$.

(Brazília 2013)

Úloha 24. Nájdite všetky n pre ktoré existujú dve rôzne n-ciferné čísla $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ a $\overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$ také, že $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n} \mid \overline{b_1 b_2 \ldots b_n a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Úloha 25. Pre celé nezáporné číslo n definujme $a_n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n}2\underbrace{00\ldots0}_{n}2\underbrace{00\ldots0}_{n}1$.

Dokážte, že $a_n/3$ sa dá vždy vyjadriť ako súčet tretích mocnín dvoch celých kladných čísel, ale nikdy sa nedá vyjadriť ako súčet druhých mocnín dvoch celých čísel.

(MEMO 2010)

Úloha 26. Dokážte, že každé prirodzené číslo $k > 1$ má kladný násobok menší ako k^5, ktorého dekadický zápis obsahuje nanajvýš štyri rôzne číslice. (výberko 2006)

Úloha 27. Na dvadsiatich nekonečne dlhých pásoch papiera má Vodka desatinný zápis čísel $\frac{1}{80!}, \ldots \frac{1}{99!}$, teda na poslednom kuse je $\frac{1}{99!} = 0,\underbrace{00\ldots00}_{155}10715\ldots$. Vodka má nožnice a nebojí sa ich použiť na to, aby z niektorého papiera vystrihol časť po sebe idúcich čifier bez desatinnej čiarky. Vodka je ale hajzel a chce to urobiť tak, aby ste nevedeli z ktorého papiera to vystrihol. Koľko najviac cifier môže vystrihnúť?

(Rusko 2007)

Úloha 28. Pre každé prirodzené číslo a definujeme $d(a)$ ako výsledok nasledudúcej operácie:

- Poslednú cifru a presunieme na začiatok. Výsledné číslo je b.
- $c = b^2$
- Prvú cifru c presunieme nakoniec a dostaneme d.

Nájdite všetky čísla také, že $d(a) = a^2$. (IMO shortlist 2003)

Úloha 29.

A niečo možno trocha ťažšie na záver

Úloha 30. *Rozkývané* číslo je také, v ktorom sa striedaju nulovú a nenulové cifry, pri čom posledná cifra je nenulová. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nedelia žiadne *rozkývané* číslo. (IMO shortlist 1994)

Úloha 31. *Striedavým* číslom nazveme také prirodzené číalo, v ktorom každé dve susedné cifry majú rôznu paritu. Nájdite všetky prirodzené n, ktoré majú nejaký *striedavý* násobok. (IMO shortlist 2004)

Úloha 32. Aký ciferný súčet môže mať štvorec? (výberko 2003)

Úloha 33. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že pre všetky prirodzené $k \leq n$ existuje násobok n, ktorého ciferný súčet dáva zvyšok k po delení n.

(Brazília 2014)

Úloha 34. Zistite, či existuje nekonečná postupnosť nenulových cifier $a_0, a_1, a_2, \dots$ a prirodzené číslo N také, že pre všetky $k > N$ je číslo $\overline{a_k \dots a_1 a_0}$ štvorec.

(IMO shortlist 2013)

Úloha 35. Existuje číslo $n > 10^{10000}$ nedeliteľné 10 také, že sa v ňom dajú vymeniť dve rôzne cifry tak, aby sa množina jeho prvočíselných deliteľov nezmenila.

(Rusko 2014)

Úloha 36. Nech $S(n)$ je ciferný súčet n. Existuje reálna konštanta c taká, že $\frac{S(n)}{S(n^2)} \leq c$ pre všetky n? (Argentína 2007)

Úloha 37. Dokážte, že pre ľubovoľné dve prirodzené čísla m, n existuje také prirodzené číslo c, že ciferný zápis cm a cn obsahuje rovnako veľakrát každú nenulovú cifru. (USAMO 2013)

Úloha 38. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že existuje prirodzené číslo k, že posledných 2012 cifier čísla n^k sú jednotky. (Brazília 2012)

Úloha 39. Nech $b > 5$ je prirodzené číslo. Pre každé prirodzené n uvažujme číslo $x_n = \underbrace{11\dots1}_{n-1}\underbrace{22\dots2}_{n}5$ zapísané v sústave so základom b. Dokážte, že ak exisuje také N, že pre všetky $n > N$ je x_n štvorec, tak $b = 10$. (IMO shortlist 2003)

Hinty

Hint 1. Skúste cez nejakú deliteľnosť povedať, kedy má zlomok nejakú periodickú a nejakú neperiodickú časť.
Hint 2. Číslo po odtrhnutí poslednej cifry sa zväčšuje max. o 1.
Hint 3. Dirichlet
Hint 4. Odpočítajte to ako na základnej škole.
Hint 5. 11
Hint 6. Zapíšte si to ako zlomky a napíšte si, čo znamená, že má niečo periódu T a potom to nejako vybúchajte z deliteľností.
Hint 7. Dá sa induckiou, ale netreba IP :P
Hint 8. indukcia
Hint 9. Nech je skoro na konci. Euler.
Hint 10. Choďte odzadu
Hint 11. Odhadnite prvé 2 cifry n a nájdite spor.
Hint 12. deliteľnosť malými prvočíslami, vhodný zápis čísla a rozklad.
Hint 13. žeby modulo 9?
Hint 14. Vynásobte to ako na základnej škole. Uvedomte si, že výsledok nemôže byť o cifru dlhší.
Hint 15. Zapíšte vhodne číslo $99\dots9$. A potom si len uvedomte, že to tak je :)
Hint 16. $5N = 10N/2$. A už si to len stačí vydeliť ako na základnej škole.
Hint 17.

a) na konci je veľa núl a potom uvažujte deliteľnosť mocninami 2.
b) Neviete násobiť číslo niečím tak, aby sa prvé 4 cifry skoro vôbec nemenili?

Hint 18. aspoň k ich zvládnete, potom násobením odstráňte prebytočné
Hint 19. Rozdeľte číslo na k-tice a využite kritérium deliteľnosti $10^k - 1$.
Hint 20. induckia, pridávajte niečo na začiatok už nájdených čísel. Ideálne niečo, k čomu keď veľa prirátate klesne ciferný súčet.
Hint 21. Nech je jeho ciferný súčet 2^n
Hint 22. Prepíšte rozumne druhú vlastnosť. Pokúste sa vzniknutú súčin upraviť prenásobením a predelením tak, aby to mohli byť po sebe idúce čísla.
Hint 23. To vznikajúce číslo je bud nedeliteľné 2 alebo 5. A to je celkom problém, keď má deliť nie o moc väčšiu mocninu 10. Keby niečo $n = 4$.
Hint 24. Označte si tie 2 čísla a prepíšte podmienku. Môže sa hodiť vybrať ich spoločného deliteľa. Nezabudnite, že jedno je max. 10-krát väčšie ako druhé.
Hint 25. To s tretími mocninami skúste pre $9a_n$. Áno je to trápne.
Hint 26. Tvorte čísla zložené len s dvoh rôznych cifier. Dirichlet
Hint 27. Skúste si zapísať, čo to znamená, že na dvoch papieroch sa nachádza ten istý blok cifier. To už stačí upravovať a vyjde to. A čo sa týka konštrukcie, zoberte tú najtrápnejšiu.
Hint 29. Napíšte si nejak tú rovnicu. Uvažujte aká môže byť posledná cifra a. Niektoré by ste mali vyradiť, čím sa vám vzťah o dosť zjednoduší a pôjde celkom ľahko dorátať.
Hint 30. Hľadajte v peknom tvare, napr. $10101\dots101$. Pre mocniny 2 riešte zvlášť a pre súčin nepárneho a mocniny 2 to nejako nakombinujte, lebo pre mocninu 2 sú podstatné len posledné cifry.

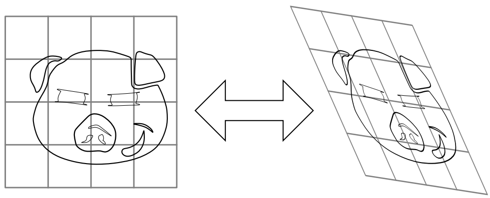
Hint 31. Pre mocniny 2 a 5 riešte zvlášť. Pre nepárne v peknom tvare napr. $10101\ldots101$. A potom to nejako nakombinujte, lebo pre mocniny 2 a 5 sú zaujímavé len posledné cifry.
Hint 32. Hľadajte čísla, ktorými sa jednoducho násobí, žiaľ 10^k sa násobí samo sebou. Roznásobte $(10a+5)^2$ a potom zvoľte vhodné a.
Hint 33. Keď máte násobok, viete ho napísať veľakrát za sebou. To samozrejme nemusí stačiť. Môžte však skúsiť ho napísať tak, že akoby prekryjete prvú a poslednú cifru. Ideálne tak, aby trocha klesol ciferný súčet.
Hint 34. Nie. Rozdiel dvoch štvorcov musí byť deliteľný 10^k. Dokážte, že sú nepárne a po čase deliteľné veľkou mocninou 5. Potom, ale boli aj na začiatku a už za chvíľu máte spor.
Hint 35. Zoberte si dve prvočísla, v ktroých sú len vymenené cifry napr. 13 a 31. Čím ich môžete prenásobiť, tak aby vzniknuté čísla mali stále vymenené cifry?
Hint 36. Nie. Po chvíli hrania by ste mohli prísť na čísla typu $499\ldots9 = 5\cdot 10^n - 1$. No problém je v tom, že aj po umocnení ostane veľa cifier 9. Skúste nahradiť nejaké cifry 9 ciframi 8, teda odčítať ďalšie mocniny 10. Umocnite a zariaďte, aby v druhej mocnine nevznikali 9, t.j. aby sa neodčítala 1 od cifry 0.
Hint 37. Spomeňte si na periodický zápis racionálneho čísla. Ja som vravel, že sa bude hodiť :). Potom už stačí nájsť menovateľa aby to fungovalo.
Hint 38. Zmodulujte malými mocninami 2 a 5. To, že to stačí zabezpečí napr. LTE.
Hint 39. Zapíšte si to číslo rozumne, skúste niečím zvyškovať. A skúste sa dopacovať k tomu, že $b-1$ je štvorec, z čoho by ste mali mať spor.

Projektivní geometrie

Mirek Olšák

Abstrakt. V geometrii často děláme pro zjednodušení jisté „BÚNO poznatky“ – nechť tahle přímka vede vodorovně, nechť tahle vzdálenost má délku 1, nechť tenhle bod je počátkem souřadnic. Zde zajdeme o ještě něco dál – nemusíme si totiž papír jen posouvat a natáčet, ale taky se na něj můžeme dívat z boku. Jen je třeba dát pozor, co se ještě zachová, a co už ne.

Afinní pojmy



Definice. Mějme trojici různých bodů A, C, D na přímce. Pak dělicím poměrem bodu A vůči bodům C, D rozumíme $\frac{AC}{AD}$ a značíme jej $(A; C, D)$, přičemž XY značí orientovanou vzdálenost bodů X, Y na dané přímce.

Tvrzení. Nechť X, C, D jsou různé body na přímce, které současně vnímáme jako vektory vycházející z počátku souřadnic mimo tuto přímku. Dále uvažujme vektor Y a mějme vektory C, D vyjádřené pomocí X, Y jakožto $C = c_x X + c_y Y, D = d_x X + d_y Y$. Pak $(X; C, D) = \frac{c_y}{d_y}$.

Definice. Afinitou rozumíme takové bijektivní[1]) zobrazení z roviny do roviny (obecněji z afinního prostoru do sebe sama), které zobrazuje přímky na přímky a zachovává přitom dělicí poměry.

Afinita kromě přímek a dělicích poměrů na přímce zachovává i poměry obsahů, rovnoběžnost a poměry délek na rovnoběžných přímkách. Na druhou stranu při afinitě nemáme pod kontrolou úhly (ani kolmost) ani poměry nerovnoběžných délek. Nezachovají se ani kružnice (obecně se z nich stanou elipsy), ale zato pomocí afinity můžeme z dané elipsy vytvořit kružnici.

Definice. O množině bodů v d-rozměrném prostoru řekneme, že je v obecné poloze, pokud pro žádné $k = 0, \ldots, d-1$ nenajdeme k-rozměrný podprostor obsahující $k+1$ z těchto bodů.

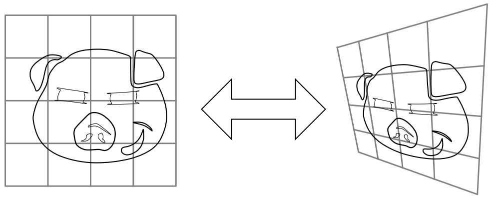
Tvrzení. Mějme daný souřadnicový systém na d-rozměrném prostoru. Pak je každá afinita jednoznačně určená lineárně nezávislými vektory $v_1, \ldots, v_d$ a vektorem w

[1]) Obvykle definice připouští i nebijektivní, ale těmi se nebudeme zabývat.

předpisem, které bodu o souřadnicích $x_1, \dots, x_d$ přiřadí bod o souřadnicích $x_1 v_1 + \dots + x_d v_d + w$.

Pozorování. Afinita na d-rozměrném prostoru je jednoznačně určená pomocí $(d+1)$-tice bodů v obecné poloze a $(d+1)$-tice jejich obrazů, opět v obecné poloze.

Projektivní pojmy



Definice (nevlastní body). Kromě běžných (vlastních) bodů do roviny (resp. přímky, prostoru, ...) přidáme tzv. nevlastní body – pro každý směr přímky jeden. Bude to vždy bod, ve kterém se protínají všechny rovnoběžné přímky tohoto směru. Toto rozšíření roviny (resp. přímky, prostoru, ...) nazýváme projektivní rovina (resp. přímka, prostor, ...). Množinu všech nevlastních bodů coby směrů přímek v jedné rovině prohlásíme opět za přímku.

Pozorování. Projektivní přímka má právě jeden nevlastní bod. V projektivní rovině se každé dvě různé přímky protínají v jednom bodě a každé dva různé body určují jednu přímku.

Definice. Mějme různé body A, C, D na vlastní přímce, přičemž A je nevlastní. Pak definujeme dělicí poměr $(A; C, D) = 1$.

Definice. Mějme čtveřici různých bodů A, B, C, D na vlastní přímce. Pak dvojpoměrem bodů A, B vzhledem k bodům C, D rozumíme součin $(A; C, D)(B; D, C)$ a značíme jej $(A, B; C, D)$.

Pozorování. Nechť X, Y, C, D jsou různé body na vlastní přímce, které současně vnímáme jako vektory vycházející z počátku souřadnic mimo tuto přímku. Když vyjádříme vektory C, D pomocí X, Y jakožto $C = c_x X + c_y Y, D = d_x X + d_y Y$, pak $(X, Y; C, D) = \frac{c_y d_x}{d_y c_x}$.

Definice. Mějme v k-rozměrném projektivním prostoru dva $(k-1)$-rozměrné projektivní podprostory p, q a bod X mimo ně. Pak definujeme projekci z bodu X podprostoru p na podprostor q coby bijekci, která bodu $P \in p$ přiřadí průsečík přímky XP s podprostorem q.

Pozorování. Projekce zachovává dvojpoměr.

Definice. Pro čtyři body na nevlastní přímce definujeme jejich dvojpoměr jako dvojpoměr jejich projekce na jakoukoli vlastní přímku z jakéhokoli bodu.

Definice. Kolineace je zobrazení projektivní roviny (obecněji projektivního prostoru) do sebe sama, které zachovává přímky a dvojpoměry.

Tvrzení. Každou kolineaci d-rozměrného prostoru p je možné dostat jako složení afinity na $d+1$-rozměrném, která zobrazí p na jiný podprostor q a nějaké projekce zpět na p. A naopak – každé takové složení je kolineace.

Tvrzení. Kolineace na d-rozměrném prostoru je jednoznačně určená pomocí $(d+2)$-tice bodů v obecné poloze a $(d+2)$-tice jejich obrazů, opět v obecné poloze.

Kuželosečky

Afinita nezachovává kružnice, ale zachovává alespoň elipsy. Tedy kružnice / elipsa se při afinitě vždy promění v kružnici / elipsu. Kolineace umožňuje hodit některé body kružnice na nevlastní bod.

Definice. Nechť je daný úhel $\alpha \in (0, 90^\circ)$ a v trojrozměrném projektivním prostoru vrchol V a osa o procházející skrz V. Kuželem rozumíme množinu všech bodů X v prostoru, že přímka XV svírá s o úhel α. Kuželosečka je pak je průsečík kuželu s rovinou takový, že vrchol kuželu neleží v dané rovině. Kuželosečka bez nevlastního bodu se nazývá elipsa, kuželosečka s právě jedním vlastním bodem (dotýkající se nevlastní přímky) se nazývá parabola a kuželosečka s dvěma nevlastními body (protínající nevlastní přímku) se nazývá hyperbola.

Tvrzení. Kolineace projektivní roviny zachovává kuželosečky.

Už z principu, že je kolineace bijekcí, se zachovává vlastnost „protínat kuželosečku“ či „dotýkat se kuželosečky“.

To dává recept, jak proměnit jednu kuželosečku pomocí kolineace na kružnici: Vedeme přímku, která neprotíná naši kuželosečku a pomocí kolineace z této přímky uděláme nevlastní. Tím už kuželosečka neobsahuje žádný nevlastní bod, a tedy se jedná o elipsu. Elipsu následně můžeme afinitou proměnit v kružnici.

Dvě různá použití pro geometrii v rovině

Standardní (a v tomto smyslu je pojat i tento příspěvek) je nahlížet na rovinu jako na dvourozměrný prostor nad reálnými čísly. Nicméně je dobré si uvědomit, jak zmíněné pojmy fungují, pokud rovinu budeme vnímat coby jednorozměrný prostor nad komplexními čísly. V takovém okamžiku nedodáváme nekonečně mnoho nevlastních bodů, ale pouze jeden (ostatně je to jen přímka).

Afinity v komplexní přímce pak odpovídají přímo podobným zobrazením. A skutečně – přímo podobné zobrazení je jednoznačně určené obrazy dvou bodů.

Kolineace (různá od afinity) je pak obecně složení kruhové inverze a osového posunutí zobrazení. Ze zachování dvojpoměrů je pak možné například odvodit, že taková zobrazení (tedy i kruhová inverze) zachovávají kružnice, či tzv. harmonické čtyřúhelníky.

Cvičení

Cvičení 1. Nechť je dán trojúhelník ABC a nechť A', B', C' jsou středy stran postupně BC, CA, AB. Veďme bodem A přímku p a její průsečíky s přímkami

$A'C'$, $A'B'$ označme postupně X, Y. Ukažte, že BX je rovnoběžné s CY.

(MKS–32–4–5)

Cvičení 2. Je daný konvexní 5-úhelník ABCDE, ve kterém platí, že obsahy trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEA, EAB jsou stejné. Dokažte, že uvnitř 5-úhelníka existuje bod P takový, že obsahy trojúhelníků ABP, BCP, CDP, DEP, EAP jsou stejné.

(iKS–4–3–G)

Cvičení 3. Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, s pravým úhlem u ramena BC, splňující $|AB| > |CD| > \frac{|AB|}{3}$. Středy úhlopříček AC, BD označíme postupně E, F. Nakonec průsečíky $AF \cap BE$ a $CF \cap DE$ označíme postupně X, Y. Který z čtyřúhelníků $ADXY$, $BCXY$ má větší obsah?

Cvičení 4. Je dána elipsa e se středem S a na ní bod X. Tečnu k e v bodě X označíme t. Rovnoběžka k t vedená bodem S protne e v bodech A, B. Dokažte, že tečna v bodě A k e je rovnoběžná s XS.

Cvičení 5. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod S. Dokažte, že středy stran BC, CA, AB, středy úseček AS, BS, CS a průsečíky $AS \cap BC$, $BS \cap CA$, $CS \cap AB$ leží všechny na jedné elipse.

Cvičení 6. Do trojúhelníka jsme vepsali dvě různé elipsy a pět z šesti bodů dotyku leží na jedné elipse. Dokažte, že i šestý bod dotyku na ní leží.

Cvičení 7. Elipsa vepsaná obdélníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB, BC, CD, DA postupně v bodech X, V, W, Y. Dokažte, že

$$|AY| \cdot |BX| = |AX| \cdot |DY|.$$

Cvičení 8. Jsou dány body P, Q, R, A v obecné poloze. Sestrojte body B, C, D, aby $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$, $R = BC \cap AD$.

Cvičení 9. Tětivový čtyřúhelník $ABCD$ má tu vlastnost, že se tečny kružnice opsané vedené body A, C protínají na přímce BD. Dokažte, že se tečny kružnice opsané vedené body B, D protínají na přímce AC.

Cvičení 10. Je dán trojúhelník PQR, kružnice k taková, že tečny vedené ke k z bodu Q se dotýkají k na přímce PR a tečny vedené ke k z bodu R se dotýkají k na přímce PQ. Na k pak leží bod A mimo přímky PQ a PR. Dokažte, že existuje čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný kružnici k, takový, že P je průsečíkem jeho úhlopříček, Q je průsečíkem AB a CD a nakonec R je průsečíkem BC a DA.

Cvičení 11. Mějme hyperbolu s asymptotami u, v a sestrojme její tečnu t v bodě T. Označme průsečíky $X = u \cap v$, $Y = u \cap t$, $Z = v \cap t$. Dokažte, že:

a) T je středem Y, Z.
b) Obsah trojúhelníka XYZ nezávisí na volbě tečny.

Cvičení 12. Buď AB tětiva kružnice k a S její střed. Vedeme bodem S libovolné další dvě tětivy této kružnice – KL a MN, aby KM nebylo rovnoběžné s AB.

Průsečíky přímky AB s přímkami KM, LN označme postupně X, Y. Dokažte, že S je středem XY. (Butterfly Theorem)

Cvičení 13. Mějme kuželosečku c a na ní 6 bodů A, B, C, D, E, F. Označme průsečíky $X = AB \cap ED$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CD \cap AF$. Předpokládejme, že přímka XY neprotíná c, ani se jí nedotýká, ani není asymptotou. Dokažte, že pak bod Z leží taktéž na této přímce.

(Speciální případ Pascalovy věty)

Cvičení 14. Mějme trojúhelníky ABC, DEF a označme průsečíky $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CA \cap FD$. Dokažte, že X, Y, Z leží na jedné přímce, právě když se přímky AD, BE, CF protínají v jednom bodě. (Desarguesova věta)

Cvičení 15. Uvažme trojúhelník ABC a na přímkách BC, CA, AB volme postupně body A', B', C' (různé od A, B, C) tak, že se přímky AA', BB', CC' protínají v bodě P. Dokažte, že:

a) $(A'; B, C)(B'; C, A)(C'; A, B) = 1$ (Cevova věta)
b) $(P; A, A') = (B'; A, C) + (C'; A, B)$ (Van Aubelova věta)

Cvičení 16. Bod M je středem strany AB trojúhelníka ABC. Na polopřímce opačné k MC zvolíme bod N a uvnitř úsečky AM zvolíme bod P. Označíme Q průsečík přímek AC a NP, dále R průsečík QM a NB a nakonec S průsečík AB a RC. Dokažte $|PM| = |SM|$. (výběrové soustředění před IMO 2010)

Cvičení 17. Dokažte, že pouze pravítkem (bez měřítka) není možné sestrojit střed zadané kružnice.

Cvičení 18. Mějme trojúhelník ABC a označme A', B', C' postupně na stranách BC, CA, AB

a) body dotyku vepsané kružnice,
b) libovolné body tak, aby se přímky AA', BB', CC' protínaly v jednom bodě.

Dále označme D průsečík AB a $A'B'$. Nahlédněte, že $(C', D; A, B) = -1$.

Cvičení 19. V rovině jsou dány bod P, X, Y, Z tak, že PX, PY, PZ jsou navzájem různé přímky. Na těchto přímkách leží po řadě body A, B, C různé od dříve jmenovaných bodů. Označme průsečíky $D = BZ \cap CY$, $E = CX \cap AZ$ a $F = AY \cap BX$. Dokažte, že přímky DX, EY, FZ se protínají v jednom (ne nutně vlastním) bodě.

Cvičení 20. Na stranách AC, BC trojúhelníka ABC jsou dány body K, L. Průsečík AL a BK označme P. Na přímce AB najdeme body X, Y tak, aby součty $KX + LX$ a $CY + PY$ byly minimální možné. Ukažte, že $X = Y$.

Hinty

Hint 1. (afinní) BÚNO $AB \perp AC$.
Hint 2. (afinní) BÚNO má ABC tvar jako u pravidelného pětiúhelníka. Dále si uvědomte, že podmínka s obsahy jenom říká rovnoběžnost jistých přímek, a „šoupáním“ obhajte, že celý pětiúhelník je pravidelný.
Hint 3. Zapomeňte na pravý úhel, (afinní) BÚNO je ten lichoběžník rovnoramenný.
Hint 4. (afinní) BÚNO to je kružnice.
Hint 5. (afinní) BÚNO je S kolmiště, pozor na argumentaci.
Hint 6. Při afinním zkosení vepsané elipsy na kružnici dostáváme Cevovu podmínku na body dotyku, která se zachová při afinitě. Nakonec proměňte na kružnici poslední elipsu a pomocí mocnosti dokažte, že na ní leží poslední bod.
Hint 7. Udělejte z elipsy kružnici, z obdélníka rovnoběžník, a uvědomte si, že dotazovanou rovnici je možné postavit z afinních pojmů.
Hint 8. Představujte si body Q, R nevlastní a kolmé. Tím umíte kreslit vodorovné čáry, svislé čáry a rovnoběžky.
Hint 9. (projektivní) BÚNO se ty tečny protínají v nevlastním bodě.
Hint 10. Udělejte z bodů Q, R nevlastní. Kružnice zůstane elipsou, takže afinním doladěním z ní získáte zpět elipsu. Zbývá si uvědomit, že směry Q, R jsou kolmé.
Hint 11. (a) Kolineací proměňte rovnoběžku s t procházející X na nevlastní přímku (a hyperbolu na kružnici). Jak se zobrazily asymptoty? A jak nevlastní přímka? (b) Uvažte dvě tečny a přeformulujte nezávislost obsahu na tvrzení o dělicím poměru, který následně pomocí nevlastních bodů přepíšete na dvojpoměr. Kolineací proměňte hyperbolu v kružnici a bod X na nevlastní. Nakonec stačí použít Eukleidovu větu o výšce.
Hint 12. (projektivní) BÚNO AB je průměr (je třeba si zachovat poměry na této přímce).
Hint 13. (projektivní) BÚNO je c kružnice a body X, Y nevlastní.
Hint 14. (projektivní) BÚNO jsou X, Y nevlastní. Hledaným průsečíkem je střed stejnolehlosti.
Hint 15. Napište si dělicí poměry coby dvojpoměry pomocí nevlastní přímky. Pak zvolte BÚNO $BCB'C'$ jako obdélník (je třeba se vypořádat s nově objevenou nevlastní přímkou).
Hint 16. (projektivní) BÚNO je C nevlastní (za zachování poměrů na přímce AB) a následně (afinní) BÚNO je přímka QB kolmá na směr A.
Hint 17. Kolineace nezachovává střed.
Hint 18. (a) (projektivní) BÚNO jsou body C, D nevlastní se zachováním kružnice. (b) (projektivní) BÚNO jsou body C, D nevlastní a kolmé.
Hint 19. (projektivní) BÚNO jsou X, Y nevlastní. Pak je Z střed stejnolehlosti zobrazující $APBF$ na $ECDP$, kde P je hledaný průsečík.
Hint 20. Zobrazte C, K, L, P podle přímky AB – zadání je pak přeformulovatelné na to, že se jisté přímky protínají na AB. Kolineací zobrazte přímku AB na nevlastní a rozmyslete si, jak se zobrazí obraz podél této přímky.

Zobecněná mocnost

Anh Dung „Tonda“ Le

Abstrakt. Mocnost bodu ke kružnici se velice často objevuje v olympiádní geometrii. Díky ní můžeme převést práci s úhly na práci s délkami úseček a naopak. Navíc použití chordály, pojem z mocnosti odvozený, je jeden ze způsobů, jak dokázat, že tři body leží na přímce či tři přímky procházejí jedním bodem. Kromě toho ukážeme dvě rozšíření, konkrétně „vedlejší chordály“ a kružnice s nulovým poloměrem.

Definice

Definice. Nechť ω je kružnice se středem v O a poloměrem r, pak ke každému bodu P téže roviny přiřadíme hodnotu $p(P, \omega) = OP^2 - r^2$. Toto číslo nazýváme mocnost bodu P ke kružnici ω.

Definice. Nechť jsou dány dvě kružnice ω_1, ω_2, pak jejich chordála je množina bodů X takových, že $p(X, \omega_1) = p(X, \omega_2)$.

Tvrzení. Nechť ω_1, ω_2 jsou kružnice se středy v O_1, resp., O_2. Pak přímka AB je kolmá na O_1O_2 právě tehdy, když:

$$p(A, \omega_1) - p(A, \omega_2) = p(B, \omega_1) - p(B, \omega_2).$$

Důsledek. Chordála dvou kružnic je přímka kolmá na jejich spojnici středů.

Tvrzení. V rovině jsou dány tři kružnice a pro každou dvojici z nich nakreslíme chordálu. Pak tři vzniklé chordály procházejí jedním bodem.

Rozmyslete si

Příklad 1. Dokažte, že spojnice průsečíků dvou kružnic půlí jejich společnou tečnu.

Příklad 2. Dokažte, že středy čtyř společných tečen (pokud existují) dvou kružnic leží na jedné přímce.

Příklad 3 (Shooting lemma ze Švrčkova bodu). Nechť Š je střed oblouku AB v kružnici k. Přímka p procházející bodem Š protíná AB v K a k podruhé v L. Dokažte, že $MA^2 = MK \cdot ML$.

Lehké

Příklad 4. Na prodloužení tětivy KL kružnice k se středem O leží bod A. Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U. Označme M střed úsečky TU. Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový.

Příklad 5. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedenou bodem Q. Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k. Dokažte, že $MT = MQ$.

Příklad 6. Je dána kružnice k, bod O, který na ní neleží, a přímka p, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l, která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p. Příslušné body dotyku označme A a B. Pokud body O, A, B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí společným bodem různým od bodu O, anebo se dotýkají téže přímky.

Příklad 7. Trojúhelník ABC je vepsaný do kružnice k. Tečna ke k vedená bodem C protne přímku AB v bodě P. Označme M střed CP. Přímka MB protne kružnici k podruhé v bodě Q. Přímka PQ protne k podruhé v bodě R. Dokažte, že trojúhelník ARC je rovnoramenný.

Příklad 8. Je dán trojúhelník ABC a I, O středy jeho vepsané a opsané kružnice. Označme A_0 průsečík přímky BC a kolmice na AI vedené bodem I. Body B_0, C_0 jsou definované podobně. Ukažte, že body A_0, B_0, C_0 leží v přímce, která je kolmá na OI.

Příklad 9. Nechť BC je nejdelší strana nerovnoramenného trojúhelníku ABC. Pro bod K na polopřímce CA a bod L na polopřímce BA platí, že $KC = BC$ a $BL = BC$. Dokažte, že KL je kolmá na spojnici opsiště a vepsiště.

Příklad 10. Nechť ABC je trojúhelník s ostrým úhlem u vrcholu A. Označme M střed strany BC. Na AM zvolme bod D a zkonstruujme kružnice k, l procházející bodem D, které se dotýkají přímky BC po řadě v bodech B, C. Přímka AB resp. AC protne kružnici k resp. l podruhé v bodě P resp. Q. Ukažte, že tečna ke kružnici k vedená bodem P a tečna ke kružnici l vedená bodem Q se protínají na AM.

Těžké

Příklad 11. Nechť ABC je trojúhelník, O jeho opsiště a E_C jeho připsiště oproti vrcholu C. Označme D, E postupně průsečíky os úhlů u vrcholu A, resp. B s protějšími stranami. Dokažte, že $DE \perp OE_C$.

Příklad 12. Je dána kružnice k a bod A různý od jejího středu. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k.

Příklad 13. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB, BC, CA v bodech F, D, E. Označme písmeny Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, M středy úseček FB, BD, DC, CE, BC. Konečně buď $X = Y_1Y_2 \cap Z_1Z_2$. Dokažte, že $XM \perp BC$.

Příklad 14. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T. Bod A probíhá kružnici l. Na kružnici k najdeme body B, C, aby AB, AC byly tečny kružnice k. Přímky BT, CT protnou kružnici l podruhé v bodech D, E. Najděte množinu průsečíků přímek DE a tečen ke kružnici l v bodě A.

Příklad 15. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran AC, BC v bodech E, D. Průsečík $AD \cap BE$ označme G. Zkonstruujeme body U, V, aby $ABUE$ a $ABDV$ byly rovnoběžníky. Dokažte, že $GU = GV$.

Příklad 16. Je dán trojúhelník ABC, ve kterém $\beta > 45°$(při obvyklém značení). Nechť D, E, F jsou po řadě paty výšek z vrcholů A, B, C a nechť K je takový bod úsečky AF, že platí $\angle DKF = \angle KEF$. Dokažte, že platí rovnost $KD^2 = FD^2 + AF \cdot BF$.

Příklad 17. V rovině je dána kružnice k a bod A vně. Body dotyků tečen z A ke kružnici k označme B, C. Na polopřímce opačné k BA uvažujme pohyblivý bod P a na polopřímce opačné k CA pohyblivý bod Q. Přímka BC protíná přímku procházející bodem P a rovnoběžnou s AC v E, přímku procházející bodem Q a rovnoběžnou s AB v F. Dokažte, že EQ prochází pevným bodem, který nazveme M, FP prochází pevným bodem, který nazveme N, a $PM.QN$ je konstantní.

Příklad 18. Šestiúhelníku $ABCDEF$ se dá vepsat kružnice. Ukažte, že potom přímky AD, BE, CF procházejí jedním bodem.

Příklad 19. Je dána kružnice k. Najděte množinu všech připsišť trojúhelníků s kružnicí opsanou k.

Příklad 20. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $AB > BC$ a $AC > BC$, a O, H jsou postupně jeho opsiště a orthocentrum. Předpokládejme, že kružnice opsaná trojúhelníku AHC protíná přímku AB podruhé v M a podobně kružnice opsaná AHB přímku AC podruhé v N. Dokažte, že opsiště trojúhelníka MNH leží na přímce OH.

Jste borci?

Příklad 21. Je dána kružnice k a dva vnější body P, Q. Pohyblivá tětiva AB na k obsahuje bod Q. PA, PB protínají k podruhé v D, C. Dokažte, že CD prochází pevným bodem.

Příklad 22. Nechť ABC je trojúhelník. Kružnice procházející B a C protíná stranu AB v C' a stranu AC v B'. Dokažte, že BB', CC' a HH' procházejí jedním bodem, H, H' jsou postupně orthocentra trojúhelníků ABC a $AB'C'$.

Invarianty, monovarianty

Miro Psota

Abstrakt. Budeme hľadať dáke invarianty alebo monovarianty. Tieto problémy väčšinou vyžadujú iba prísť na nejaký drsný trik, zvyšok je už potom pomerne jednoduchý a priamočiary. Druhá možnosť je nasadiť si ružové okuliare a pozrerať sa na príklad v inom svetle.

Na navodenie atmosféry

Ukážkový problém 1. Niekoľko mincí je uložených na nekonečný štvorčekovaný pás široký 1 štvorček. Pokiaľ existuje štvorček, na ktorom sú ešte aspoň dve mince, môžeme zobrať dve mince a jednu posunúť doľava a druhú doprava. Je možné sa po konečnom počte ťahov dostať naspäť do začiatočnej pozície?

Ukážkový problém 2. Majme sekvenciu $1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5...$, kde od siedmeho člena je každý člen rovný poslednej cifre súčtu predchádzajúcich šiestich. Dokážte, že sa tam nemôže vyskytovať šestica $0, 1, 0, 1, 0, 1$.

Ukážkový problém 3. Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

(i) Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
(ii) Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak,že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2. Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q, ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť roboti R_1, Q_1 a aj roboti R_2 a Q_2. Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia, pre každého pôvodného robota R. A to sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí. (IMO Shortlist 2013, C3)

Zväčša je hľadanie invariantov (monovariantov) umenie, ktoré robí tieto problémy ťažkými. Avšak tu je zopár klasických trikov, ktoré sa často používajú:

- *Ofarbovanie:* Proste to ofarbíme 2+ farbami. To, že ty možno nepoznáš viac ako 15 farieb, nič neznamená. Pre ľahšie problémy si spomeň na šachovnicu, pri ťažších treba niečo komplikovanejšie a pestrejšie.
- *Algebraické výrazy:* Keď máme nejaké hodnoty, oplatí sa pozreť na ich rozdiely, súčet, druhé mocniny, súčty druhých mocnín… Pokiaľ sú to celé čísla, zvyšky sú veľmi dobré kladivo.
- *Rohy a hrany útvarov:* Veľmi dobrá vec na problémy s mriežkou. Koľko rohov, hrán… má daný útvar?

- *Inverzie:* Užitočné pri permutáciách. Koľko dvojíc (i, j) sa tam nachádza takých, že i a j je v nesprávnom poradí? Kľude to môže byť aj v parite tohto čísla.
- *Celé čísla a zlomky:* Nie je tam kladné celé číslo, ktoré klesá? A nie je to náhodou menovateľ racionálneho čísla čo klesá?
- *Symetrie:* Nie je to po každom kroku symetrické? Nedajú sa objekty s rovnakými vlastnosťami popárovať? Nedá sa to rozdeliť na dva identické podproblémy (zvlášť užitočné v teórii hier)? Symetrie sú univerzálny nástroj.

Ideme na vec

Úloha 4. Petra a Dalila sa najnovšie nehrávajú so zápalkami, ale s peniazmi, ktoré ušetria tým, že si nekupujú zápalky. Zoberú si n korunáčiek a umiestnia ich na stole do jedného radu. Dievča, ktoré je na ťahu, si vyberie jednu mincu, ktorá je znakom hore, otočí ju, ako aj všetky ostatné napravo od nej. Potom je na ťahu druhé dievča. Takto striedavo ťahajú, pričom začína skúsenejšia Petra. Prehrá tá, ktorá už nevie spraviť ťah. Ukážte, že táto hra vždy skončí po konečnom počte krokov. Ktorá hráčka má víťaznú stratégiu? (KMS, 2002/03, Z1, 8)

Úloha 5. Nech $p_, p_2, p_3, ...$ je rastúca postupnosť prvočísel a nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je číslo medzi 0 a 1. Pre kladné celé k definujme

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{k-1} = 0 \\ \left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\} & \text{if } x_{k-1} \neq 0 \end{cases}$$

kde $\{x\}$ značí desatinnú časť x (desatinná časť x je daná $x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x). Nájdite všetky x_0 pre ktoré sa postupnosti $x_0, x_1, x_2, ...$ budú od istého indexu vyskytovať samé nuly. (USAMO 1997, #1)

Úloha 6. Na šachovnici $n \times n$ je $n - 1$ štvorčekov, ktoré sú infikované. Každú sekundu sa nakazí každý štvorček, ktorý sa dotýka aspoň 2 už nakazených políčok. Dokážte, že vieme vždy nájsť apoň jedno zdravé políčko.
(Stanford Putnam training 2007)

Úloha 7. Majme balíček $2n + 1$ kariet, ktorý môžeme miešať len nasledujúcimi dvoma operáciami:

- Seknutie: vyberieme ľubovoľný počet vrchných kariet a dáme ich naspodok.
- Perfect riffle shuffle: vyberieme n vrchných kariet a dáme ich medzi zvyšných $n + 1$ kariet v rovnakom poradí

Dokážte, že bez ohľadu na to koľko to robíme, nikdy nedosiahneme viac ako $2n(2n + 1)$ možných usporiadaní. (IMO training camp, 2008)

Úloha 8. Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8. Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz? (KMS, 2003/04, L1, 10)

Úloha 9. Vrcholy pravidelného n-uholníka majú celočíselné súradnice. Dokážte, že $n = 4$. (IMO training camp, 1999)

Úloha 10. Definujme *domino* ako usporiadanú dvojicu rôznych celých čísel. *Hadík* je postupnosť rôznych domín, kde počnúc druhým dominom sa prvé číslo domina zhoduje s druhým číslom predchádzajúceho domina a nevyskytujú sa tam naraz dominá (i, j) a (j, i). Označme *balíček* D_{40} množinu všetkých domín, ktorých obe čísla nepresahujú číslo 40. Nájdite dĺžku najdlhšieho možného hadíka tvoreného dominami z balíčka D_{40}. (AIME 1998, #15)

Úloha 11. Na tabuli sú napísané čísla od 1 po 2008. Každú sekundu sa magicky zmažú 4 čísla tvaru $a, b, c, a+b+c$ a nahradia sa 3 číslami $a+b, b+c, c+a$. Dokážte, že táto mágia sa bude diať maximálne 10 minút. (IMO training camp, 2008)

Úloha 12. Na šachovnicu 10×10 umiestnime 9 pukov tak, aby bol každý puk na inom políčku. Potom pridávame puky podľa nasledujúceho pravidla: ak má políčko, na ktorom nie je puk, aspoň dve susedné políčka, na ktorých už sú puky, tak na toto políčko dáme puk (susedné políčka majú spoločnú stranu). Ukážte, že týmito krokmi nikdy nezaplníme celú šachovnicu pukmi. (KMS, 2002/03, Z1, 11)

Úloha 13. Máme doštičku s 5×5 mriežkou žiaroviek, ale je dáka vadná. Keď stlačíme vypínač pre jednu žiarovku, prepne to zároveň stavy všetkých priľahlých žiaroviek v rovnakom riadku a stĺpci (max. 5 žiarovek). Na začiatku boli všetky vypnuté. Po nejakých krokoch, práve jedna bola zasvietená. Nájdite všetky možnosti, ktorá žiarovka to mohla byť. (APMO 2007, #5)

Úloha 14. Späť k ukážkovému problému 1. Dokážte, že ľubovoľná postupnosť ťahov vedie k stavu, po ktorom sa už nedá spraviť ďalší ťah. Navyše dokážte, že tento stav je nezávislý na predchádzajúcich ťahoch. (IMO training camp, 1999)

Úloha 15. Máme v riadku 2008 bielych kameňov a jeden čierny. Ťah znamená nasledovné: vyber jeden čierny kameň a zmeň farbu jeho susedom. Nájdite všetky možné polohy čierneho kameňa, pre ktoré je možné spraviť všetky kamene čierne. (Korean National MO 2009, #3)

Úloha 16. Zase pásik z ukážkového problému 1, tentokrát indexovaný. Môžeme však robiť toto:

- Vezmi mincu zo štvorčeka $n-1$ a n a daj jednu mincu na štvorček $n+1$.
- Vezmi 2 mince zo štvorčeka n a daj po jednej minci na štvorčeky $n-2$ a $n+1$.

Dokážte, že ľubovoľná postupnosť ťahov vedie k stavu, po ktorom sa už nedá spraviť ďalší ťah. Navyše dokážte, že tento stav je nezávislý na predchádzajúcich ťahoch. (MOP 1998 domáca úloha)

Úloha 17. Každému vrcholu pravidelného 5-uholníka je priradené celé číslo. Ich súčet je kladný. Ak x, y, z sú 3 po sebe idúce čísla a $y < 0$ tak trojicu (x, y, z)

zmeníme na $(x+y,-y,y+z)$. Tieto kroky sa robia, pokiaľ je nejaké záporné číslo. Určte, či algoritmus vždy skončí alebo nie. (IMO 1986)

Úloha 18. Nazvime mriežku $n\times n$ *strieborná* ak jej prvky sú z množiny $S=\{1,2,\dots,2n-1\}$ a pre $i=1,2,\dots,n$ i-ty stĺpec a i-ty riadok dokopy obsahujú všetky prvky S. Dokážte, že:

- pre $n=1997$ neexistuje strieborná mriežka,
- strieborné mriežky existujú pre nekonečne veľa hodnôt n.

(IMO 1997)

Úloha 19. Majme $(2n-1)\times(2n-1)$ mriežku a v každom z nich je jedna šípka, ktorá ukazuje hore, dole, vpravo alebo vľavo. Na jednej z nich je chrobák. Vždy ide do ďalšieho štvorčeka podľa šípky. Ak chrobák opustí štvorček, šípka v ňom sa otočí o 90° v smere hodinových ručičiek. Dokážte, že chrobák bude vonku z veľkého štvorca pred $2^{3n-1}(n-1)!-3$ ťahom. (IMOTC 2013)

Úloha 20. Vo vrcholoch pravidelného 6-uholníka je napísaných 6 nezáporných celých čísel, ktorých súčet je n. Môžeme si vybrať vrchol a prepísať tam číslo na absolútnu hodnotu rozdielu jeho dvoch susedov. Dokážte, že ak je n nepárne, tak môžme dosiahnuť na všetkých vrcholoch nuly. (USAMO 2003, #6)

Hinty

Hint 4. binárka
Hint 5. menovateľ
Hint 8. modulo 3
Hint 9. dokážte to pre n párne(to ťažšie ešte len príde)
Hint 10. predstavte si to ako graf a skúmajte… PARITU
Hint 12. obvod
Hint 13. zisti najprv kde nemôže byť - fajné ofarbenie
Hint 14. no predsa invarianty (niečo, čo sa nemení)
Hint 16. druhý tip nám to zanáša moc doľava, pre druhú časť je fajný pán Fibonacci a pravý zemiak
Hint 17. dáke druhé mocniny
Hint 18. PARITA!
Hint 20. no zase aj parita

Kombinatorická geometrie a konvexita

David Hruška

Abstrakt. V oblasti kombinatorické geometrie lze říct, že co úloha, to nový trik. Proto tento příspěvek obsahuje hlavně úlohy – od snadných po velmi obtížné. Problémy týkající se konvexních množin jsou ale natolik rozšířené a probádané, že se na konvexitu podíváme přece jen trochu podrobněji.

Rozcvička

Úloha 1. Dokažte, že každý konvexní mnohostěn má dvě stěny se stejným počtem vrcholů.

Úloha 2. Dokažte, že každý mnohoúhelník obsahuje aspoň jednu svoji diagonálu.

Úloha 3. Na ledové ploše trénuje hokejista. Má tři puky a pokaždé jeden z nich odpálí tak, že proletí mezi zbylými dvěma. Může hokejista 2015. odpalem vrátit puky do původní pozice?

Úloha 4. Uvnitř $2n$-úhelníku se nachází liška. Ze všech vrcholů najednou po této lišce vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokažte, že některá strana musela být zasažena dvakrát.

Úloha 5. Mějme konvexní mnohoúhelník a pro bod v něm uvažme jeho kolmé projekce na strany mnohoúhelníku (jakožto přímky). Dokažte, že alespoň jedna z projekcí leží uvnitř příslušné strany (jakožto úsečky).

Konvexní množiny

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *konvexní*, pokud obsahuje s každými dvěma body i celou úsečku, která je spojuje.

Definice. Pro množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme její *konvexní obal* jako průnik všech konvexních nadmnožin A.

Tvrzení. Konvexní obal množiny $A \in \mathbb{R}^n$ tvoří všechny konvexní kombinace bodů z A, tedy body (vektory) tvaru $\sum \alpha_i x_i$, kde $x_i \in A$, $\alpha_i \geq 0$ a $\sum \alpha_i = 1$.

Věta (Carathéodory). V předchozím tvrzení stačí uvažovat konvexní kombinace $n+1$ bodů. [1])

Věta (Radon). Množinu alespoň $n+2$ bodů v $\mathbb{R}^n$ lze rozdělit na dvě, jejichž konvexní obaly se protínají.

[1]) Jinými slovy, konvexní obal A je sjednocení všech simplexů s vrcholy v A.

Cvičení 6. Dokažte, že každých $n \geq 5$ bodů v prostoru je možné obarvit dvěma barvami tak, aby žádná rovina ostře neoddělovala jednu barvu od druhé.

Nejvýznamnějším důsledkem Radonovy věty je Hellyova věta:

Věta (Helly). Pokud se každých $n+1$ z konečně mnoha konvexních podmnožin $\mathbb{R}^n$ protíná, protínají se už všechny.

Cvičení 7. Dokažte, že n v předchozí větě nestačí.

Věta (Helly – nekonečná verze). Pokud se každých $n+1$ z libovolně mnoha konvexních uzavřených a omezených podmnožin $\mathbb{R}^n$ protíná, protínají se už všechny.

Věta (Oddělovací věta). Pokud se vnitřky konvexních množin A a B neprotínají, pak jdou (neostře) oddělit nadrovinou.

Příklad. Každé tři z deseti much na stole jdou zabít jednou ranou konvexní plácačkou, kterou smíme pouze posouvat. Dokažte, že jdou zaplácnout všechny najednou.

Ponaučení. Častými triky jsou například: extremální princip, indukce, obarvení, Dirichletův princip, uvážení konvexního obalu, Hellyova věta.

Ve zbytku příspěvku jsou úlohy orientačně uspořádány podle obtížnosti.

Snadné úlohy

Úloha 8. Čtvercový dort o rozměrech 6×6 chceme shora pokrýt kousky čokolády 2×1. Ukažte, že ať plochu vyplníme jakkoli, vždy můžeme dort rozkrojit, aniž bychom krájeli dvojdílek čokolády.

Úloha 9. Lze prostor obarvit pěti barvami (každá musí být použita) tak, aby každá rovina byla nejvýše trojbarevná?

Úloha 10. V rovině leží několik mnohoúhelníků, z nichž každé dva se protínají. Dokažte, že existuje přímka, která je všechny protíná.

Úloha 11. Je dán bod A a několik mnohoúhelníků v rovině takových, že každé dva mají neprázdný průnik. Dokažte, že existuje kružnice se středem v A, která protíná všechny tyto mnohoúhelníky nebo se jich alespoň dotýká. (PraSe 2008/2009)

Úloha 12. Nechť A je množina bodů v rovině taková, že každé dva mají vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že pak existuje kruh o poloměru $\sqrt{3}/3$ takový, že A leží v tomto kruhu.

Úloha 13. Mějme n bodů v rovině, $n \geq 3$, přičemž žádné tři z nich neleží v přímce. Uvažujme vnitřní úhly všech trojúhelníků s vrcholy v daných bodech a velikost nejmenšího takového úhlu označme φ. Pro dané n najděte největší možné φ.
(MO A–II–4)

Obtížnější úlohy

Úloha 14. Buď I konečná množina rovnoběžných úseček v rovině. Nechť ke každým třem úsečkám z I existuje přímka protínající všechny tři. Ukažte, že existuje přímka protínající všechny úsečky z I.

Úloha 15. V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů. Zabodněte do roviny $2n - 5$ špendlíků tak, aby propíchly vnitřek každého trojúhelníku s vrcholy v daných bodech.

Úloha 16. Každé tři body z konečné podmnožiny roviny jdou pokrýt páskem šířky 1. Dokažte, že lze pokrýt celou množinu páskem šířky 2.

Úloha 17. Nechť $C_1, \ldots, C_n$ je soubor (alespoň tří) konvexních množin v rovině a nechť K podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K, potom průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K.

Úloha 18. Na louce se pase konečně mnoho krav, každá kráva je buď černá, nebo bílá. Krávy se nehýbou. Nechť v každé skupině čtyř krav lze rovným plotem oddělit černé od bílých. Ukažte, že v celém stádu lze rovným plotem oddělit černé od bílých.

Úloha 19. V lese nejtemnějším z nejtemnějších rostou tenké stromy, z nichž každý je nižší než 1007 metrů. Žádné dva stromy od sebe nejsou dál, než kolik činí rozdíl jejich výšek. Dokažte, že celý temný les je možné obehnat zdí dlouhou 2015 metrů.

(MKS 26–1–7)

Úloha 20. Je dán mnohoúhelník o obsahu n. Dokažte, že je možné jej vložit do roviny tak, aby pokrýval (hranice se počítá) alespoň $n + 1$ mřížových bodů.

Úloha 21. V rovině je dáno několik bodů tak, že neleží všechny na jedné přímce. Dokažte, že je možné najít přímku, na které leží právě dva tyto body.

(Sylvester problem)

Úloha 22. V rovině jsou dány body P, A_1, A_2, …, A_{2010} v obecné poloze. Dokažte, že počet všech trojúhelníků $A_iA_jA_k$, uvnitř kterých leží bod P, je sudý.

Úloha 23. Máme dvě kružnice s obvodem 1000. Na jedné z nich je vyznačeno 1000 bodů a na druhé několik oblouků o celkovém součtu nejvýše 1. Dokažte, že na sebe můžeme obě kružnice položit tak, aby všechny vyznačené body ležely mimo vnitřky vyznačených oblouků.

Úloha 24. Máme v rovině 100 bodů v obecné poloze. Dokažte, že mezi všemi trojúhelníky tvořenými těmito body není více než 70 % ostroúhlých.

(IMO 1970)

Úloha 25. Nakreslíme do roviny trojúhelník RGB. Rozdělíme jej na několik menších trojúhelníčků tak, aby žádný trojúhelníček neměl vrchol uvnitř strany jiného trojúhelníčku. Nyní obarvíme vrcholy trojúhelníčků červeně, zeleně a modře tak, aby vrcholy velkého trojúhelníku dostaly příslušné barvy. Dále vrcholy na stranách musí dostat barvu jednoho z přilehlých vrcholů velkého trojúhelníka. Dokažte, že má pak jeden z malých trojúhelníčků všechny vrcholy různě barevné.

(Spernerovo lemma)

Úloha 26. Půdorys galerie má tvar n-úhelníku. Kolik strážníků (v závislosti na n) potřebujeme, abychom je mohli rozestavit tak, že dohromady uvidí na celou galerii? Strážník vidí všemi směry. (Art gallery problem)

Úloha 27. Na kolik nejvýše částí může n přímek rozdělit rovinu? Dokažte, že v tom případě je mezi nimi aspoň $\frac{2n-2}{3}$ trojúhelníků.

Úloha 28. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazveme kolumbijským, jestliže je z nich 2013 červených, 2014 modrých a žádné tři neleží v přímce. O skupině přímek v rovině řekneme, že je dobrá pro dané rozmístění, jestliže:

- žádná z přímek neprochází žádným bodem rozmístění,
- žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev.

Najděte nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění 4027 bodů v rovině v ní existuje skupina k dobrých přímek. (IMO 2013, 2)

Velmi obtížné úlohy

Úloha 29. Rozřezali jsme obdélník na menší obdélníky a shledáváme, že každý má alespoň jednu stranu celočíselnou. Dokažte, že i původní obdélník měl jednu stranu celočíselnou.

Úloha 30. There are $2n+1$ points given in a plane in general position. A circle k, which goes through three of these points, we call „blue“, if number of the remaining points lying outside of k and inside of it are the same. Prove that the number of blue circles has the same parity as n.

Úloha 31. Říkáme, že přímky v rovině jsou v obecné poloze, pokud žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem. Množina přímek v obecné poloze rozděluje rovinu na oblasti, z nichž některé mají konečný obsah – nazýváme je konečné oblasti příslušné dané množině přímek. Pro každé dostatečně velké n dokažte, že v libovolné množině n přímek v obecné poloze je možné obarvit modře aspoň $\sqrt{n}$ přímek tak, že žádná z příslušných konečných oblastí nebude mít celou hranici modrou.

Úloha 32. Máme daných 60 bodů na jednotkové kružnici. Dokažte, že na ní leží bod, jehož součet vzdáleností od zadaných bodů nepřevyšuje 80.

(ČPS 2009/2010)

Úloha 33. Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven dvojnásobku obsahu mnohoúhelníku P. (IMO 2006–6)

Úloha 34. Nechť S je čtverec se stranami délky 100 a L je lomená čára uvnitř S, která se neprotíná (ani nedotýká). Předpokládejme, že pro každý bod na hranici S je možné nalézt bod na L, který není od P dál než $1/2$. Dokažte, že je možné na L najít dva body X, Y takové, že $|XY| \leq 1$, ale délka L mezi X a Y je alespoň 198. (IMO 1982–6)

Úloha 35. Nechť A je konvexní a omezená množina v rovině. Dokažte, že existuje bod $O \in A$ takový, že pro libovolné dva body X a Y na hranici A takové, že $O \in XY$, platí $\frac{1}{2} \leq \frac{|XO|}{|YO|} \leq 2$.

Úloha 36. A finite collection of squares has total area 4. Show that they can be arranged to cover a square of side 1.

Úloha 37. Several identical paper squares of n different colors are lying on a rectangular table, with sides of the squares parallel to the sides of the table. Among any n squares of pairwise distinct colors it is possible to find 2 which can be pinned to the table using one pin. Prove that all squares of a certain color can be pinned to the table using $2n - 2$ pins. (Rusko 2003)

Hinty

Hint 8. Dokažte, že pokud na potenciální čáře řezu leží dílek, pak tam leží ještě aspoň jeden.
Hint 9. Ne. Vezměte čtyři různě barevné body a rozlište dva případy podle toho, zda leží v rovině, nebo ne.
Hint 10. Promítněte mnohoúhelníky na přímku.
Hint 11. Pro každý z mnohoúhelníků uvažte ty hodnoty poloměru, pro které příslušná kružnice mnohoúhelník protíná. Co pro tato rozmezí platí?
Hint 12. Hellyho věta.
Hint 13. Vezměte bod na konvexním obalu, kterému přísluší úhel alespoň $\frac{n-2}{n}180^\circ$.
Hint 14. Vyjádřete fikaně přímku jako bod v rovině a naroubujte na úlohu Hellyho větu.
Hint 15. Dvakrát vhodně posuňte původní body a nakonec ještě něco ušetřete.
Hint 16. Uvažte nejvzdálenější dvojici bodů.
Hint 17. Hellyho věta.
Hint 18. Uvažte konvexní obaly černých a bílých krav, použijte Oddělovací a Caratheodoryho větu.
Hint 19. Projeďte stromy od nejmenšího k největšímu a uzavřete cestu.
Hint 20. Nakrájejte mnohoúhelník mřížkou a vzniklé dílky naskládejte na sebe.
Hint 21. Uvažte dvojici průsečík–přímka s nejmenší nenulovou vzdáleností.
Hint 22. Dokažte, že se parita zkoumaného počtu nezmění, když bod P přeleze úsečku.
Hint 23. Na první kružnici připevněte kreslicí bod a otáčejte jím po druhé. Kreslicí bod nechť kreslí právě tehdy, když je aspoň nějaký bod na zakázaném území.
Hint 24. Dokažte tvrzení nejdřív pro 75 %, za tímto účelem uvažte čtveřice bodů. Pak vylepšete odhad.
Hint 25. Uvažte graf, jehož vrcholy jsou malé trojúhelníčky a poslední vrchol je zbytek roviny. Dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když příslušné oblasti sdílí úsečku s červeným a zeleným krajním bodem. Zamyslete se nad paritou stupňů vrcholů.
Hint 26. Rozdělte n-úhelník na trojúhelníky a obarvěte každý vrchol jednou ze tří barev tak, aby každý z trojúhelníků byl tříbarevný.
Hint 27. Vyrobte na obou stranách skoro všech přímek trojúhelník. Vezměte nejbližší bod.
Hint 28. Dva body jdou oddělit od ostatních dvěma přímkami. Uvažte konvexní obal a oddělujte tu lepší barvu. Pro odhad všechny body nasypte na pravidelný 2027-úhelník.
Hint 29. Položte velký obdélník na šachovnici se stranou nejmenšího čtverečku velikosti $\frac{1}{2}$.
Hint 30. Dokažte, že počet modrých kružnic procházejících dvěma pevně zvolenými body je lichý.
Hint 32. Uvažte libovolný rovnostranný trojúhelník vepsaný do té kružnice. Pak jeden z jeho vrcholů vyhovuje. Možná se bude hodit nějaké geometrické tvrzení.
Hint 34. Představte si postupné kreslení této čáry. Po dokončení (uspokojení všech bodů) jedné strany čtverce budou dvě protější strany načaté, ale nedokončené. Z toho musí existovat cesta k jedné straně a zpátky, která bude dlouhá 198.
Hint 35. Pro každý bod na hranici A uvažte stejnolehlost s koeficientem $\frac{2}{3}$. Nekonečná Hellyho věta a těžiště.

Hint 36. Všechny čtverce zmenšete tak, aby měly strany $\frac{1}{2^n}$ a součet jejich obsahů byl aspoň 1. Vymyslete nějaký rozumný postup pokrývání.
Hint 37. Indukce. Uvažte obdélník nejvíce nalevo.

Combinatorial Nullstellensatz

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Příspěvek se zaobírá velmi pokročilou technikou, kterou dává k dispozici věta Combinatorial Nullstellensatz od Noga Alona. Tato věta mluví o polynomech více proměnných, tedy o algebraickém objektu, ale přitom poskytuje užitečný nástroj na dokazování těžkých tvrzení z aditivní teorie čísel, teorie grafů, apod. V tomto textu se vyskytuje několik standardních aplikací této věty a příkladů na procvičení.

Úvod

Značení. Zápisem $F[x_1, \dots, x_n]$ budu značit množinu všech polynomů s koeficienty v tělese F s proměnnými $x_1, \dots, x_n$.

Definice. Těleso $\mathbb{Z}_p$ je množina čísel $\{0, \dots, p-1\}$, kde je sčítání a násobení definované modulo p.

Kombinatorická věta o nulách zhruba říká, že máme-li nenulový polynom omezeného stupně, tak na dostatečně velké množině nemůže nabývat samých nul. Pro polynomy jedné proměnné se jedná o toto snadné pozorování.

Tvrzení. Nechť F je těleso a $f \in F[x]$ nenulový polynom stupně t. Pokud $S \subset F$ splňuje $|S| \geq t+1$, pak
$$\exists s \in S : f(s) \neq 0.$$

Pro polynomy více proměnných bychom se mohli pokusit tvrzení zobecnit asi takto:

Tvrzení. Nechť $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ a předpokládejme, že stupeň f jakožto polynomu v proměnné x_i je nejvýše d_i. Dále nechť S_i je množina d_i+1 různých čísel z F. Pokud $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ pro $x_1 \in S_1, \dots, x_n \in S_n$, pak f je nulový polynom.

Tohle tvrzení sice platí, ale má zbytečně silné předpoklady – kromě toho, že polynom musí mít malý stupeň, tak navíc musí mít malý stupeň v každé proměnné. Následující tvrzení tento problém řeší.

Tvrzení (Combinatorial Nullstellensatz). Nechť $f \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je polynom stupně $t_1 + \dots + t_n$. Pokud $S_1, S_2, \dots, S_n$ jsou podmnožiny F takové, že $|S_i| \geq t_i + 1$ pro každé i a pokud je koeficient u $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}$ nenulový, pak existují $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n$, pro které
$$f(s_1, s_2, \dots, s_n) \neq 0.$$

Příklady

Příklad 1. Mějme body z $\{0,1,\ldots,m\}^n$. Najděte polynom, který vyjde nenulový pro bod $(0,\ldots,0)$ a nulový jinak.

Příklad 2. Nechť n je kladné celé číslo. Uvažujme množinu

$$S = \{(x,y,z) : x,y,z \in \{0,1,\ldots,n\}, x+y+z > 0\}$$

složenou z $(n+1)^3 - 1$ bodů třírozměrného prostoru. Určete nejmenší možný počet rovin, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z S, neobsahuje však bod $(0,0,0)$.
(IMO 2007/6)

Příklad 3. If A and B are subsets of $\mathbb{Z}_p$, then

$$|A+B| \geq \min(p, |A|+|B|-1).$$

(Cauchy–Davenport)

Příklad 4. Let A be a subset of $\mathbb{Z}_p$. Then

$$|\{x+y \mid x,y \in A, x \neq y\}| \geq \min(p, 2|A|-3).$$

(Erds–Heilbronn Conjecture)

Příklad 5. Ukažte, že každý multigraf bez smyček s průměrným stupněm větším než $2p-2$ a maximálním stupněm nejvýše $2p-1$ obsahuje p-regulární podgraf (každý vrchol má stupeň p). (Alon–Friedland–Kalai)

Příklad 6. Let p be a prime and let $S_1, S_2, \ldots, S_k$ be sets of non-negative integers, each containing 0 and having pairwise distinct elements modulo p. Suppose that $\sum_i (|S_i|-1) \geq p$. Prove that for any elements $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Z}_p$, the equation $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k = 0$ has a solution $(x_1,\ldots,x_k) \in S_1 \times \cdots \times S_k$ other than the trivial one $(0,\ldots,0)$. (Troi–Zannier's theorem)

Příklad 7. Let $H_1,\ldots,H_m$ be a family of hyperplanes in $\mathbb{R}^n$ that cover all vertices of unit cube $\{0,1\}^n$ but one. Prove that $m \geq n$.

Příklad 8. Let $f_1, f_2, \ldots, f_k$ be polynomials in $\mathbb{Z}_p[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ with $\sum_{i=1}^k \deg f_i < n$. Show that if the polynomials f_i have a common zero $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, then they have another common zero. (Chevalley–Warning; iKS 4, N6)

Příklad 9. Let p be a prime and d a positive integer. Prove that for any integer k there are integers $x_1,x_2,\ldots,x_d$ such that $k \equiv x_1^d + \cdots + x_d^d \pmod{p}$.
(Gabriel Carrol)

Příklad 10. Let $G=(V,E)$ be a graph. For each vertex $v \in V$ we are given a bad set $B(v)$ of positive integers.

(i) Prove that if $\sum_{v\in V} |B(v)| < |E|$, then there exists a nontrivial subgraph H for which $\deg_H(v) \notin B(v)$ for any v.

(ii) Now suppose we allow $0 \in B(v)$ as well. Prove that if $|B(v)| \leq \frac{1}{2}\deg v$ for any v, then we can still find such an H (not necessarily nontrivial).

(Shirazi–Verstrate)

Příklad 11. Let p be a prime number, and let $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_p$, not necessarily distinct. Prove that for any distinct elements $b_1, b_2, \ldots, b_k$ of $\mathbb{Z}_p$ there exists a permutation σ such that the elements $a_1 + b_{\sigma(1)}, a_2 + b_{\sigma(2)}, \ldots a_k + b_{\sigma(k)}$ are pairwise distinct.

Příklad 12. Let $n \geq 2$ be even and let $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \{\pm 1\}^n$ be vectors of length n such that any $v \in \{\pm 1\}^n$ is orthogonal to at least one of the v_i. Prove that $k \geq n$ and that this estimate is sharp.

Příklad 13. Let p be a prime, and let $G = (V, E)$ be a graph on a set of $|V| > d(p-1)$ vertices. Then there is a nonempty subset U of vertices of G such that the number of cliques of d vertices of G that intersect U is 0 modulo p.

Hinty

Hint 1. Za každou souřadnici přidejte činitel, který polynom vynuluje, pokud se souřadnice rovná jednomu z čísel $1, \ldots, m$. Polynom bude mít stupeň mn.

Hint 2. Dokažte, že méně než $3n$ rovin nestačí. Jinak pro spor tyto roviny uvažte a sestrojte pomocí nich polynom, který je všude nulový. Kvůli bodu $(0, 0, 0)$ bude ještě třeba odečíst násobek polynomu, který vyrobí nulu i v tomto bodě a nuly v ostatních bodech nezkazí.

Hint 3. Případ $|A|+|B| > p$ je jednoduchý. Jinak uvažte polynom $f(x, y) = \prod_{c \in C}(x+y-c)$, kde $C = A + B$, a s využitím Nullstellensatzu najděte hodnoty x a y, ve kterých polynom není i je nulový.

Hint 4. Polynom z minulého příkladu $f(x, y) = \prod_{c \in C}(x + y - c)$, kde C je množina ze zadání, mírně upravte. Potřebujeme, aby nám Nullstellensatz nenašel jako nenulový bod ten, pro který platí $x = y$. Nezapomeňte ověřit nenulovost koeficientu u vhodného členu polynomu.

Hint 5. Uvažte polynom v proměnných $x_e \in \{0, 1\}$, které odpovídají tomu, jestli danou hranu vyberete do podgrafu. Polynom má vyjít nula, pokud má každý vrchol stupeň dělitelný p. Je zase potřeba „zakázat“, aby Nullstellensatz našel triviální řešení (prázdný podgraf).

Hint 6. Uvažte následující polynom s vhodně zvolenou konstantou c:

$$P(x_1, \ldots, x_k) = (a_1x_1 + \cdots + a_kx_k)^{p-1} - 1 + c \prod_{0 \neq s_1 \in S_1} (x_1 - s_1) \cdots \prod_{0 \neq s_k \in S_k} (x_k - s_k).$$

Hint 7. Uvažte pro spor méně než n nadrovin tvaru $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b_i$ a polynom

$$P(x) = (-1)^{n+m+1} \prod_{j=1}^{m} b_j \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1) - \prod_{i=1}^{m} [(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k) - b_i].$$

Hint 8. Všimněte si, že $f_1(x)^{p-1}$ modulo p je vždy jedna nebo nula. Sestrojte polynom tak, aby vyšel jedna, právě když je $(x_1, \ldots, x_n)$ společná nula našich polynomů (jinak to má být nula), a pak zařiďte, aby vyšel nula pro bod $(c_1, \ldots, c_n)$, aniž by se pokazila nulovost pro ostatní body.

Hint 9. Uvědomte si, že $\{x^d\} = \{x^{\gcd(d, p-1)}\}$, a převeďte úlohu na případ $d \mid p - 1$. Pak uvažte polynom, který je nulový, právě když výraz ze zadání dává jiný zbytek než k modulo p.

Hint 10.

(i) Použijte jako proměnné polynomu $x_e \in \{0, 1\}$ vyjadřující, zda je hrana v podgrafu vybraná. Vytvořte polynom, který je nenulový, právě když má každý vrchol nezakázaný stupeň. Ten ještě upravte, abyste vyloučili prázdný podgraf.

(ii) Stačí vzít první polovinu předchozího polynomu, ale ještě je potřeba vhodně zorientovat hrany, aby se každá započítala jen jednou.

Hint 11. Chcete, aby žádná dvojice $(a_i + x_i - a_j - x_j)$ nebyla nulová, pokud $x_i \neq x_j$. Tedy polynom má vyjít nula, kdykoliv je jeden z členů $a_i + x_i - a_j - x_j$ nulový nebo pokud se nějaké x_i a x_j rovnají.

Hint 12. Kdo to vyřeší, dostane lízátko ;)

Hint 13. Navrhněte polynom, který pomocí principu inkluze a exkluze počítá, kolik je hledaných klik s d vrcholy, které obsahují nějaký vrchol z U. Může se k tomu hodit definovat $K(I)$ pro $I \subseteq V$ jako počet klik na d vrcholech, které obsahují I. Jestli je řešení 0 modulo p poznáme umocněním na $p-1$. Pak je potřeba k polynomu ještě něco přičíst, aby byla splněna podmínka Nullstellensatzu o nenulovosti vhodného koeficientu.

Derivácie, hľadanie extrémov

Jakub „Xellos“ Šafin

Abstrakt. Príspevok ponúka spôsoby riešenia úloh typu „dokážte nerovnosť“ alebo „nájdite maximum výrazu“ analýzou funkcií. Kľúčovou myšlienkou je nulovosť prvej derivácie, prípadne jej zovšeobecnenia pre vyšší počet premenných, ktoré namiesto dokazovania nerovností umožní riešiť sústavy rovníc. Metóda Lagrangeových multiplikátorov často hľadanie extrémov touto metódou výrazne zjednoduší. Zbežne tiež spomenieme Taylorov rozvoj funkcií jednej premennej a jeho využitie.

Definícia. Majme funkciu f a bod x_0. Ak existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ také, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon)\,, \tag{1}$$

c nazveme limitou f v bode x_0, značíme $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$. Ak platí $c = f(x_0)$, hovoríme, že f je spojitá v bode x_0.

Veta. Aritmetika limít:

- $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$
- ak f je spojitá v bode $y_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, potom $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y)$

Definícia. Nech $f : I \to \mathbb{R}$, kde I je otvorený interval. Deriváciu f podľa x značíme $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ alebo $f'(x)$ (ak je jasné, podľa čoho derivujeme) a definujeme v bode $x_0 \in I$ ako

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \tag{2}$$

ak táto limita existuje. Druhú deriváciu značíme $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f''(x)$ a definujeme $f''(x) = (f'(x))'$, podobne pre derivácie vyšších rádov $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} = f^{(k)}(x)$. Množinu funkcií, ktoré majú na I spojité derivácie do k-teho rádu, značíme $\mathcal{C}^k(I)$.

Poznámka. Tichý predpoklad pre existenciu limity: $f(x)$ je definovaná pre $0 < |x - x_0| < \delta$; $f(x_0)$ pre limitu definovaná byť nemusí, pre deriváciu už musí. Tento predpoklad je automaticky splnený voľbou otvoreného intervalu I, $f'(x)$ je teda (ak všade existuje) zasa funkcia z I do $\mathbb{R}$.

Ďalej budeme stále predpokladať, ze všetko, o čom hovoríme, existuje; prípady neexistencie treba vždy vyšetriť osobitne.

Veta. Aritmetika derivácií: ak pravé strany dávajú zmysel,

- $(f + g)' = f' + g'$

- $(fg)' = f'g + g'f$; špeciálne $(cf)' = c(f')$
- $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$; špeciálne $f_{-1}{}'(x) = 1/f'(f_{-1}(x))$

Tvrdenie. Ak existuje $f'(x_0)$, je f spojitá v bode x_0.

Uvedené funkcie a všetky, ktoré sa z nich dajú postaviť sčítaním, násobením a skladaním (napr. $1/f(x) = (1/x) \circ f(x)$) aj ich derivácie ľubovoľného rádu sú na celom svojom definičnom obore spojité.

Veta. Nutná podmienka extrému: ak existuje $f'(x_0)$ a $f(x)$ má v bode x_0 (lokálny) extrém, potom $f'(x_0) = 0$.

Ak $f' > 0$ na intervale I, f je na I rastúca. Ak $f' < 0$, je klesajúca.

Pozor, $f' = 0$ platí v *stacionárnych bodoch*, ktoré nemusia byť extrémy. Napr. $(x^2)'(0) = (x^3)'(0) = (x^4)'(0) = 0$, ale x^3 tam nemá extrém.

Veta. Postačujúca podmienka extrému: ak existuje $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, má $f(x)$ v bode x_0 (lokálne) minimum. Ak $f''(x_0) < 0$, ide o maximum.

Pozor, extrém nie je maximum/minimum! Napr. $\arctan x$ nemá extrém, ale v nekonečnách sa blíži $\pm\frac{\pi}{2}$. Ak je interval z nejakej strany otvorený, treba vyšetriť aj hodnoty funkcie v krajných bodoch, resp. jej limity pri nich.

Taylorov rozvoj

Podstata problému: chceme funkciu $f(x)$ aproximovať okolo bodu x_0 polynómom $\phi_n(x - x_0)$. Dobrá aproximácia je napr. taká, kde $\phi^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ pre $j \leq k$.

Tvrdenie. Nech $f \in \mathcal{C}^k$ v x_0. Potom pre x okolo x_0 platí

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(k)}(\tilde{x})}{k!}(x - x_0)^k = \phi_k + \frac{f^{(k)}(\tilde{x})}{k!}(x - x_0)^k \qquad (3)$$

kde $\tilde{x}$ je medzi x a x_0.

Tvrdenie. Nech $f \in \mathcal{C}^\infty$ v x_0. Potom pre x okolo x_0 platí

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j\,. \qquad (4)$$

Taylorov rozvoj sa dá využiť v kombinatorike. Ak hľadáme čísla c_k a poznáme vhodný rekurentný vzťah, môžeme zaviesť funkciu $f(x) = \sum c_k x^k$; ak nájdeme vzorec pre f, stačí ho derivovať a dostaneme c_k explicitne.

Funkcie viacerých premenných

Poznámka. Einsteinovo sumačné pravidlo: sumy nepíšeme, sčítame cez opakujúce sa indexy tak, aby to malo zmysel.

Tenzorový formalizmus v $\mathbb{R}^n$: ak sa cez index nesčíta, označuje n-ticu (vektor) nejakých objektov, napr. čísel alebo funkcií; zápis x_k je rovnaký ako $\mathbf{x}$ a $g_j(x_k)$ rovnaký ako $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Definícia. Nech $f(x_k)$ je funkcia n premenných $x_{1\dots n}$. Parciálnu deriváciu podľa x_j značíme $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, resp. $\partial_j f$, a definujeme ako $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_j}$, pričom ostatné premenné považujeme za konštanty. Vektor parc. derivácií

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{5}$$

nazývame gradient.

Premenné všeobecne nemusia byť nezávislé. V tom sa líši klasická derivácia od parciálnej: pri parciálnej sa tvárime, že nezávislé sú, pri klasickej (totálnej) musíme zahrnúť aj vzťahy medzi jednotlivými premennými.

Veta. Retiazkové pravidlo: ak $f \in \mathcal{C}^1$, totálnu deriváciu podľa parametra t spočítame ako

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(x_k) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_k)\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(x_k) \tag{6}$$

Ak premenné sú nezávislé ($\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_k} = 0$ pre $j \neq k$), totálna a parciálna derivácia teda splýva. Taktiež je $\vec{\nabla} f$ kolmicou na množinu bodov $\mathbf{x}$, kde $f(\mathbf{x}) = 0$.

Tvrdenie. Nutná podmienka extrému: rovnako ako pri jednej premennej, ale namiesto $f'(\mathbf{x}_0) = 0$ chceme $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_j}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Veta. Zámeny parciálnych derivácií: ak $f \in \mathcal{C}^2$, potom $\partial_i \partial_j f(x_k) = \partial_j \partial_i f(x_k)$.

Definícia. Množina M je otvorená, ak $(\forall \mathbf{x}_0 \in M)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow \mathbf{x} \in M)$.

Tvrdenie. Nech M je množina popísaná sústavou ostrých nerovností $g_j(x_k) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in M$. Potom je M otvorená.

Množinu ∂M bodov, pre ktoré platí $g_j(x_k) = 0$ pre nejaké j, nazývame hranicou M.

Tvrdenie. Zdola obmedzená funkcia na obmedzenej $M \cup \partial M$ nadobúda minimum; na M ho môže nadobúdať len v lokáknych extrémoch. Podobne pre maximum.

Lepšie ako extrémy sú odhady zhora / zdola. Funkciu $f(x_k)$ spojitú na $M \cup \partial M$ odhadneme napr. zdola ako minimum z:

- f v lokálnych extrémoch;
- minima f na ∂M;
- ak je M neobmedzená, vhodných limít f v nekonečne.

(Ak je f spojitá na M, ale nie na jej hranici, zvyčajne ide na hranici do $\pm\infty$.)

Viazané extrémy

Definícia. Majme zobrazenie $g_j(x_k) : M \to N$ $(M, N \subset \mathbb{R}^n)$. Jacobiho maticu ∇g definujeme ako

$$(\nabla g)_{jk} = \frac{\partial g_j}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{7}$$

a jej determinant $|\nabla g|$ voláme jakobián.

Veta (O implicitnej funkcii). Nech M je množina bodov $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ popísaná podmienkou $g_j(x_k, y_l) = 0$ $(j, l = 1..m, k = 1..n)$ a g_j sú $\mathcal{C}^1$ v bode $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. Nech $|\nabla_{\mathbf{y}} g| \neq 0$ v tom bode. Potom na okolí toho bodu existuje $\mathcal{C}^1$ funkcia $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ (m-tica funkcií $y_l(x_k)$) taká, že $(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))$ tiež popisuje M a platí

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = -(\nabla_{\mathbf{y}} g)^{-1}_{jl} \frac{\partial g_l}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\,; \tag{8}$$

$^{-1}$ označuje inverznú maticu.

Na množinu M sa dá pozerať ako na n-D objekt v $n+m$-D priestore; $\vec{\nabla} g_j$ popisujú vektory kolmé na tento objekt v danom bode. Ak má mať funkcia lok. extrém na M, smie mať nenulovú len „deriváciu kolmo na M“, teda jej gradient sa musí dať vyjadriť len pomocou vektorov kolmých na M. To formalizuje nasledujúca veta.

Veta (Lagrangeove multiplikátory). Nech M je množina daná sústavou $m < n$ rovníc $g_j(x_k) = 0$, kde $g_j \in C^1$. Nech sú $\vec{\nabla} g_j$ lineárne nezávislé. Ak $f(x_k) \in \mathcal{C}^1$ má v bode $\mathbf{x}_0 \in M$ extrém, existujú λ_j také, že

$$\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) = \lambda_j \vec{\nabla} g_j(\mathbf{x}_0) \quad \equiv \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}\,. \tag{9}$$

Užitočný špeciálny prípad pre $m = 1$: ak sú f aj g v separovanom tvare $f(x_k) = f_k(x_k), 0 = g(x_k) = g_k(x_k) = 0$, potom definujeme $\frac{f'_k}{g'_k} = h_k$ a v lok. extréme platí $(\forall k) h_k(x_k) = \lambda$.

Príklady

Vždy treba vyšetriť aj hranicu a prípadné limity v nekonečne!

Analýza sa dobre kombinuje s viac high-level trikmi. Napr. derivácie + indukcia, prechod k lepším premenným + analýza, najprv odhad známou nerovnosťou a potom analýza, najprv analýza a potom odhad známou nerovnosťou, cyklické súčty všade kde sa dá…

Cvičenie 1. Zderivujte:

- $2x^3 + 4 + 4x - 7x^2$; aké majú korene?
- x^{x^x}
- $\frac{1}{(1-x)^n}$, k-krát
- $x(\ln x - 1)$
- $y = e^{2x}$, dvakrát; koľko je $y'' - 4y' + 4y$?
- $\tan x$

Cvičenie 2. Nájdite extrémy výrazov:

- $x + \frac{1}{x}$
- $\frac{\ln x}{x}$
- $\frac{x}{(1+x)^2}$
- $\cos x + \sin x$
- $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

Úloha 3. Pre každé $n \geq 2$ a ľubovoľné $x_k > 0; k = 1 \dots n$ dokážte $\sum_{k=1}^{n} x_k^k - kx_k + \binom{n}{2} \geq 0$.

(výberko 2013)

Úloha 4. Nájdite minimum a maximum výrazu $\frac{x^2-2x^2+3}{(x^2+1)^2}$.

(brilliant.org)

Úloha 5. Nájdite minimum výrazu $2a + b + c$ pre $a \geq 3, ab + bc + ca = 16$.

(KK MO A 2015)

Úloha 6. Pre $a \geq 1, a + b + c = 0$ nájdite minimum výrazu $\sum_{cyc} a^4 - 3abc$.

(výberko 2012)

Úloha 7. Pre $x + y + z = 12$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 54$ dokážte $9 \leq xy, yz, zx \leq 25$

(CK MO 2011)

Úloha 8. Pre $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$ dokážte nerovnosť $ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}$.

(TRiKS)

Úloha 9. Nájdite maximum výrazu $\frac{xy^2z^2}{x^5+y^5+z^5}$ pre $x, y, z > 0$.

(brilliant.org)

Úloha 10. Nájdite maximum výrazu $\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{(a+b+c)^3}$.

(brilliant.org)

Úloha 11. Pre $abc = 1$ dokážte nerovnosť $\sum_{cyc} \frac{1}{1+a+b} \leq 1$.

(TRiKS)

Úloha 12. Pre dané n, c a podmienku $\sum x_k^2 = c$ nájdite maximum a minimum výrazu $\sum kx_k^3$.

(brilliant.org)

Úloha 13. Pre $a, b, c > 0$ a $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$ dokážte $\sum_{cyc} \frac{1}{(2a+b+c)^2} \leq \frac{3}{16}$.

(IMO 2009 shortlist)

Úloha 14. Pre $a, b, c > 0$ nájdite minimum výrazu $\sum_{cyc} \left(a + \frac{1}{a}\right)^{10}$, ak:

a) $a + b + c = 1$
b) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

(brilliant.org)

Úloha 15. Pre $a, b, c \neq 1$ a $abc = 1$ dokážte nerovnosť $\sum_{cyc} \frac{a^2}{(a-1)^2} \geq 1$.

(IMO 2008)

Úloha 16. Pre $x_k \geq 1$ dokážte $\sum \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}}$.

(IMO 1998 shortlist)

Úloha 17. Pre $abc = 1$ dokážte nerovnosť $\sum_{cyc} \sqrt{9 + 16a^2} \geq 3 + 4(a + b + c)$.

(MEMO 2012)

Úloha 18. Nájdite všetky $p > 0$ také, že $\sqrt{a^2 + pb^2} + \sqrt{b^2 + pa^2} \geq a + b + (p-1)\sqrt{ab}$ platí pre všetky $a, b > 0$.

(CK MO 2013)

Úloha 19. Máme pravidelný $2n$-uholník s očíslovanými vrcholmi. Jeho vrcholy rozdelíme do n dvojíc a vrcholy v každej dvojici spojíme úsečkou tak, aby sa žiadne dve nepretli. Koľkými spôsobmi sa to dá spraviť?

(folklór)

Úloha 20. Máme n krabíc, každá obsahuje niekoľko kvetov rovnakej farby; rôzne krabice obsahujú kvety rôznych farieb. Koľkými spôsobmi vieme vybrať 21 kvetov, ak $n = 3$ a krabice obsahujú 23, 18 a 15 kvetov?

(Codeforces)

Hinty

Hint 3. Dokážte, že minimum funkcie $x^k - kx$ je $1-k$.
Hint 4. Nutná podmienka, všimneme si znamienko derivácie okolo extrémov alebo osobitne skontrolujeme limitu v $\pm\infty$.
Hint 5. L.M. na množine $a > 3$, zistíme že extrém neexistuje. Dosadíme $a = 3$ a zasa L.M.
Hint 6. Pre prípad $a \neq b \neq c$ zoberme konšt. b a $c = -a - b$, nutná podmienka + cyklická zámena a, b, c dá sústavu rovníc, ktoré vieme sčítať a využiť $a + b + c = 0$. ďalšie prípady (vrátane $a = 1$) idú podobne jednoducho.
Hint 7. Učebnicová úloha na Lagrangeove multiplikátory. Casework odpadá, lebo funkcie xy, yz, zx určite nadobúdajú maximum aj minimum.
Hint 8. Prechod k premenným $x = a + b, y, z \dots$; $\frac{\partial(ab+bc+ca)}{\partial x} = \frac{z+y-x}{2}$. L.M. dá $(s - 2x)x = \lambda$ pre $s = x + y + z$, dve premenné sú teda nutne rovnaké. Pre $y = z$ potom z $(2y - x)x = xy = \lambda$ dostaneme $y = x$.
Hint 9. Surovo umlátiť parc. deriváciami alebo dehomogenizácia (menovateľ = 1) a L.M.
Hint 10. Nutná podmienka. Lokálny extrém nie je maximum, treba vyšetriť hranicu (napr. $c = 0$).
Hint 11. Odhad zhora pomocou AG nerovnosti na $a + b$, prevedieme na separovaný tvar. L.M. dajú funkciu $h(x) = \frac{x}{(x+2)^2}$ pre $x = \sqrt{a}$, ktorá najprv rastie a potom klesá, preto búnv $a = c$; $h(a) = h(b)$ dá $a = b$ alebo $ab = 4$, čo stačí dosadiť do väzby.
Hint 12. L.M. dajú $kx_k = \lambda$, priamočiaro dosadíme za x_k a upravíme, vychádza taký škaredý výsledok $c^{3/2}\left(\sum \frac{1}{k^2}\right)^{-1/2}$. Alternatívou je $x_k = 0$ pre ľubovoľné (aj viac) k, čo ale nezlepší minimum.
Hint 13. Pridajme premennú $s = a+b+c$, L.M. fungujú dobre na ľavú stranu ako funkciu 4 premenných.
Hint 14. L.M. dajú $h(x) = 10\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$, v časti b) ešte delený $2x$. Derivovaním zistíme, že na $\mathbb{R}^+$ je rastúca, teda musí $a = b = c$.
Hint 15. L.M. dajú $h(x) = \frac{-2x^2}{(x-1)^3} = -2\lambda$. Dosadíme do nerovnosti zo zadania: $(a + b + c - 3) \geq \frac{1}{\lambda}$. Áko sa dá λ vyjadriť z $h(a)h(b)h(c)$? Akú podmienku dostaneme po ďalšom dosadení do nerovnosti zo zadania?
Hint 16. Ak držíme $\prod x_k$ konštantný, L.M. hovoria, že x_k sú rovnaké. Dá sa aj indukciou - ak sú x_k neklesajúce $\prod x_k$ konštantný a m x-iek je rovnakých, aká je derivácia podľa x_n?
Hint 17. L.M. dajú $h(x) = x - \frac{x^2}{1+x^2}$ pre $x = \frac{4a}{3}$, čo najprv rastie a potom klesá, preto búnv $a = c$. Dosadíme do povodnej nerovnosti, dvakrát roznásobíme, využijeme $b = \frac{1}{a^2}$ a prevedieme na $P(a) \geq 0$ pre vhodný polynóm P (5. stupňa). $P(1) = P'(1) = 0$, preto má P dvojnásobný koreň $a = 1$; po vydelení $(a-1)^2$ dostaneme polynóm s kladnými koeficientmi.
Hint 18. Derivujeme podľa p, dokážeme, že derivácia ≥ 0 pre $p = 3$ a že nerovnosť platí pre $p = 3$ (nerovnosť medzi priemermi na $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, potom stačí roznásobovať).
Hint 19. Catalánove čísla. Dosadením rekurencie vidíme súčin polynómov a kvadratickú rovnicu, oplatí sa derivovať $xf(x)$ namiesto $f(x)$.
Hint 20. Nech $c_{k,s}$ je počet spôsobov, ako vybrať s kvetov z prvých k krabíc a k-tá obsahuje p_k kvetov. Rekurenciu $c_{k,s} = \sum_{j=0}^{\min(p_k,s)} c_{k-1,s-j}$ popisuje súčin funkcií $\frac{1-x^{p_k+1}}{1-x}$. Hľadáme koeficient pri x^{21}, na čo treba rozvinúť $\frac{1}{(1-x)^n}$ Taylorom.

Obsah

p-valuace (Kuba Svoboda) 3
Hinty 7
Úlohy o cifrách (Martin „Vodka“Vodička) 8
Niečo na rozohriatie 9
Tak a teraz isto zvládnete aj toto 10
A niečo možno trocha ťažšie na záver 11
Hinty 13
Projektivní geometrie (Mirek Olšák) 15
Afinní pojmy 15
Projektivní pojmy 16
Kuželosečky 17
Dvě různá použití pro geometrii v rovině 17
Cvičení 17
Hinty 20
Zobecněná mocnost (Anh Dung „Tonda“Le) 21
Definice 21
Rozmyslete si 21
Lehké 22
Těžké 22
Jste borci? 23
Invarianty, monovarianty (Miro Psota) 24
Na navodenie atmosféry 24
Ideme na vec 25
Hinty 28
Kombinatorická geometrie a konvexita (David Hruška) 29
Rozcvička 29
Konvexní množiny 29
Snadné úlohy 30
Obtížnější úlohy 31
Velmi obtížné úlohy 32
Hinty 34
Combinatorial Nullstellensatz (Štěpán Šimsa) 36
Úvod 36
Příklady 37
Hinty 39
Derivácie, hľadanie extrémov (Jakub „Xellos“Šafin) 41
Taylorov rozvoj 42
Funkcie viacerých premenných 43
Viazané extrémy 44
Príklady 44
Hinty 47