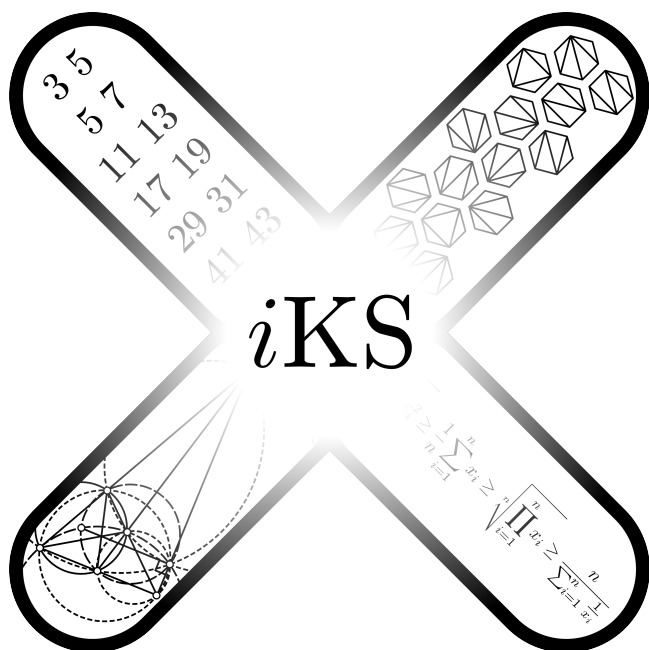




Kunžak 2014

SBORNÍK PŘÍSPĚVKŮ

AUTOŘI: Filip „Hiphop“ Hanzely, David Hruška, Mirek Olšák, Pepa Svoboda,
Jakub „Xellos“ Šafin, Štěpán Šimsa, Pepa Tkadlec, Martin „Vodka“ Vodička

EDITOR: Alexander „Olin“ Slávik

KOREKTOŘI: Bára Kociánová, Peter „πtr“ Korcsok, Kuba Krásenský, Lucka
Magurová, Helča Svobodová

Vydání první, náklad 25 výtisků

Březen 2014

Díky za pomoc všem, kterým je za co děkovat.

SCHUR A SOS

FILIP „HIPHOP“ HANZELY

ABSTRAKT. Príspevok obsahuje poznatky o Schurovej nerovnosti a úprave do tvaru SoS. Sú to jedny z najsilnejších zbraní na homogénne nerovnosti v troch premenných.

Definícia. Symetrickou sumou $\sum_{\text{sym}} x^a y^b z^c$ budeme označovať výraz

$$\sum_{\text{sym}} x^a y^b z^c = x^a y^b z^c + x^a y^c z^b + x^b y^a z^c + x^b y^c z^a + x^c y^b z^a + x^c y^a z^b.$$

Definícia. Cyklickou sumou $\sum_{\text{cyc}} x^a y^b z^c$ budeme označovať výraz

$$\sum_{\text{cyc}} x^a y^b z^c = x^a y^b z^c + x^b y^c z^a + x^c y^a z^b.$$

Definícia. Symetrickú sumu $\sum_{\text{sym}} x^a y^b z^c$ budeme tiež označovať $[a, b, c]$.

Veta (Muirheadova nerovnosť). *Majme prirodzené čísla a, b, c, d, e, f také, že $a \geq b \geq c, d \geq e \geq f$. Potom $[a, b, c] \geq [d, e, f]$ práve vtedy, keď $a + b + c = d + e + f, a \geq d, a + b \geq d + e$.*

Veta (Schurova nerovnosť). *Pre $a, b > 0$ platí $[a+2b, 0, 0] + [a, b, b] \geq 2[a+b, b, 0]$.*

Veta (Zovšeobecnená Schurova nerovnosť). *Majme reálne a, b, c, x, y, z , pričom $a \geq b \geq c$ a buď $x \geq y \geq z$, alebo $z \geq y \geq x$. Majme ďalej prirodzené k a funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, ktorá je konvexná alebo monotónna. Potom*

$$f(x)(a-b)^k(a-c)^k + f(y)(b-a)^k(b-c)^k + f(z)(c-a)^k(c-b)^k \geq 0.$$

Definícia. Výraz v premenných a, b, c je v tvare *SoS* (*Sum of Squares*), ak je zapísaný ako $S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(b-a)^2$, kde S_a, S_b, S_c sú nejaké výrazy v premenných a, b, c .

Veta. *Každá homogénna symetrická nerovnosť sa dá zapísať v SoS tvare.*

Veta (SoS). *Majme výraz $S = f(a, b, c) = S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2$. Ak platí aspoň jedna z podmienok:*

$$(1) \ S_a, S_b, S_c \geq 0,$$

- (2) $a \geq b \geq c$ a zároveň $S_b, S_b + S_c, S_b + S_a \geq 0$,
 (3) $a \geq b \geq c$ a zároveň $S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b \geq 0$,
 (4) $a \geq b \geq c$ a zároveň $S_c, S_a \geq 0, a^2S_b + b^2S_a \geq 0$,
 (5) $S_a + S_b + S_c \geq 0$ a zároveň $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$,

potom $S \geq 0$.

Tvrdenie. Úprava do SoS:

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{\text{cyc}} (b-c)V_a &= \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} (b-c)((V_a - V_b) + (V_a - V_c)), \\ \bullet \sum_{\text{cyc}} (a-b)(a-c)V_a &= \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (b-c)^2(V_b + V_c - V_a). \end{aligned}$$

Vo všetkých úlohách bude platiť $a, b, c \geq 0$.

ZAŤAŤ ZUBY A IDE SA DO TOHO.

Roznásobte si

Úloha 1.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2 + bc + c^2} \geq 2$$

(Vasile Cirtoaje)

Úloha 2.

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{a^2 - ac + c^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq 3 \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

Úloha 3.

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

pričom $abc = 1$.

(IMO 1995)

Robte, ako chcete

Úloha 4. Upravte do SoS tvaru:

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{\text{sym}} a^2b &\geq 6abc, \\ \bullet \sum_{\text{cyc}} a^2b &\geq 3abc, \\ \bullet \sum_{\text{cyc}} a^3 &\geq 3abc, \end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 b}{c} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Úloha 5.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Úloha 6.

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c}$$

Úloha 7.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{b^2 + c^2 + 3a^2} \leq \frac{3}{5}$$

(Vietnam)

Úloha 8.

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 4 \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 13$$

Úloha 9.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a+b}{4a+4b+c} \leq \frac{2}{3}$$

Úloha 10.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{ab+a^2+b^2} \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{2a+c}$$

(Mediterranean MO 09)

Úloha 11.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} \geq 2$$

(Pham Kim Hung)

Úloha 12.

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

(Irán 1996)

Úloha 13.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2+bc}{b^2+c^2} \geq \frac{9}{2}$$

(Vasile Cirtoaje)

Úloha 14.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + 2bc}{b + c} \geq \frac{3(a + b + c)}{2}$$

(Vasile Cirtoaje, MS, 2005)

Úloha 15.

$$3(a^3 + b^3 + c^3 + abc) \geq 4(a^2b + b^2c + c^2a)$$

(Ukrajina, 2006)

Úloha 16.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b + c} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Úloha 17.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2 + 5bc}{(b + c)^2} \geq \frac{21}{4}$$

(Vasile Cirtoaje, MS, 2005)

Úloha 18.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2 + (2r + 1)bc}{b^2 + rbc + c^2} \geq \frac{3(2r + 3)}{2r}$$

pričom $r \geq -1$.

(Vasile Cirtoaje, MS, 2005)

Úloha 19.

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq \sum_{\text{cyc}} bc\sqrt{2(b^2 + c^2)}$$

Úloha 20. Nájdite najväčšie také k , aby platilo:

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b + c} \right) + k \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq k + \frac{3}{2}$$

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. Dá sa to zjednodušiť rozšírením zlomkov o $b - c$ a pod.

Hint 2. Prvý zlomok naľavo rozšírime o $b + c$ a podobne. Ďalej roznásobíme.

Hint 3. Najprv homogenizujeme. Shur s Muirheadom dajú, čo chceme.

Hint 4. Prvá ide ľahko, na druhú použite tvrdenie o úprave do SoS, v trojke využite $a^3 - abc = (a^3 - a^2b) + (a^2b - abc)$ a poslednú najprv dokážte cez AG.

Hint 5. Dá sa to roznásobiť alebo popárovať $\frac{a^2}{b+c}$ s $\frac{a}{2}$ a zoSoSovať.

Hint 6. Porovnajte obe strany s $\frac{3}{2}$.

Hint 7. Odrátajte od každého zlomku $\frac{1}{5}$. Využite tvrdenie o úprave do SoS.

Hint 8. Od prvého výrazu odrátajte 9 a od druhého 4.

Hint 9. Odrátajte od každého zlomku $\frac{2}{9}$. Využite tvrdenie o úprave do SoS.

Hint 10. Porovnajte obe strany s 1.

Hint 11. Odhadnite výrazy naľavo a zoSoSujte. Nakoniec využite druhé kritérium zo SoS vety.

Hint 12. Substituujeme $x = a + b$ a podobne. Využite štvrté kritérium SoS. Dá sa to aj roznásobením.

Hint 13. Rozdeľte $\frac{3}{2}$ medzi zlomky naľavo. Úprava do SoS je už hračka. Pomocou vety o SoS to doklepnite.

Hint 14. Odrátajte $\frac{3(b+c)}{4}$ od zlomkov naľavo. Úprava do SoS je už hračka. Pomocou vety o SoS to doklepnite.

Hint 15. Upravte pomocou tvrdenia o úprave do SoS. Je to cyklické, a preto to bude škaredé. Inak to čo vždy.

Hint 16. Vynásobte 2-kou a potom porovnajte obe strany so $\sum a$. Dokončiť to je tufka.

Hint 17. Odrátajte $\frac{7}{4}$ od zlomkov naľavo. Upravte to a vo vhodnej chvíli zvoľte substitúciu $x = b + c$ a pod., tým sa to dosť zjednoduší. Následne využite druhú časť vety SoS.

Hint 18. Vyrátajte predchádzajúcu úlohu.

Hint 19. Po úprave do SoS odhadnite odmocninu. Inak to čo vždy.

Hint 20. Rozdeľte a upravte. Vyjde $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

LITERATÚRA

- [1] Vasile Cirtoaje: *Algebraic Inequalities – Old and New Methods*, GIL, 2006.
- [2] Pham Kim Hung: *Squares Analysis Method*.
- [3] Rolínek, Šalom: seriál *Nerovnosti*, MKS 29. ročník, 2009/2010.

LINEÁRNÍ ALGEBRA V KOMBINATORICE

DAVID HRUŠKA

ABSTRAKT. V první části příspěvek zavádí některé základní pojmy lineární algebry a vyslovuje o nich fundamentální tvrzení. Ukazuje se totiž, že je možné je s překvapivým úspěchem aplikovat na řešení rozličných úloh středoškolské matematiky, zejména kombinatoriky. Druhá část příspěvku obsahuje úlohy vhodné k aplikaci technik předvedených na přednášce a hinty k nim. K dalšímu studiu doporučuji texty uvedené v seznamu literatury, zejména pak [1], kde lze nalézt většinu uvedených úloh.

Začneme definicemi pojmů *těleso* a *vektorový prostor*:

Definice. Množinu $\mathbb{T}$ spolu s binárními operacemi „+“ a „ $\cdot$ “ a „význačnými prvky“ 0 a 1 nazveme (*komutativním*) *tělesem*, pokud pro všechna $x, y, z \in \mathbb{T}$ platí následující vztahy:

- (1) $x + y = y + x \in \mathbb{T}$,
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (3) $x + 0 = x$,
- (4) $x \cdot y = y \cdot x \in \mathbb{T}$,
- (5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- (6) $x \cdot 1 = x$,
- (7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
- (8) existuje prvek $-x \in \mathbb{T}$ takový, že $x + -x = 0$,
- (9) je-li $x \neq 0$, pak existuje prvek $x^{-1} \in \mathbb{T}$ takový, že $x \cdot x^{-1} = 1$.

Poznámka. Někdy se přidává „axiom netriviality“: (10) $0 \neq 1$.

Běžnými tělesy jsou například racionální, reálná či komplexní čísla (se standardními operacemi); jiným příkladem jsou tělesa $\mathbb{Z}_p$ pro p prvočíslo, kde se sčítá a násobí modulo p . Z uvedených axiomů snadno plynou všechny aritmetické „pravdy“, viz cvičení.

Cvičení 1. Rozmyslete si, že $\mathbb{Z}_n$ s modulárními operacemi je těleso, právě když n je prvočíslo.

Cvičení 2. Dokažte:

- (1) Inverzní i opačný prvek v tělese $\mathbb{T}$ jsou určeny jednoznačně.

- (2) Pro každé $x \in \mathbb{T}$ platí $x \cdot 0 = 0$.
- (3) Pro každé $x \in \mathbb{T}$ platí $x \cdot (-1) = -x$.

Definice. Nechť $\mathbb{T}$ je těleso, V množina, $\mathbf{o}$ její prvek, „+“: $V \times V \rightarrow V$ a „ $\cdot$ “: $\mathbb{T} \times V \rightarrow V$ binární operace takové, že pro všechna $a, b \in \mathbb{T}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí:

- (1) $\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}$,
- (2) existuje $-\mathbf{v} \in V$ takový, že $\mathbf{v} + -\mathbf{v} = \mathbf{o}$,
- (3) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,
- (4) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$,
- (5) $a \cdot (b \cdot \mathbf{u}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{u}$,
- (6) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$,
- (7) $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$,
- (8) $(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$.

Pak čtveřici $(V, +, \cdot, \mathbf{o})$ nazveme *vektorovým prostorem nad $\mathbb{T}$* . Prvky V se nazývají *vektory*, prvky $\mathbb{T}$ se nazývají *skaláry*.

Cvičení 3. Dokažte analogie tvrzení z minulého cvičení pro vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

Pokud si vezmeme uspořádané n -tice prvků z tělesa $\mathbb{T}$ a jako operace použijeme ty z $\mathbb{T}$ prováděné po složkách, dostaneme tzv. *aritmetický vektorový prostor*. Například z reálných čísel tak dostaneme eukleidovské prostory $\mathbb{R}^n$. Jinými příklady jsou např. prostor všech posloupností prvků $\mathbb{T}$ či obecněji prostor všech funkcí z nějaké množiny M do $\mathbb{T}$.

Cvičení 4. Ověřte, že polynomy stupně nejvýše $n \in \mathbb{N}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

V následujícím bude vždy $\mathbf{V} = (V, +, \cdot, \mathbf{o})$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$.

Definice. Je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor, $W \subseteq V$ a pro libovolná $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ a $a, b \in \mathbb{T}$ platí $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in W$, říkáme, že $\mathbf{W}$ (W s operacemi z $\mathbf{V}$) je *podprostorem $\mathbf{V}$* .

Dostáváme se k pro nás klíčovým pojmům *lineární (ne)závislost* a *generování*:

Definice. Nechť $X \subseteq V$. Množinu

$$\langle X \rangle = \{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \mid a_i \in \mathbb{T}, \mathbf{v}_i \in X\}$$

nazýváme *lineárním obalem X* . Pokud platí $\langle X \rangle = V$, řekneme, že X *generuje $\mathbf{V}$* .

Poznámka. Lineární obal X je množina všech *lineárních kombinací* vektorů z X . Snadno se nahlédne, že je to nejmenší podprostor $\mathbf{V}$, který obsahuje X .

Definice. Nechť $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}\}$ je konečná. Pokud platí, že kdykoliv $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{T}$ splňují $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$, pak již $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, říkáme, že je M *lineárně nezávislá*. V opačném případě je *lineárně závislá*.

Cvičení 5. Máme skupinu aritmetických vektorů se složkami 0 a 1. Dokažte, že je-li tato skupina lineárně nezávislá nad $\mathbb{Z}_p$, je lineárně nezávislá nad $\mathbb{Q}$.

Cvičení 6. Dokažte, že skupina aritmetických vektorů s racionálními složkami je lineárně nezávislá nad $\mathbb{Q}$ právě když je lineárně nezávislá nad $\mathbb{R}$.

Definice. Množinu $B \subseteq V$, která je současně lineárně nezávislá a generuje $\mathbf{V}$, nazveme *bází* $\mathbf{V}$.

Cvičení 7. Dokažte, že množina $B \subseteq V$ je bází $\mathbf{V}$ právě tehdy, když každý vektor z V lze jednoznačně zapsat ve tvaru $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k$, kde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in B$ a $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{T}$.

Tvrzení. Každý vektorový prostor má nějakou bázi. Všechny báze daného vektorového prostoru mají stejnou velikost – toto číslo nazýváme *dimenzí* prostoru a značíme $\dim \mathbf{V}$.

Cvičení 8. Vzpomeňme si na prostor polynomů stupně nejvýše n . Najděte nějakou jeho bázi. Jaká je jeho dimenze?

Cvičení 9 (těžší). Máme tabulku $m \times n$ reálných čísel (drsníci mají reálnou matici typu $m \times n$). Když se podíváme na řádky jako na aritmetické vektory $\mathbf{v}_i$ nad $\mathbb{R}$, můžeme označit $D_1 = \dim(\bigcup \mathbf{v}_i)$ dimenzi jimi generovaného prostoru. Podobně definujeme D_2 pro sloupce. Dokažte, že $D_1 = D_2$.

Tvrzení (zásadní). Množina více než n vektorů v prostoru dimenze n je lineárně závislá. Pro každou množinu méně než n vektorů existuje vektor mimo její lineární obal.

Definice. Skalární součin vektorů $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n$ definujeme jako

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n.$$

Pozorování. Skalární součin se chová lineárně.

ÚLOHY

Lineární (ne)závislost, generování, báze

Úloha 1. V obdélníkovém sále s r řadami po s sedadlech ($r > s$) na některá místa usedli lidé. Dokažte, že můžeme vybrat $k \geq 1$ řad tak, aby v každém sloupce sedadel byl počet lidí sedících ve vybraných řadách sudý.

Úloha 2. V tabulce 5×5 jsou zapsána celá čísla. Je dovoleno vybrat libovolný čtverec 3×3 nebo 2×2 a zvětšit v něm všechna čísla o 1. Je vždy možné postupným prováděním těchto operací dostat tabulku, v níž jsou všechna čísla dělitelná 2011?

Úloha 3. Nechtě $a_1, a_2, \dots, a_5, b_1, b_2, \dots, b_5$ jsou ne nutně různá čísla z množiny $\{1, \dots, 10\}$ taková, že $a_i \geq b_i$ pro $i \leq 5$. Dokažte, že potom existují celá čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ ne všechna nulová taková, že

$$\binom{a_1}{b_1}^{\alpha_1} \binom{a_2}{b_2}^{\alpha_2} \binom{a_3}{b_3}^{\alpha_3} \binom{a_4}{b_4}^{\alpha_4} \binom{a_5}{b_5}^{\alpha_5} = 1.$$

Úloha 4. V řadě je N žárovek očíslovaných postupně 1 až N . Krokem rozumníme přepnutí tří žárovek, jejichž čísla a, b, c splňují $a + c = 2b$. Určete všechna N , pro něž lze konečnou posloupností kroků všechny žárovky zhasnout nezávisle na jejich počátečním stavu. (C5, 1. ročník iKS)

Úloha 5. Nechtě $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ jsou po dvou různé podmnožiny množiny $M = \{1, \dots, n\}$. Dokažte, že pro nějaké $1 \leq k \leq n$ jsou množiny $A_i \setminus \{k\}$ také po dvou různé.

Úloha 6. Přirozená čísla k, n splňují $k < n$ a $S = \{1, \dots, n\}$. Nechtě $A_1, \dots, A_k$ jsou neprázdné podmnožiny S . Dokažte, že je možné obarvit některé prvky S dvěma barvami, červenou a modrou, tak, aby byly splněny následující podmínky:

- každý prvek S je buď neobarvený, nebo je obarvený červeně, nebo je obarvený modře,
- alespoň jeden prvek S je obarvený,
- každá z množin A_i ($i \leq k$) je buď celá neobarvená, nebo se v ní vyskytuje alespoň jeden prvek od obou barev. (VJIMC 2009)

Úloha 7 (Lindströмова věta, „baby“ verze). Jsou-li $A_1, \dots, A_m$ podmnožiny množiny $\{1, \dots, n\}$ a $m > n$, pak existují dvě disjunktní množiny $I_1, I_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$ (z nichž je alespoň jedna neprázdná) takové, že

$$\bigcup_{i \in I_1} A_i = \bigcup_{i \in I_2} A_i.$$

Úloha 8 (Lindströмова věta). Je-li navíc v předchozí úloze $m > n + 1$, pak můžeme navíc požadovat, aby platilo

$$\bigcap_{i \in I_1} A_i = \bigcap_{i \in I_2} A_i.$$

Skalární součín

Úloha 9. V *Licho-sudém* městě žije n lidí a existuje m klubů takových, že každý z nich má lichý počet členů a každé dva různé mají sudý počet společných členů. Dokažte, že $m \leq n$.

Úloha 10. Ve městě žije n lidí a existuje m filmových klubů $F_1, \dots, F_m$ a m divadelních klubů $D_1, \dots, D_m$ takových, že $2 \mid |F_i \cap D_j| \Leftrightarrow i \neq j$. Dokažte, že $m \leq n$.

Úloha 11. Nechť p je prvočíslo. Ve městě žije n lidí a existuje m klubů $K_1, \dots, K_m$ takových, že $p^k \mid |K_i \cap K_j| \Leftrightarrow i \neq j$. Dokažte, že $m \leq n$.

Úloha 12. Dokažte, že $m \leq n$ i v *Sudo-lichém* městě. Ukažte, že pro liché n může nastat rovnost.

Úloha 13. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé a $A_1, \dots, A_n \subseteq \{1, \dots, n\}$ mají všechny sudý počet prvků. Dokažte, že existují dvě různá čísla $1 \leq i, j \leq n$ taková, že $A_i \cup A_j$ má také sudý počet prvků.

Úloha 14 (Fisherova nerovnost). V rybářské vesnici žije n rybářů, kteří tvoří m odborových sdružení. Každá dvě sdružení sdílí přesně k členů. Dokažte, že $m \leq n$.

Prostor kružnic

Úloha 15. Souvislý graf má 100 vrcholů a 1000 hran. Kolika způsoby můžeme nějaké hrany vyhodit tak, aby každý vrchol výsledného grafu měl sudý stupeň?

Úloha 16. Graf G má 10 vrcholů (žádný izolovaný) a 15 hran. Olin má 8 kružnic (podgrafů G) a tvrdí, že z nich umí „slepit“ libovolný podgraf G , jehož vrcholy mají všechny sudé stupně („slepením“ dvou grafů vznikne graf, jehož množina hran je symetrickým rozdílem množin hran původních grafů). Dokažte, že G má nejvýše tři komponenty.

Polynomy

Úloha 17. Rozhodněte, zda existují reálné polynomy $a(x)$, $b(x)$, $c(y)$, $d(y)$ takové, že

$$1 + xy + x^2y^2 \equiv a(x)c(y) + b(x)d(y).$$

(Putnam 2003 B1)

Úloha 18. Nechť $P(x)$ je nenulový reálný polynom. Dokažte, že existuje nenulový polynom $Q(x)$ takový, že polynom $R(x) = P(x)Q(x)$ má nenulové koeficienty pouze u členů s prvočíselnými exponenty.

Ostatní

Úloha 19. Sedm trpaslíků po šestnáct dnů pracovalo následujícím způsobem:

- každý trpaslík celý den kutal stříbro, nebo sbíral maliny
- pro každé dva dny platí, že během nich alespoň tři trpaslíci dělali obojí
- první den všichni kutali stříbro

Dokažte, že některý den všichni trpaslíci sbírali maliny. (EGMO 2013/6)

Úloha 20. Je dán graf a v každém vrcholu rozsvícená žárovka. V jednom tahu můžeme vybrat jeden vrchol a přepnout žárovku v něm a ve všech vrcholech s ním spojených hranou. Dokažte, že můžeme konečným počtem tahů všechny žárovky zhasnout.

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. Vhodně reprezentujte sál a využijte nerovnost.

Hint 2. Kolik máme (vhodně zvolených) vektorů? Vida, takže to vyjde těsně, nebo...

Hint 3. Zvolte si lišácky vektorový prostor.

Hint 4. Pro kolik nejméně žárovek už nagenrujete vše? Pak použijte indukci.

Hint 5. Napište si do tabulky charakteristické vektory. Není tam nějak moc sloupců? Vyjádřete jeden pomocí ostatních a zahodte ho.

Hint 6. Udělejte si tabulku charakteristických vektorů nad $\mathbb{Q}$ a podívejte se na ni pootočeně. V lineární kombinaci máte kladné a záporné koeficienty.

Hint 7. Závislost charakteristických vektorů jste jistě prokoukli, teď už jen nějakou souvislost se sjednocením. Vzpomeňte si na úlohu 6.

Hint 8. Ke standardním charakteristickým vektorům přilepte ještě „inverzní“. Jaká je dimenze vzniklého prostoru? Převeďte průniky na sjednocení a zopakujte postup z „baby“ verze.

Hint 9. Dokažte, že charakteristické vektory jsou nezávislé. Za tímto účelem skalárně vynásobte příslušnou rovnost s libovolným charakteristickým vektorem.

Hint 10. Analogie předchozí úlohy.

Hint 11. Zkuste pracovat nad nějakým vhodnějším tělesem.

Hint 12. Šikovně využijte tvrzení úlohy 9.

Hint 13. Sporem. Mohou být charakteristické vektory nezávislé? Pak použijte standardní trik se skalárním součinem a najděte nějaký pěkný spor.

Hint 14. Chceme nezávislost, zkusme nějaký jiný násobící trik se skalárním součinem a lineární kombinací.

Hint 15. Počet způsobů je roven počtu příslušných podgrafů. Zobecněte vzoreček z přednášky, vyjde 2^{901} .

Hint 16. Kružnic musí být alespoň tolik jako dimenze příslušného prostoru kružnic. Zobecněte vzoreček z přednášky.

Hint 17. Ne, sporem. Vhodným dosazením za y dostanete na levé straně lineárně nezávislé polynomy v x . A co na to pravá strana?

Hint 18. Představte si $P(x)$ a $R(x)$ vektorově. Jak vypadají polynomy $x^k P(x)$ a jak je to s jejich (ne)závislostí? Najděte dost dlouhý „úsek nenulových exponentů“, kam se vejde hodně vektorů typu $x^k P(x)$ i hodně „prvočíselných“ polynomů/vektorů.

Hint 19. Každý den reprezentujte sedmisložkovým vektorem nad $\mathbb{Z}_2$. Co říkají podmínky ze zadání? Zbytek už musíte vymyslet :-)

Hint 20. Udělejte si tabulku $n \times n$ (sloupce jsou vypínače, řádky žárovky) podle toho, co co přepíná. Chcete nakombinovat sloupce na samé jedničky. To vypadá jako nějaká soustava, ne? A co se nesmí stát, aby soustava měla řešení? Na zbytek použijte vlastnosti tabulky odvozené z grafu.

REFERENCE

- [1] László Babai, Péter Frankl: *Linear algebra methods in combinatorics*, Dept. Comput. Sc., University of Chicago, 1992, Preliminary version 2
- [2] Jiří Matoušek: *Šestnáct miniatur*
- [3] Jiří Matoušek: *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, American Mathematical Society
- [4] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum 2010

SLABÉ FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

MIREK OLŠÁK

ABSTRAKT. Příspěvek ukazuje množinově teoretický pohled a nástroje, které umožní sestavit řešení příliš „slabých“ funkcionálních rovnic.

SKOKY PO REÁLNÝCH ČÍSLECH

Úloha 1. Určete, zda existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x \in D_g$ rovnici $f(f(x)) = g(x)$, kde

- (a) $g(x) = x + 1$,
- (b) $g(x) = 2^x$,
- (c) $g(x) = x^2 + c$, kde $c > 1/4$,
- (d) $g(x) = \sin(x)$,
- (e) $g(x) = x^2 + c$, kde $c \in \langle 0, 1/4 \rangle$,
- (f) $g(x) = 1/|x - 3|$,
- (g) $g(x) = x^2 + c$, kde $c < 0$, ale složení $g(g(x))$ má pouze dva pevné body,
- (h) $g(x) = x^2 + c$, kde složení $g(g(x))$ má pouze více než dva pevné body,
- (i) $g(x) = \operatorname{tg}(x)$.

Úloha 2. Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$f(x) = f(x + y^2 + f(y)).$$

Úloha 3. Pro dané $n \in \mathbb{N}$ popište všechny funkce f takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f^n(x) = \frac{x}{x+1},$$

kde symbolem f^n myslíme složení funkce f samy se sebou n -krát.

Úloha 4. Ukažte, že existují takové dvě periodické funkce f, g , aby pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platilo $f(x) + g(x) = x$. Na druhou stranu ukažte, že funkci x^2 není možné zapsat jako součet dvou periodických funkcí.

Úloha 5. Ukažte, že existují takové tři periodické funkce f, g, h , aby pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platilo $f(x) + g(x) + h(x) = x^2$. Obecně, kolik nejméně je potřeba periodických funkcí, aby jejich součtem mohl být daný polynom p ?

Úloha 6. Uvažme funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující funkcionální rovnici

$$f(f(x)) = f(x) + 2x.$$

- (a) Najděte všechny takové lineární funkce.
- (b) Najděte nějakou nelineární takovou funkci.
- (c) Existuje funkce, která splňuje zadanou rovnici a navíc $f(1) = -2$?
- (d) Existuje funkce, která splňuje zadanou rovnici a navíc $f(2) = 1$?
- (e) Existuje funkce, která splňuje zadanou rovnici a navíc $f(2) = -1$?

CAUCHYHO ROVNICE A KAMARÁDI

Tato kapitola se zabývá následující slavnou úlohou, která se nazývá Cauchyho rovnici.

Úloha 7. Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vyhovující funkcionální rovnici

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Po chvíli hraní si s úlohou shledáváme, že z Cauchyho rovnice plyne

$$f(kx) = kf(x)$$

pro celá a posléze racionální čísla k .

Nabízí se tedy řešení $f(x) = xf(1)$ – všechny takové funkce splňují Cauchyho rovnici, ovšem není zatím jasné, zda existují i další. Cauchyho rovnice totiž „neumí dobře postihnout chování v iracionálních bodech“. K dokončení řešení je třeba si zavést pojem báze.

Definice. *Bází* lineárního prostoru $\mathbb{R}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ rozumíme nějakou množinu $B \subset \mathbb{R}$ takovou, že pro každé reálné číslo x existuje jednoznačně určená konečná podmnožina $C \subset B$ a (stále jednoznačná) sada nenulových racionálních koeficientů $k_c \in \mathbb{Q}$ indexovaných prvky C , že platí

$$x = \sum_{c \in C} k_c c.$$

Věta. *Existuje báze lineárního prostoru $\mathbb{R}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.*

Exaktní důkaz věty neuvádíme, jelikož by vyžadoval další pojmy z teorie množin. Ve skutečnosti příslušný důkaz ale není nic jiného než vystartováním s prázdnou množinou B a iterování kroku: „Dokud existuje číslo x , které není vyjádřitelné jako součet pronásobených prvků B , přidej x do B .“ Tento krok provedeme nespočetně mnohokrát, ale přitom „postupně“ (to jsou ty teoreticko-množinové finty). Přitom je vidět, že jsme si bázi mohli volit skoro „jakkoli“.

Jakmile máme bázi B , můžeme doklepnout Cauchyho rovnici.

Pozorování. *Kdykoli máme jakoukoli funkci $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, můžeme tuto funkci jednoznačným způsobem rozšířit na celé $\mathbb{R}$ tak, aby výsledná funkce byla řešením Cauchyho rovnice.*

Předchozí pozorování je možné považovat za popis všech řešení Cauchyho rovnice. Například z něj plyne, že „počet“ (mohutnost) řešení Cauchyho rovnice je stejný jako „počet“ všech funkcí, tedy že těch řešení je „fakt hodně“ :-)

Úloha 8. Najděte nelineární funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy+1).$$

Úloha 9. Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

Úloha 10. Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(x+y)(f(x) + f(y)) = f(x)f(y).$$

Úloha 11. Nalezněte všechny dvojice funkcí $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f(y) = g(x+y).$$

Úloha 12. Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x+y)) = f(x) + f(y).$$

Úloha 13. Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y.$$

Úloha 14. Ukažte, že existuje funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xf(y)) = f(x)/y.$$

Úloha 15. Existuje jiná než nulová a identická funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje $f(xy) = f(x)f(y)$ a současně Cauchyho rovnici?

Úloha 16. Existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje následující dvě podmínky?

- Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $f(2x) = f(x) + 1$,
- Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(y)$ nebo $f(x) = f(x+y)$ nebo $f(y) = f(x+y)$.

Úloha 17. Existuje nelineární funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ následující rovnici?

$$f(x+y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1.$$

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. (a) Snadno i explicitně popíšeme, (b) g je prostá, (c) g je prostá na $\langle 0, \infty \rangle$, (d) g je prostá na $\langle -1, 1 \rangle$, (e) g je prostá na $\langle 0, \infty \rangle$ a má jeden pevný bod, (f) neexistuje (jeden ze dvou případů) – stačí spočítat dvojcykly a čtyřcykly funkce g , (g) g nemá (krom pevných bodů) žádný cyklus, pouze napojující se nekonečné větve. (h) Neexistuje – právě jeden dvojcyklus. (i) Každé číslo má nekonečně spočetně vzorů, takže existuje jen spočetně typů komponent orientovaného grafu funkce g – podle velikosti cyklu (či dvě varianty bez cyklu). Pak stačí ukázat, že každý tento typ je reprezentovaný nekonečně-krát, případně (jednodušeji) využít děr v definičním oboru funkce tg jakožto spočetně mnoha bodů pro manévrování.

Hint 2. Má pouze jedno (a to dokonce „obyčejné“) nekonstantní řešení.

Hint 3. Jednu takovou funkci je možné snadno explicitně napsat. Pro všechna řešení si stačí uvědomit, že funkce $\frac{x}{x+1}$ je prostá a počet bodů mimo obor hodnot není konečný.

Hint 4. (a) Volte nesoudělné periody p, q a čísla tvaru $pn + qm$ pro celá m, n si nakreslete do mřížky. Ostatní čísla pokryjete „posouváním“ této mřížky. (b) Ukažte, že pro nějaké r musí být $x^2 - (x - r)^2$ periodická.

Hint 5. Je vždy potřeba nejméně $n + 1$ periodických funkcí, kde n je stupeň polynomu p . Jak důkaz minimality, tak konstrukci provedete indukcí (konstrukci si opět představujte s mřížkou).

Hint 6. (a) Kvadratická rovnice dá dvě řešení. (b) Stačí například nakombinovat předchozí dvě funkce na racionální / iracionální čísla. (c) Ne. (d) Pokud si navíc stanovíme $f(-2) = -1$, vynutí nám rovnice funkční hodnoty na množině symetrické podle nuly. Na zbytku je možné stanovit $f(x) = -x$. (e) Každé podmínice, která nevede ke sporu jako v případě c, lze vyhovět. Stačí pro funkční hodnoty „plýtvat“ spočetně mnoha lineárně nezávislými reálnými čísly.

Hint 8. Po substituci vyhovuje libovolné řešení Cauchyho rovnice.

Hint 9. Substitucí $f(x) = g(x) + x^2/2$.

Hint 10. Substitucí $f(x) = 1/g(x)$.

Hint 11. Volbou $x = 0, y = x + y$ převedete na Cauchyho rovnici pro f . Řešením budou všechny řešení Cauchyho rovnice plus konstanta.

Hint 12. Volbou $x = 0, y = x + y$ převedete na Cauchyho rovnici pro f . Řešení opět budou moci být posunutá o konstantu, avšak nyní musí splňovat, že na obrazu je f identická – tedy je „projekcí na podprostor“.

Hint 13. Funkce musí splňovat Cauchyho rovnici a navíc být sama k sobě inverzní. Takové funkce je možné popsat jako rozšíření bijekce $B \rightarrow B$, která je sama k sobě inverzní, avšak pro různé funkce může být báze B různá.

Hint 14. Po nahrazení sčítání za násobení máme Cauchyho rovnici, která musí navíc splňovat $f(f(x)) = -x$. K tomu použijeme podobných myšlenek jako v úvodních úlohách.

Hint 15. Ne, skutečnost $x^2 \geq 0$ vynutí monotonii.

Hint 16. Ano. Pro $q \in \mathbb{Q}$ vynutí rovnice $f(qx) = v_2(q)f(x)$, kde v_2 značí 2-valuaci. Při popisu funkce využijte rozkladu čísla na součet násobků báze.

Hint 17. Ne. 1) Substitucí převedte na $g(x+y) - g(x) - g(y) = g(x)g(y) - g(xy)$ – kdyby existovalo řešení předpředchozí úlohy, máme i téhle, ale to neexistuje. 2) Ukažte, že $g(1)$ je rovno 1, 0 nebo -1 , případ $g(1) = 0$ vynutí nulovou g , případ $g(1) = -1$ dovedte do sporu (pomocí hodnot v $k/2$). 3) Postupně ukažte, že pro $k \in \mathbb{Z}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x+k) = g(x) + k$, $g(kx) = kg(x)$, $g(x^2) = g(x)^2$, tedy pro $x \geq 0$ je $g(x) \geq 0$. 4) Pomocí předchozích vzorců dovedte $g(x) \neq x$ do sporu.

DIOFANTOVSKÉ ROVNICE

PEPA SVOBODA

ABSTRAKT. Příspěvek shrnuje základní metody řešení diofantických rovnic a částečně se dotýká pokročilejších metod, využívajících některých poznatků z algebry. Obsahuje také 29 poměrně obtížných úloh.

Diofantovská rovnice je rovnice, kterou řešíme v přirozených, celých (nebo racionálních) číslech. Obecně je řešení Diofantovských rovnic velmi obtížné a neexistuje na ně žádná univerzální metoda, proto jsou také častým a oblíbeným tématem na matematických soutěžích. Pro jejich řešení je třeba mít dobrý všeobecný přehled v teorii čísel.

ROZKLADY

První užitečnou metodou je rozklad na součin. Často se hodí vtipné algebraické úpravy.

Úloha 1. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$. (IMO 2006)

Úloha 2. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$.
(Titu Andreescu)

Úloha 3. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$. (Titu Andreescu)

NEROVNOSTI

Tvrzení (Sevření mocninami). *Nechť a a n jsou přirozená, $n \geq 2$. Pak neexistuje $b \in \mathbb{N}$ takové, že*

$$a^n < b^n < (a + 1)^n.$$

Úloha 4. V $\mathbb{N}$ řeš rovnici $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$. (MO 59-A-II-1)

Úloha 5. V $\mathbb{N}$ řeš rovnici $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z - 1) + 2y(z + 1) = w^2$.

Občas je prostě „pravá strana větší než levá“.

Úloha 6. V $\mathbb{Z}$ řeš $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Úloha 7. V $\mathbb{N}$ řeš

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2.$$

Úloha 8. Najdi všechna přirozená n a $k_1, k_2, \dots, k_n$ taková, že

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 5n - 4,$$

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

PARAMETRIZACE

Úloha 9. Dokaž, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{Z}$. (Turnaj měst)

Úloha 10. Dokaž, že rovnice $2^x + 3 = xy$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{N}$.

POČÍTÁNÍ MODULO

Úloha 11. Najdi všechny dvojice p, q prvočísel, která splňují $p^5 - q^3 = (p + q)^2$. (Ruská MO)

Úloha 12. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $x^5 - y^2 = 4$. (Balkánská MO)

NEKONEČNÝ SESTUP

Tvrzení. *Neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel.*

Hodí se, když chceme dokázat, že rovnice nemá řešení. Pokud by nějaké měla, zkonstruujeme menší řešení, čímž dostaneme klesající posloupnost přirozených čísel.

Úloha 13. Řeš v $\mathbb{N}_0$ rovnici $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Úloha 14. Řeš v $\mathbb{N}_0$ rovnici $2^x - 1 = xy$. (variacie na Putnam)

Úloha 15. Najdi minimální hodnotu výrazu $m^2 + n^2$, kde m, n jsou přirozená čísla menší nebo rovna 1981 splňující $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$. (IMO 1981)

INDUKCE

Poněkud překvapivě může být užitečná i indukce.

Úloha 16. Dokaž, že pro každé $n \geq 3$ má rovnice $7x^2 + y^2 = 2^n$ řešení v $\mathbb{N}$. (Bulharská MO)

Úloha 17. Dokaž, že pro každé přirozené n má rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 59^n$ řešení v $\mathbb{N}$. (Dorin Andrica)

Úloha 18. Dokaž, že pro každá přirozená k a n má rovnice

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = (1 + 1/m_1)(1 + 1/m_2) \cdots (1 + 1/m_k)$$

nějaké řešení $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$.

(IMO 2013)

DĚLITELE

Tvrzení. Pokud prvočíslo p dělí $a^2 + b^2$, kde a, b jsou nesoudělná, pak $p = 4k + 1$. Pokud $p = 4k + 3$ a $p \mid a^2 + b^2$, pak $p \mid a$ a $p \mid b$.

Úloha 19. V $\mathbb{N}$ řeš rovnici $x^n + 2^{n-1} = y^2$.

Úloha 20. V $\mathbb{Z}$ řeš rovnici $x^3 - x^2 + 8 = y^2$.

Úloha 21. V $\mathbb{N}$ řeš rovnici $n^5 + 7 = k^2$.

(Titu Andreescu)

TROCHA ALGEBRY

Pokud vyčerpáme standardní metody, můžeme rozšířit celá čísla o další prvky, čímž dostaneme větší svět, ve kterém se úloha snadno vzdá. Tato rozšíření ovšem často postrádají některé pěkné vlastnosti celých čísel, jako je třeba jednoznačný rozklad na prvočísla.

Definice. Nechť α je algebraické číslo (tj. je kořenem nějakého polynomu s koeficienty v $\mathbb{Z}$). Výrazem $\mathbb{Z}[\alpha]$ myslíme množinu všech dvojic $a + b\alpha$, kde a, b jsou celá čísla. Spolu se sčítáním a násobením tvoří tato množina okruh (tj. součet, rozdíl a součin prvků ze $\mathbb{Z}[\alpha]$ opět leží v $\mathbb{Z}[\alpha]$). Množinám $\mathbb{Z}[\alpha]$ říkáme *číselné obory*.

Například $\mathbb{Z}[i]$ jsou tzv. *Gaussova celá čísla*.

V číselných oborech definujeme dělitelnost jako v celých číslech: $a \mid b$, pokud existuje c takové, že $b = ac$.

Definice. Jednotka v oboru K je prvek x , pro nějž existuje $y \in K$ tak, že $xy = 1$. Prvočíslo je takový prvek $p \in K$, který není jednotka a pro který z $p \mid ab$ plyne $p \mid a$ nebo $p \mid b$. Je jasné, jak se definuje například nesoudělnost.

Definice. Obor K se nazývá Eukleidovský, pokud v něm lze dělit se zbytkem, tj. pro každé dva prvky $a, b \in K$, $b \neq 0$ existují $p, q \in K$ tak, že $q < |b|$ a $a = bp + q$. Obor K je Gaussovský neboli UFD (unique factorization domain), pokud lze každé číslo zapsat jednoznačně jako součin prvočísel (až na jednotky a pořadí).

Věta. Každý Eukleidovský obor je UFD. Opačná implikace nemusí platit (a často neplatí).

Například $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ není UFD: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$, tedy ani Eukleidovský.

Věta. *Nechť a, b, c jsou prvky oboru K , který je UFD. Pokud jsou a, b nesoudělná a platí $ab = c^n$ pro $n \geq 2$, pak $a = \epsilon x^n$, $b = \eta y^n$, kde ϵ, η jsou jednotky a x, y jsou prvky K .*

Úloha 22. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $x^2 = y^3 - 2$ (Fermat)

TĚŽŠÍ ÚLOHY

Rovnicím typu $x^2 = y^3 + k$, kde k je pevné celé číslo, se říká *Mordellovy rovnice*. Dá se dokázat, že vyjma případu, kdy $k = 0$, mají pouze konečně mnoho řešení. Jejich řešení bývají pro různá k velmi rozmanitá.

Úloha 23. Řeš v $\mathbb{N}$ Mordellovu rovnici pro $k = 7, -5, -6, 46, -1, -4 \dots$

Úloha 24. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$.

Úloha 25. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $xy + \frac{x^3 + y^3}{3} = 2007$. (Titu Andreescu)

Úloha 26. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $x^3 - y^3 = xy + 61$. (Ruská MO)

Úloha 27. Řeš v $\mathbb{N}$ rovnici $2^x = x^2 y$. (variace na IMO 1990)

Úloha 28. Řeš v $\mathbb{Z}$ rovnici $4xy - x - y = z^2$. (Euler)

Úloha 29. Dokaž, že rovnice $x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ má nekonečně mnoho řešení. (Titu Andreescu)

Úloha 30. V $\mathbb{Z}$ řeš rovnici $(x^2 - 2)^2 - 2 = y^2$.

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. Odečti jedničku. Čísla y a $y - 1$ jsou nesoudělná.

Hint 2. Vytvoř si více výrazů $1 - xy$ a $x - y$ a uprav na čtverec.

Hint 3. Pravou stranu uprav na čtverec, poté použij $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

Hint 4. Použij tvrzení pro $n = 2$.

Hint 5. Sevřením mezi čtverci dostaneš, že pravá strana je rovna $(x + y + z)^2$.

Hint 6. Uprav na součet čtverců.

Hint 7. Uspořádej proměnné podle velikosti a odhaduj.

Hint 8. Cauchy-Schwarzova nerovnost.

Hint 9. Drze zvol $z = -y$.

Hint 10. Platí $3^k \mid 2^{3^k} + 1$.

Hint 11. Vymodul rovnici třemi.

Hint 12. Vymodul rovnici jedenácti.

Hint 13. Všechna čísla jsou sudá.

Hint 14. Použij nekonečný sestup na prvočíselné dělitele x .

Hint 15. Uprav čtverec na $(m^2 - m(n - m) - (n - m)^2)^2$. Pak si vzpomeň na Fibonacciho čísla.

Hint 16. Obyčejnou indukci sestroj z řešení pro n řešení pro $n + 1$.

Hint 17. Pro $n = 1, 2$ najdi řešení. Dál postupuj indukci.

Hint 18. Použij rafinovanější indukci.

Hint 19. Přičti 2^{n-1} a zkoumej dělitele tvaru $4k + 3$.

Hint 20. Přičti x^2 a rozlož!

Hint 21. Přičti 121.

Hint 22. Obor $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ je Eukleidovský, tedy UFD. Použij větu.

Hint 23. V prvních čtyřech případech stačí přičíst vhodnou konstantu a rozložit. Pro -1 a -4 se vyplatí pracovat v $\mathbb{Z}[i]$.

Hint 24. Vhodná je substituce $u = x + 1$, $v = y + 1$. Dej k sobě výrazy uv a $u + v$ a rozlož na součin.

Hint 25. Vytvoř si $(x + y)^3$, odečti 1 a poté rozlož.

Hint 26. Levá strana je typicky větší než pravá.

Hint 27. Zapiš x jako $3^k l$, kde l není násobkem tří.

Hint 28. Vynásob čtyřmi a uprav. Použij dělitele tvaru $4k + 3$.

Hint 29. Uprav na tvar $-1 = (2x + 1)^2 - 2y^2$, což je Pellova rovnice, takže stačí najít jedno řešení a pak už jich je nekonečně mnoho.

Hint 30. Zatni zuby a vymysli si vlastní metodu.

VEKTORY V ANALYTICKEJ GEOMETRII

JAKUB „XELLOS“ ŠAFIN

ABSTRAKT. Príspevok sa venuje vektorom v 3D priestore, algebraickým operáciám s nimi, ich geometrickému významu a využitiu v analytickej geometrii. Spomína tiež komplexné čísla ako ich náhradu v 2D priestore.

Definícia. Vektorom $\vec{v}$ budeme rozumieť usporiadanú trojicu súradníc (x, y, z) v kartézskej s. s. Čísla x, y, z budeme nazývať zložkami vektoru. Absolútna hodnota takého vektoru je $|\vec{v}| = v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Poznámka. Bodu X priradzujeme vektor $\vec{X}$ z počiatku s. s. do tohto bodu. V ďalšom texte ich budeme ľubovoľne zamieňať.

Úsečke AB priradzujeme vektor z bodu A do bodu B , teda vektor $\vec{B} - \vec{A}$.

Priamke priradzujeme ľubovoľný s ňou rovnobežný vektor; roviny zasa ľubovoľnú dvojicu rôznobežných vektorov, ktoré sú s ňou rovnobežné.

Sčítanie vektorov po zložkách poznáte určite aspoň zo strednej školy. Násobiť vektory síce vieme, ale je to zložitejšie. Už len v tom, že ich môžeme násobiť dvoma spôsobmi.

Definícia. Skalárny a vektorový súčin:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) \cdot (x_v, y_v, z_v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v) = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v).$$

Poznámka. Smer vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je daný „pravidlom pravej ruky“.

Veta. Vlastnosti skalárneho a vektorového súčinu.

1. (Anti)komutativita: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
2. Distributivita: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$; $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$.
3. Ani jeden súčin nie je asociatívny. Pre vektorový súčin ale platí

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

4. Zmiešaný súčin: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

5. Nech vektory $\vec{u}, \vec{v}$ zvierajú uhol φ (od $\vec{u}$ k $\vec{v}$ ccw). Ich súčiny môžeme potom vyjadriť aj ako

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos \varphi; |\vec{u} \times \vec{v}| = uv \sin \varphi.$$

$$6. \vec{u} \cdot \vec{u} = u^2; \vec{u} \times \vec{u} = 0$$

Skalárny súčin teda súvisí s projekciou $\vec{u}$ na $\vec{v}$, vektorový súčin zasa s výškou $\vec{u}$ nad $\vec{v}$.

So súčinnami sa spája niekoľko užitočných tvrdení.

Tvrdenie (O kolmosti a rovnobežnosti vektorov).

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \times \vec{v} &= 0 \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \end{aligned}$$

Poznámka. Z $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, resp. $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ nevyplýva nulovosť jedného z vektorov. Môžu byť aj kolmé, resp. rovnobežné.

Tvrdenie (Obsah a objem). *Obsah trojuholníka s vrcholmi $\vec{A}$, $\vec{B}$ a $0 = \vec{C}$:*

$$S = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|.$$

Všeobecnejšie, obsah ľubovoľného mnohoúhelníka s vrcholmi $\vec{V}_1 \dots \vec{V}_n$ (v tomto poradí na obvode; $\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_1$), pre ľubovoľný bod $\vec{P}$:

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (\vec{V}_i - \vec{P}) \times (\vec{V}_{i+1} - \vec{P}) \right|.$$

Objem štvorstenu s vrcholmi $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ a $0 = \vec{D}$:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|.$$

Tvrdenie. *Majme rovinu ω danú vektormi $\vec{u}$, $\vec{v}$. Potom $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \omega$.*

Ako ale určíme vektor kolmý na priamku v 2D geometrii? Stačí využiť, že svet je 3D, a pridať jednotkový vektor $\vec{n}$ smerujúci kolmo nahor z papiera. Vektor $\vec{n} \times \vec{u}$ je potom len $\vec{u}$ otočený o 90° ccw.

Lemma (Myjava).

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}) = -\vec{A}, \\ (2) \quad & \vec{A} \times (\vec{n} \times \vec{B}) = \vec{n}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \end{aligned}$$

Ak vieme vyjadriť $\vec{A} \cdot \vec{B}$ o dosť krajšie ako $\vec{A} \times \vec{B}$, môže sa oplatíť rátať namiesto vektoru $\vec{V} = \vec{A} \times \vec{B}$ radšej vektor $\vec{n} \times \vec{V}$; na $\vec{V}$ ho prevedieme len ďalším vynásobením $-\vec{n}$ zľava. Lebo Myjava.

TIPNEM, KUKNEM A VIDÍM, ALEBO DORÁTAVANIE PARAMETROV

Máme dané body $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, a chceme pomocou nich vyjadriť bod $\vec{D}$. Čo tak

$$\vec{D} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C},$$

kde α , β , γ sú neznáme parametre? Vhodnými úpravami možno dôjdeme k rovniciam, z ktorých ich budeme vedieť vyjadriť pekne.

Niekedy zasa vieme parametre dorátať priamo. Napr. ak D leží na priamke AB, tak $\vec{D} = \pm |\vec{D} - \vec{A}| \frac{\vec{B} - \vec{A}}{|\vec{B} - \vec{A}|} + \vec{A}$; znamienko $\pm$ určíme podľa toho, či je A medzi B, D.

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

Na vektory v rovine sa môžeme pozeráť aj ako na komplexné čísla. Niektoré užitočné vlastnosti sa síce stratia, ale získame tým iné.

Definícia. Komplexné číslo $z = x + iy$ zodpovedá vektoru (x, y) v Gaussovej rovine.

Definícia. Komplexne združeným číslom k číslu $z = x + iy$ nazývame $\bar{z} = x - iy$. Platí $z\bar{z} = |z|^2$.

Tvrdenie (Komplexná exponenciála). Pre $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Komplexné číslo $z = x + iy$ vieme potom napísať ako

$$z = |z|e^{i\varphi},$$

kde φ je uhol, ktorý zvierá vektor (x, y) s kladnou polosou $\hat{x}$, meraný ccw.

Tvrdenie (Otočenie). Vektoru (x, y) otočenému o uhol α ccw zodpovedá komplexné číslo $(x + iy)e^{i\alpha}$.

Tvrdenie (Vzťah k súčinom). Pre vektory $\vec{u} = (x_u, y_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v)$ platí

$$\Re[(x_u + iy_u)(x_v - iy_v)] = x_u x_v + y_u y_v = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v},$$

$$\Im[(x_u + iy_u)(x_v - iy_v)] = x_u y_v - y_u x_v = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}.$$

GRINDING, ALEBO HURÁ NA PRÍKLADY!

Cvičenie 1 (Na rozcvičku). Máme trojuholník s vrcholmi $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. Vyjadrite len pomocou týchto vektorov:

- (a) ťažisko,
- (b) vopsisko, pripisiská,

- (c) body dotyku strán a vpísanej kružnice, priesečníky osí uhlov s protiľahlými stranami,
- (d) opsisko,
- (e) ortocentrum, päty výšok.

Cvičenie 2 (Na drsnejšiu rozcvičku). Máme štvorsten s vrcholmi $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$; $\vec{D}$. Vyjadrite len pomocou týchto vektorov:

- (a) ťažisko,
- (b) vopsisko, pripíská,
- (c) opsisko,
- (d) Mongeho bod (priesečník rovín prechádzajúcich stredom strany a kolmých na protiľahlú stranu).

Cvičenie 3 (Eulerova priamka.). Ukážte, že v trojuholníku $\triangle ABC$ sú ortocentrum, ťažisko a opsisko kolineárne.

Úloha 1. Je daná množina S vektorov v rovine; $|S| = n$. Podmnožinu S nazveme *maximálnou*, ak je abs. hodnota súčtu jej prvkov najväčšia možná. Dokážte, že existuje najviac $2n$ *maximálnych* podmnožín S , a uveďte príklad množiny, pre ktoré je to práve $2n$. (IMO 1997 shortlist)

Úloha 2. Daný je $\triangle ABC$ s obsahom S a vnútri neho bod O . Označme A' , B' , C' postupne obrazy bodov A , B , C v stredovej súmernosti podľa bodu O . Dokážte, že šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$. (KK MO 2011)

Úloha 3. Je daný $\triangle ABC$ s opsiskom O a priamka l prechádzajúca cez O . Označme M , N v tomto poradí priesečníky l so stranami AB , AC , a S , R v tomto poradí stredy úsečiek BN , CM . Dokážte, že sú uhly ROS a BAC rovnako veľké. (WOOT 2006)

Úloha 4. Majme body A , B , C , D v priestore. Dokážte nerovnosť

$$|AC|^2 + |BD|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 \geq |AB|^2 + |CD|^2$$

a zistite, kedy platí rovnosť. (USAMO 1975)

Úloha 5. Máme trojuholník $\triangle ABC$ s opsiskom O . Stred strany AB označme D ; ťažisko $\triangle ACD$ označme G . Dokážte, že $CD \perp OG \Leftrightarrow |AB| = |AC|$. (Balkánska MO 1985)

Úloha 6. V rovnobežníku $ABCD$ so stredom S označme O vopsisko $\triangle ABD$ a T bod jej dotyku s uhlopriečkou BD . Dokážte, že priamky OS a CT sú rovnobežné. (CK MO 2013)

Úloha 7. V šesťuholníku $ABCDEF$ označme M, N, P, Q, R, S stredy strán AB, BC, CD, DE, EF, FA (v tomto poradí). Dokážte, že

$$|RN|^2 = |MQ|^2 + |PS|^2 \Leftrightarrow MQ \perp PS. \quad ([5])$$

Úloha 8. Nech $\triangle ABC$ je rovnoramenný trojuholník a D stred jeho základne BC . Označme ďalej M stred úsečky AD a N päť výšky z bodu D na priamku BM . Dokážte, že uhol ANC je pravý. (Výberko SR, 2007)

Úloha 9. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme P päť výšky z vrcholu C na stranu AB , H ortocentrum, O opsisko, D priesečník priamky CO so stranou AB a E stred úsečky CD . Dokážte, že priamka EP prechádza stredom úsečky OV . (CK MO 2011)

Úloha 10. Je daný rovnoramenný $\triangle ABC$ so základňou BC . Body P, X, Y ležia v tomto poradí na priamkach BC, AB, AC a platí $PX \parallel AC, PY \parallel AB$. Označme T stred oblúka BC kružnice opísanej $\triangle ABC$. Dokážte, že $PT \perp XY$. (Irán 2005)

Úloha 11. V rovine sú dané body A_1, A_2, B_1, B_2 tak, že $|A_2B_2| : |A_1B_1| = k < 1$ a priamky A_1B_1, A_2B_2 sa pretnú mimo týchto úsečiek. Sú dané body A_3, A_4 tak, že body A_1, A_3, A_2, A_4 ležia na priamke A_1A_2 v tomto poradí a platí $|A_3A_2| : |A_3A_1| = |A_4A_2| : |A_4A_1| = k$. Podobne sú dané body B_3, B_4 . Nájdite uhol medzi priamkami A_3B_3 a A_4B_4 . ([3])

Úloha 12. Je daný ostrouhlý $\triangle ABC$ s ortocentrom H . Nech W je bod na strane BC . Označme päť výšok z bodov B a C ako M a N , v tomto poradí. Označme opísanú kružnicu $\triangle BWN$ ako ω_1 a bod X tak, že WX je priemer ω_1 . Podobne označme opísanú kružnicu $\triangle CWM$ ako ω_2 a bod Y tak, že WY je priemer ω_2 . Dokážte, že sú body X, Y, H kolineárne. (IMO 2013)

Úloha 13. Nech sú AH_1, BH_2 a CH_3 výšky daného $\triangle ABC$ a ω jeho vpísaná kružnica. Body dotyku ω so stranami BC, CA, AB označme v tomto poradí T_1, T_2, T_3 . Uvažujme obrazy priamok H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 v osových súmernostiach podľa priamok (v tomto poradí) T_1T_2, T_2T_3, T_3T_1 . Dokážte, že priesečníky týchto obrazov ležia na ω . (IMO 2000)

Úloha 14. Je daný $\triangle ABC$ a bod S mimo roviny ABC taký, že $|SA| = |SB| = |SC|$. Na úsečkách SA, SB, SC nájdeme v tomto poradí body X, Y, Z také, že roviny XYZ a ABC sú rovnobežné. Označme O opsisko štvorstenu $SABZ$. Dokážte, že priamka SO je kolmá na rovinu XYC . (iKS, 2. ročník)

Úloha 15. V konvexnom šesťuholníku je vzdialenosť stredov každých dvoch protiľahlých strán rovná $\frac{\sqrt{3}}{2}$ násobku súčtu ich dĺžok. Dokážte, že všetky uhly šesťuholníka sú rovnaké. (IMO 2003)

Úloha 16. Guľa vpísaná štvoruholníku ABCD sa dotýka každej strany v jej ťažisku. Dokážte, že je ABCD pravidelný. ([5])

Úloha 17. Je daný $\triangle ABC$ s ťažiskom, ortocentrom a vopsiskom (v tomto poradí) G, H, I. Dokážte, že uhol GIH nie je ostrý a zistite, kedy je tupý. (IMO 1990 shortlist)

SPOILER ALERT!

Hint k cvičeniu 1.

- vopsisko: dorátajte parametre,
- opsisko: dorátajte parametre $\vec{n} \times \vec{O}$,
- ortocentrum: s. s. so stredom v opsisku; dorátajte parametre,
- päta výšky z vrcholu A: s. s. so stredom v A.

Hint k cvičeniu 2. Hľadajte analógie s predošlým cvičením. Pri opsisku už nie je podstatné $\vec{n} \times \vec{O}$.

Hint k cvičeniu 3. Rovnobežnosť cez vektorový súčin; s. s. s počiatkom v opsisku.

Hint 1. Ako delí prvky S priamka kolmá na daný súčet prvkov max. podmnožiny?

Hint 2. Obsah cez vektorový súčin.

Hint 3. Komplexné čísla; stred s. s. je v opsisku a reálna os na priamke MN.

Hint 4. Rozpísať cez súčty vektorov (s počiatkom s. s. v A) a upraviť na štvorec.

Hint 5. Kolmost' cez skalárny súčin, s. s. s počiatkom v O.

Hint 6. Rovnobežnosť cez vektorový súčin. Najviac sa oplatí stred s. s. v $\vec{S}$. Aj bez vektorov vieme $|\text{BT}|$.

Hint 7. Kolmost' cez skalárny súčin, inak len dlhšie priamočiare rávanie.

Hint 8. Aj bez vektorov vieme vyjadriť $|\text{BM}|$ a $|\text{BN}|$.

Hint 9. Zasa s. s. s počiatkom v opsisku. Parametricky vyjadrite $\vec{D}$ a $\vec{P}$ – na akých priamkach ležia? Nebojte sa počítať dĺžky úsečiek.

Hint 10. Komplexné čísla. Jednotková opísaná kružnica (počiatok s. s. v O).

Hint 11. Odpoveď: pravý uhol. Vyjadrujte $\overrightarrow{A_3B_3}$, $\overrightarrow{A_4B_4}$ ako súčty iných vektorov.

Hint 12. Rovnobežnosť cez vektorový súčin (stratia sa $\vec{X}$, $\vec{Y}$). Počiatok s. s. v päte výšky z A , prípadne os $\hat{x}$ na priamke BC (je jednoduchšie vyjadriť si súradnice väčšiny vektorov). Využívajte skôr trigonometriu ako dĺžky.

Hint 13. Komplexné čísla. Nech je vpísaná kružnica $\triangle ABC$ jednotková. Postupne riešte rovnice a vyjadrujte podstatné body. Priesečníky priamky s jednotkovou kružnicou sú riešenia kvadratickej rovnice.

Hint 14. Pracujte v s. s. s počiatkom v $\vec{S}$. Aké identity spĺňa skalárny súčin s $\vec{O}$?

Hint 15. Trojuholníková nerovnosť, umocniť a sčítať vzniknuté nerovnosti a upraviť na štvorec. Vypadne kopa užitočných vlastností, napr. že uhlopriečky sú rovnako dlhé.

Hint 16. Aj v s. s. s počiatkom vo vopsisku sa dajú ťažiská strán vyjadriť pekne. Oplatí sa používať ako parametre polomer r vpísanej gule a $p = \vec{A} \cdot \vec{B}$.

Hint 17. Veľa úprav rovníc a Schurova nerovnosť pre strany a , b , c .

LITERATÚRA

- [1] <http://web.mit.edu/yisun/www/notes/complex.pdf>
- [2] <http://hoaxung.files.wordpress.com/2010/04/marko-radovanovic-complex-numbers-in-geometry.pdf>
- [3] <http://www.math.ru/lib/files/pdf/olimp/Sharygin.pdf>
- [4] http://is.muni.cz/th/13813/prif_d/dizerJE.pdf
- [5] <http://www.math.ust.hk/excalibur/v6.n5.pdf>

KOMBINATORICKÉ KONSTRUKCE

ŠTĚPÁN ŠIMSA

ABSTRAKT. Naučíme se, jak jednoduše zkonstruovat požadované řešení. V kombinatorice se jedná o součást většiny úloh – někdy jen jako nutný, standardní krok (takové konstrukce si procvičíme v pískovišti), často ale jako obtížnější polovina řešení. V příspěvku se objevují jen konstrukční části úloh. Skutečné úlohy zadané na soutěžích měly obvykle ještě druhou část.

PÍSKOVIŠTĚ

Úloha 1. Konvexní 1994-úhelník je rozdělen na několik konvexních pětiúhelníků. Určete jejich nejmenší možný počet.

Úloha 2. Máme šachovnici 6×6 a na ní figurku delfína. Ten se může hýbat o jedna doprava, nahoru nebo diagonálně doleva dolů. Na začátku stojí v levém dolním rohu šachovnice. Projděte s delfínem celou šachovnici, aby na každém políčku stál právě jednou. (KMS 03/04 L1, 10)

Úloha 3. Lze obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě dvěma barvami (žlutě a modře) tak, aby v každém řádku bylo jen konečně mnoho žlutých políček a v každém sloupci jen konečně mnoho modrých? (MKS 32–3–4)

Úloha 4. Do tabulky o čtyřech sloupcích a čtyřech řádcích jsou napsána (reálná) čísla tak, aby pro každé pole platilo, že součet čísel v polích s ním sousedících je 1. Určete součet všech čísel tabulky. (Sousedními poli rozumíme ta pole tabulky, která mají společnou stranu.)

Úloha 5. Mějme papír se 102×102 čtverečky. Najděte takový souvislý útvar U složený ze 101 čtverečků, že z papíru lze (podél čar) vystříhnout maximálně čtyři jeho kopie. (KMS 03/04 L1, 9)

Úloha 6. V několika krabicích máme 64 kuliček. Máme-li dvě krabice s a a b kuličkami ($a \geq b$), můžeme přesunout b kuliček z první do druhé. Dokažte, že umíme přesunout všechno do jedné krabice.

Úloha 7. Ve čtyřech krabicích je celkem $n \geq 4$ kuliček. V jednom tahu můžeme vzít po jedné kuličce ze dvou různých krabic a přesunout je obě do nějaké jiné

krabice. Jde vždy dosáhnout toho, aby byly všechny kuličky v jedné krabici?
(Čína 1994)

Úloha 8. Prove that the set of positive integers can be partitioned into 3 subsets A_1, A_2, A_3 such that for all integers $n \geq 15$ and all $i \in \{1, 2, 3\}$ there exist two distinct elements of A_i whose sum is n .
(IMO Shortlist 2011, C4)

Úloha 9. Na stole leží 2013 mincí. Provedeme 2013 tahů, kde v k -tém tahu otočíme nějakých k mincí. Dokažte, že lze dosáhnout toho, aby všechny mince byly nahoru stejnou stranou.
(Čína 1989)

Úloha 10. Buď $M = \{1, 2, \dots, 2014\}$ a $A \subset M$. Dokažte, že existuje $B \subset M$ s vlastností: Množina A je přesně množina těch čísel z M , která jsou děliteli lichého počtu čísel z B .
(MOSP 1999)

Úloha 11. A maze is an 8×8 board with some adjacent squares separated by walls, so that any two squares can be connected by a path not meeting any wall. Given a command LEFT, RIGHT, UP, DOWN, a pawn makes a step in the corresponding direction unless it encounters a wall or an edge of the chessboard. God writes a program consisting of a finite sequence of commands and gives it to the Devil, who then constructs a maze and places the pawn on one of the squares. Can God write a program which guarantees the pawn will visit every square despite the Devil's efforts?
(ARO 1998)

INDUKCE

Úloha 12. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 3$ lze rozřezat rovnostranný trojúhelník na n trojúhelníků, z nichž každý je rovnostranný nebo rovnoramenný.

Úloha 13. Dokažte, že ať vystříhneme z tabulky $2^n \times 2^n$ kdekoli jeden čtverček, zbytek jde pokrýt L-triominy.

Úloha 14. Pro $m \geq 1$ rozdělte šachovnici $2^m \times 2^m$ na obdélníky tak, aby každé z 2^m políček na diagonále tvořilo vlastní obdélník (o stranách délky 1) a aby byl součet obvodů použitých obdélníků roven $(m+1) \cdot 2^m$.
(IMO Shortlist 2009, C4)

Úloha 15. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n , které není dělitelné třemi, platí: Šachovnici $n \times n$ lze rozřezat na jeden čtverec 1×1 a L-triomina.

Úloha 16. Let $n > 0$ be an integer. We are given a balance and n weights of weight $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. In a sequence of n moves we place all weights on the balance. In the first move we choose a weight and put it on the left pan. In each

of the following moves we choose one of the remaining weights and we add it either to the left or to the right pan. Compute the number of ways in which we can perform these n moves in such a way that the right pan is never heavier than the left pan. (IMO 2011, 4)

GEOMETRICKÉ KONSTRUKCE

Úloha 17. A configuration of 4027 points in the plane is called Colombian if it consists of 2013 red points and 2014 blue points, and no three of the points of the configuration are collinear. By drawing some lines, the plane is divided into several regions. An arrangement of lines is good for a Colombian configuration if the following two conditions are satisfied:

- no line passes through any point of the configuration;
- no region contains points of both colours.

Prove that there is a Colombian configuration for which there doesn't exist a good configuration of 2012 lines. (IMO 2013, 2)

Úloha 18. Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm. (MO 59–A–III–2)

GRAFY

Úloha 19. Každý vrchol grafu obarvíme nějakou množinou barev tak, že množiny u dvou vrcholů mají neprázdný průnik, právě když jsou spojeny hranou. Najděte graf na n vrcholech, na jehož obarvení budeme potřebovat alespoň $\lfloor n^2/4 \rfloor$ barev. (KMS 06/07 Z1, 11)

Úloha 20. Na nekonečnom bielom štvorčekovanom papieri je istý konečný počet štvorčekov úplne zafarbených čiernou farbou. Pritom každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov, opäť susediacich celou stranou. (KMS 06/07 L1, 11)

Úloha 21. In a mathematical competition some competitors are friends. Friendship is always mutual. Call a group of competitors a clique if each two of them are friends. In particular, any group of fewer than two competitors is a clique.) The number of members of a clique is called its size. Given that in this competition, the largest size of a clique is even, prove that the competitors can be arranged in two rooms such that the largest size of a clique contained in one room is the same as the largest size of a clique contained in the other room. (IMO 2007, 3)

HRY

Úloha 22. Players A and B play a game with $N \geq 2012$ coins and 2012 boxes arranged around a circle. Initially A distributes the coins among the boxes so that there is at least 1 coin in each box. Then the two of them make moves in the order $B, A, B, A, \dots$ by the following rules:

- On every move of his B passes 1 coin from every box to an adjacent box.
- On every move of hers A chooses several coins that were not involved in B 's previous move and are in different boxes. She passes every chosen coin to an adjacent box.

Player A 's goal is to ensure at least 1 coin in each box after every move of hers, regardless of how B plays and how many moves are made. Prove that $N = 4022$ enables her to succeed. (IMO Shortlist 2012, C4)

Úloha 23. Let k and n be fixed positive integers. In the liar's guessing game, Amy chooses integers x and N with $1 \leq x \leq N$. She tells Ben what N is, but not what x is. Ben may then repeatedly ask Amy whether $x \in S$ for arbitrary sets S of integers. Amy will always answer with yes or no, but she might lie. The only restriction is that she can lie at most k times in a row. After he has asked as many questions as he wants, Ben must specify a set of at most n positive integers. If x is in this set he wins; otherwise, he loses. Prove that:

- a) If $n \geq 2k$ then Ben can always win. (IMO 2012, 3a)

DALŠÍ ÚLOHY

Úloha 24. V lese býva 2014 trpaslíkov očíslovaných číslami 1 až 2014. Na príkaz Snehulienky sa nejakých 41 z nich postaví do radu tak, aby ich čísla tvorili aritmetickú postupnosť. Snehulienka si všimla, že nech sa trpaslíci postavia do radu hocijako, vždy bude medzi nimi aspoň jeden z jej 90 obľúbených trpaslíkov. Aké čísla môžu mať Snehulienkini obľúbení trpaslíci? (KMS 06/07 L1, 8)

Úloha 25. Nech M je množina slov (postupnosti znakov) dĺžky n nad k -prvkovou abecedou $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ taká, že každé dve slová z M sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite M , že $|M| = k^{n-1}$. (KMS 05/06 Z3, 12)

Úloha 26. Máme 45 klebetníč, pričom každá sa za posledný týždeň dozvedela novú klebetu a chce sa o ňu podeliť s ostatnými. Vie to urobiť tak, že niektoré inej zavolá a pritom si navzájom povedia všetky klebety, ktoré vedia. Chceme, aby každá z nich vedela všetky klebety. Ukážte, že to ide na 86 telefonátov.

(KMS 05/06 Z1, 8)

Úloha 27. On a 999×999 board a *limp rook* can move in the following way: From any square it can move to any of its adjacent squares, i.e., a square having a common side with it, and every move must be a turn: i.e., the directions of any two consecutive moves must be perpendicular. A *nonintersecting route* of the limp rook consists of a sequence of distinct squares that the limp rook can visit in that order by an admissible sequence of moves. Such a nonintersecting route is called *cyclic* if the limp rook can, after reaching the last square of the route, move directly to the first square of the route and start over.

Find cyclic, nonintersecting route of a limp rook passing through $4 \cdot (499^2 - 1)$ squares. (IMO Shortlist 2009, C6)

Úloha 28. In a concert, 20 singers will perform. For each singer, there is a (possibly empty) set of other singers such that he wishes to perform later than all the singers from that set. Can it happen that there are exactly 2010 orders of the singers such that all their wishes are satisfied? (IMO Shortlist 2010, C1)

Úloha 29. Let $n \geq 1$ be an integer. What is the maximum number of disjoint pairs of elements of the set $\{1, 2, \dots, n\}$ such that the sums of the different pairs are different integers not exceeding n ? (IMO Shortlist 2012, C2)

Úloha 30. On a square table of 2011 by 2011 cells we place a finite number of napkins that each cover a square of 52 by 52 cells. In each cell we write the number of napkins covering it, and we record the maximal number k of cells that all contain the same nonzero number. Prove that there exist a napkin configuration with $k = 4044121 - 57392 = 3986729$.

(IMO Shortlist 2011, C7)

Úloha 31. In each of six boxes $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ there is initially one coin. There are two types of operation allowed:

- Type 1: Choose a nonempty box B_j with $1 \leq j \leq 5$. Remove one coin from B_j and add two coins to B_{j+1} .
- Type 2: Choose a nonempty box B_k with $1 \leq k \leq 4$. Remove one coin from B_k and exchange the contents of (possibly empty) boxes B_{k+1} and B_{k+2} .

Determine if there is a finite sequence of such operations that results in boxes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 being empty and box B_6 containing exactly $2010^{2010^{2010}}$ coins. (IMO 2010, 5)

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. Použijte jen vrcholy 1994-úhelníku.

Hint 2. Jak se může dostat na políčko vlevo nahoře? A jak potom na políčko o jedna vpravo dole, aby si nerozdělil šachovnici na dvě části?

Hint 3. Jde to. Vybírejte postupně řádky a sloupce a obarvujte v nich políčka tak, aby pro ně byla podmínka zachována.

Hint 4. Vybarvete taková políčka tabulky, aby každé políčko sousedilo s právě jedním vybarveným.

Hint 5. Kříž. Mohou být v horní/dolní půlce tři středy křížů?

Hint 6. Všechny počty „zesuďte“. Indukce.

Hint 7. Ano. Indukce.

Hint 8. Prvních 9 čísel rozdělte zvlášť, zbylá čísla dávejte na střídačku do množin A_1, A_2, A_3 .

Hint 9. Tahy dělejte v opačném pořadí a po k -tém kroku mějte $k - 1$ prvních mincí otočených správně.

Hint 10. Zkonstruuje B průchodem shora.

Hint 11. Ďábel má jen konečně mnoho možností. Pište program postupně, aby pro všechny fungoval.

Hint 12. Indukce $n \rightarrow n + 3$. Rozdělte rovnoramenný trojúhelník na pravoúhlé a využijte vhodnou vlastnost pravoúhlých trojúhelníků.

Hint 13. Ze čtyř L-triomin se dá postavit větší.

Hint 14. Rozdělte tabulku na čtyři čtverce $2^{m-1} \times 2^{m-1}$.

Hint 15. Indukce $n \rightarrow n + 3$. Čtvereček odstraňujte vždy vlevo dole. Když je n sudé ($n + 3$ liché), využijte to v indukčním předpokladu.

Hint 16. Odmyslíme si závaží s hmotností 1, hmotnosti zbylých závaží podělíme dvěma, využijeme indukční předpoklad a nakonec zjistíme, kam můžeme závaží s hmotností 1 přidat.

Hint 17. Nakreslete si mezi některé dvojice červených a modrých bodů úsečky, aby jich každá přímka protнула jen málo.

Hint 18. Rozdělte terč na menší kruh s vhodným poloměrem a mezikruží, využijte Dirichletův princip.

Hint 19. Obarvete hrany průnikem množin u vrcholů. Máme-li hrany (A, B) , (C, D) a přitom A není spojeno s C nebo B není spojeno s D , tak musejí být tyto hrany obarveny různými barvami. Jak zařídit, aby měla každá hrana jiné barvy než ostatní?

Hint 20. Sestrojte graf nad bílými políčky. Spojte hranou vrcholy, které musí mít různou barvu. Dokažte, že graf lze obarvit dvěma barvami (využijte, že nemá kružnici liché délky).

Hint 21. Dejte $2n$ soutěžících tvořících největší kliku do jedné místnosti, zbylé do druhé. Přesouvejte je tak, aby se velikosti největších klik v místnostech lišily maximálně o jedna.

Hint 22. Na začátku dá A do dvou krabic po jedné minci a do zbylých po dvou. Po každém svém tahu A tuto konfiguraci zachová. Rozeberte zvlášť situaci, kdy jsou krabice s jednou mincí ob jedna od sebe a během tahu hráče B se ani jedna z mincí nepřesune do krabice mezi nimi.

Hint 23. Najděte číslo z množiny $\{1, \dots, N\}$, které se nerovná x , a množinu adeptů zmenšujte, dokud jich je více než 2^k . Po odebrání čísla můžete množinu přechíslovat na $\{1, \dots, N-1\}$. Ptejte se, jestli $x = 2^k$, dokud Amy neodpoví *yes* (jinak $x \neq 2^k$), a využijte toho.

Hint 24. V aritmetické posloupnosti bude nějaké z čísel násobkem 41. Pokud ovšem není difference 41.

Hint 25. Přidejte vhodný znak za každé slovo délky $n-1$.

Hint 26. Kdyby se první dozvěděla všechny drby, mohla by je ostatním říct. Jen u posledních tří drben je potřeba to udělat trochu rafinovaně.

Hint 27. Najděte konstrukci indukci pro tabulky $(4k-1) \times (4k-1)$.

Hint 28. Pokud pro nějaké požadavky k_1 (resp. k_2) zpěváků existuje N_1 (resp. N_2) uspořádání, tak můžeme zvolit takové požadavky pro $k_1 + k_2$ zpěváků, aby existovalo $N_1 \cdot N_2$ uspořádání.

Hint 29. Počítejte dvěma způsoby součet všech čísel ve dvojicích a tím dokažte, že je maximálně $\lfloor \frac{2n-1}{5} \rfloor$ dvojic. Při konstrukci využijte, že musí v nerovnosti nastat (skoro) rovnost. Nejprve vyřešte případ $n = 5k+3$, ostatní z něj odvoďte.

Hint 30. Nejvíc políček bude zakryto jedním ubrouskem. Umístěte ubrousky co nejpravdělněji. Začněte v protějších rozích a dořešte uhlopříčku.

Hint 31. Jde to. Indukcí dokažte, že od $(a, 0, 0)$ se dá přejít k $(0, 2^a, 0)$ a od $(a, 0, 0, 0)$ k $(a-k, P_k, 0, 0)$, kde

$$P_k = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}}_k.$$

REFERENCE

- [1] Budáč, Jurík, Mazák: *Zbierka úloh KMS*, Trojsten, 2010. Elektronická verze na http://www.kms.sk/docs/zbierkaKMS_klikacia.pdf
- [2] Djukic, Jankovic, Matic, Petrovic: *The IMO Compendium*, Springer, 2011.
- [3] Calábek, Švrček: *Sbírka netradičních matematických úloh*, Prometheus, 2007.
- [4] Andreescu, Feng: *102 Combinatorial Problems*, Birkhäuser, 2003.

MOCNOST BODU KE KRUŽNICI

PEPA TKADLEC

ABSTRAKT. Příspěvek shrnuje nejdůležitější fakta o mocnosti bodu ke kružnici. Také obsahuje přes 50 úloh roztržiených zhruba podle toho, jak je v nich mocnost použitá.

Čtyřikrát z posledních pěti let byla na IMO úloha, ve které se uplatnila mocnost bodu ke kružnici. Být s mocností dobře srozuměný je tedy velmi záhodno, má-li člověk ambice převyšující účast v celostátním kole.

TEORIE

Definice (Mocnost bodu ke kružnici). Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r . *Mocností* bodu M ke kružnici k rozumíme číslo

$$p(M, k) = |MO|^2 - r^2.$$

Nechť M je bod a $k(O; r)$ kružnice.

- (1) Číslo $p(M, k)$ je nulové právě tehdy, když bod M leží na kružnici k . Číslo $p(M, k)$ je kladné/záporné právě tehdy, když M leží vně/uvnitř kružnice k .
- (2) Buď N další bod. Je-li $p(M, k) = p(N, k)$, pak $|MO| = |NO|$.
- (3) Pokud M leží vně k , označme T ten bod kružnice k , pro který je přímka MT ke kružnici k tečnou. Pak platí $p(M, k) = |MT|^2$.
- (4) (zásadní!) Nechť přímka p vedená bodem M protne k v bodech A, B . Pak $MA \cdot MB = p(M, k)$, kde úsečky MA, MB nahlížíme jako orientované.

Tvrzení (Popis tětivových čtyřúhelníků). *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a $Q = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|QA| \cdot |QD| = |QB| \cdot |QC|$.*

Definice. Nechť k, l jsou kružnice. Množinu bodů X splňujících $p(X, k) = p(X, l)$ nazýváme *chordálou* kružnic k, l .

Tvrzení. *Chordála dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.*

Úloha 1. Kružnice k, l se protínají v bodech A, B . Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l , která se jich dotýká v bodech T, U , v bodě P . Pak $|PT| = |PU|$.

Následující lemma často umožňuje dokazovat, že nějaké čtyři body leží na kružnici, místo toho, že nějaké tři přímky procházejí jedním bodem (a naopak).

Tvrzení (Radikální lemma). *Na nesoustředných kružnicích k a l jsou dány po řadě body K_1, K_2 a L_1, L_2 . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (1) *Body K_1, K_2, L_1, L_2 leží na jedné kružnici.*
- (2) *Přímky K_1K_2 a L_1L_2 se protínají na chordále kružnic k a l (nebo jsou s ní obě rovnoběžné).*

Úloha 2. Na přímce p leží body A, B, C, D v tomto pořadí. Kružnice nad průměry AC, BD se protnou v X, Y . Na přímce XY zvolíme bod P ($P \notin BC$). Přímka CP protne kružnici nad AC podruhé v bodě M , přímka BP kružnici nad BD v bodě N . Ukažte, že přímky AM, DN, XY procházejí jedním bodem. (IMO 1995)

Tvrzení (Potenční střed). *Uvažme tři kružnice $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Pak jejich vzájemné chordály procházejí jedním bodem (nebo jsou všechny rovnoběžné). Tomuto bodu se říká potenční střed kružnic $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.*

Tvrzení (Další množiny). *Uvažme dvě nesoustředné kružnice ω_1, ω_2 se středy O_1, O_2 . Pak množina bodů X , pro které je*

- (1) *rozdíl $p(X, \omega_1) - p(X, \omega_2)$ konstantní, je přímka kolmá na O_1O_2 .*
- (2) *součet $p(X, \omega_1) + p(X, \omega_2)$ konstantní, je kružnice se středem ve středu O_1O_2 .*
- (3) *podíl $p(X, \omega_1) : p(X, \omega_2)$ konstantní, je kružnice se středem na O_1O_2 .*

Úloha 3. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB, BC, CA v bodech F, D, E . Označme písmeny Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, M středy úseček FB, BD, DC, CE, BC . Konečně buď $X = Y_1Y_2 \cap Z_1Z_2$. Dokažte, že $XM \perp BC$.

NA ROZJEZD

Úloha 4. Jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l . Zkonstruujeme jejich čtyři společné tečny a na každé vyznačíme střed úsečky určené příslušnými body dotyku. Dokažte, že tyto čtyři středy leží na přímce.

Úloha 5. Je dána půlkružnice τ s průměrem AB . Body P, Q jsou dány na úsečce AB tak, že $AP = BQ$. Rovnoběžné polopřímky vycházející z P a Q protnou τ postupně v X a Y . Dokažte, že součin $PX \cdot QY$ je pevný.

Úloha 6. Na kružnici ω jsou dány body A, B , které netvoří její průměr. Uvažme všechny dvojice kružnic ω_a, ω_b , které mají vnitřní dotyk s ω postupně v A, B a které mají navíc samy vnější dotyk. Dokažte, že vnitřní společná tečna kružnic ω_a, ω_b prochází pevným bodem.

Úloha 7. Je dán čtverec $ABCD$. Kružnice k skrz A a C protíná kružnici l skrz B a D v bodech P, Q . Dokažte, že střed čtverce $ABCD$ leží na PQ . Platí totéž pro obdélník? Kosočtverec? (Baltic Way 2010)

Úloha 8. Vně kružnice k jsou dány body A, B . Pohyblivá přímka skrz A protíná k v X, Y . Dokažte, že kružnice (XYB) procházejí pevným bodem různým od B (nebo se všechny dotýkají téže přímky).

Úloha 9. Přímky ramen AD, BC lichoběžníku $ABCD$ se protnou v E . Kružnice s průměry AC, BD se protnou v X a Y . Dokažte, že E leží na XY .

Úloha 10. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC , jejichž strana BC je průměrem kružnice k . (MO 56–A–I–4)

Úloha 11. Po stranách AB, AC trojúhelníka ABC se pohybují postupně body L, K . Dokažte, že společná tětiva kružnic nad průměry BK a CL prochází pevným bodem.

POČÍTACÍ

Úloha 12. Osa úhlu u vrcholu A protne protější stranu BC trojúhelníka ABC v D . Kružnice (ADB) protne AC podruhé v E , kružnice (ADC) protne AB podruhé v F . Dokažte, že $BF = CE$.

Úloha 13. Jsou dány neprotínající se kružnice k, l . Jedna vnější společná tečna se dotýká k v A , ta druhá se dotýká l v D . Dokažte, že úsečka AD vytne na k a l stejně dlouhé tětivy.

Úloha 14. Kružnice k se dotýká úsečky AB v jejím středu M . Označme N střed AM . Přímka skrz A protne k v C a D tak, že se osy úseček CN a BD protínají v bodě O na AB . Určete AO/OB . (USAMO 1998)

Úloha 15. Na straně AB obdélníka $ABCD$ splňujícího $AB = 2 \cdot BC$ je dán bod E . Označme P a Q paty kolmic z A na DE a z B na CE . Dokažte, že kružnice (PEQ) se dotýká strany CD . (Baltic Way 2003)

Úloha 16. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníka ABC s výškami BE a CF je dán bod P tak, že BP je tečna ke kružnici APF a CP je tečna ke kružnici APE . Dokažte, že $\angle BPC = 90^\circ$. (ala MEMO 2011)

Úloha 17. Úhlopříčky lichoběžníka $ABCD$ se protínají v P . Kružnice (BCD) protne AP podruhé v A_1 . Body B_1, C_1, D_1 definujeme podobně. Dokažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je rovněž lichoběžník. (Turnaj Měst 2008)

Úloha 18. Kružnice protne strany BC, CA, AB trojúhelníka ABC v bodech $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Ukažte, že přímky AA_1, BB_1, CC_1 procházejí jedním bodem právě tehdy, když přímky AA_2, BB_2, CC_2 procházejí jedním bodem.

Úloha 19. Kružnice ω protíná strany AB, BC, CD, DE, EA rovnostranného (ne nutně pravidelného) pětiúhelníka $ABCDE$ v bodech $A_1, A_2, \dots, E_1, E_2$. Dokažte, že

$$AA_1 + BB_1 + \dots + EE_1 = A_2B + B_2C + \dots + E_2A.$$

Úloha 20. Trojúhelník ABC je vepsán do kružnice ω s poloměrem R . Kružnice A -připsaná se středem I_a protne ω v bodech D, E . Přímka I_aD protne ω podruhé v X . Dokažte, že $I_aX = 2R$.

Úloha 21. Na stranách AB, AC trojúhelníka ABC s nejkratší stranou BC najdeme body K, L tak, že $KB = BC = CL$. Dokažte, že KL je kolmá na OI , kde O a I jsou opsiště a vepsiště $\triangle ABC$.

Úloha 22. V trojúhelníku ABC protnou osy vnějších úhlů u vrcholů A, B, C protější strany postupně v bodech D, E, F . Dokažte, že body D, E, F leží na přímce kolmé na OI , kde O a I jsou opsiště a vepsiště $\triangle ABC$.

STŘEDY ÚSEČEK

Úloha 23. Tečny skrz A ke k se jí dotýkají v T a U . Buď M střed AT . Úsečka MU protne k podruhé v X . Dokažte, že $XA = 2 \cdot MX$.

Úloha 24. V trojúhelníku ABC s těžištěm G platí $\angle GAB = \angle GBC$. Dokažte, že $\angle GAC = \angle GCB$.

Úloha 25. Trojúhelník ABC ($AB < AC$) je vepsán do kružnice ω . Tečna k ω v A protne BC v D . Označme M střed AD a protněme MB podruhé s ω v X . Dokažte, že $\angle DXA = \angle AXC$.

Úloha 26. Na odvěsně AC pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou AB je dán bod D . Kružnice skrz D dotýkající se AB v A a kružnice skrz D dotýkající se AB v B se protnou v bodě E . Dokažte, že $\angle DEC = \angle BAC$.

Úloha 27. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme M, N středy AB, AC a D patu výšky z A . Kružnice opsané trojúhelníkům BND a CMD se protnou podruhé v E . Dokažte, že DE prochází středem MN . (ARO 2007)

Úloha 28. Na těžnici AM ostroúhlého trojúhelníka ABC je dán bod D . Kružnice k, l procházejí bodem D a dotýkají se přímky BC po řadě v bodech B, C . Strany AB, AC protnou kružnice k, l podruhé v P, Q . Ukažte, že tečna ke kružnici k vedená bodem P a tečna ke kružnici l vedená bodem Q se protínají na AM .
(Vietnam TST 2010)

Úloha 29. V ostroúhlém trojúhelníku ABC vepsaném do kružnice k označme M, N středy AB, AC, D patu A -výšky a G těžiště. Kružnice l prochází body M, N a dotýká se k v bodě $X \neq A$. Dokažte, že X, D, G leží v přímce.
(ISL 2011, G4)

RADIKÁLNÍ LEMMA

Úloha 30. Na straně BC trojúhelníka ABC s výškami BM, CN a kolmíštěm H je dán bod W . Body X, Y jsou zvoleny tak, aby WX, WY byly průměry kružnic $(BWN), (CWM)$. Dokažte, že body X, Y, H leží na přímce.
(IMO 2013, 4)

Úloha 31. Je dán ostroúhlý trojúhelník s ortocentrem H . Kružnice se středem ve středu strany BC procházející bodem H protne BC v A_1, A_2 . Body B_1, B_2, C_1, C_2 definujeme podobně. Dokažte, že těchto šest bodů leží na kružnici.
(IMO 2008, 1)

Úloha 32. V různostranném trojúhelníku ABC je $\alpha = 60^\circ$. Označme O opsíště a I vepsíště. Dokažte, že BC, OI a osa úsečky AI procházejí jedním bodem.
(Polsko 2012)

Úloha 33. Osy úhlů u A, B protnou protější strany trojúhelníka ABC v D, E a samy sebe v I . Přímka DE protne kružnici opsanou v M a N . Dokažte, že (MIN) prochází středy kružnic B - a C -připsaných.
(ala ARO 2006)

Úloha 34. Kružnice ω_1, ω_2 se středy O_1, O_2 se protínají v X a Y . Přímka skrz O_1 protne ω_2 v P a Q , přímka skrz O_2 protne ω_1 v R a S . Dokažte, že pokud P, Q, R, S leží na jedné kružnici, pak střed této kružnice leží na XY .
(USAMO 2009)

Úloha 35. Kružnice procházející body B, C trojúhelníka ABC protne jeho strany AB, AC podruhé v C', B' . Dokažte, že přímky BB', CC', HH' procházejí jedním bodem, kde H, H' jsou kolmíště trojúhelníků $ABC, AB'C'$.
(ISL 195 G7)

Úloha 36. Osy úhlů u A, B protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC podruhé v D, E a samy sebe v I . Přímka DE protne CA, CB postupně v F, G . Rovnoběžka s AD skrz F protne rovnoběžku s BE skrz G v P . Dokažte, že PI ,

AE a BD buď procházejí jedním bodem, nebo jsou navzájem rovnoběžné.

(ala ISL 2011 G5)

Úloha 37. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C . Označme D patu výšky z bodu C . Nechť X je bod uvnitř úsečky CD . Označme K ten bod na úsečce AX , pro který $BK = BC$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX , pro který $AL = AC$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK . Ukažte, že $MK = ML$. (IMO 2012, 5)

Úloha 38 (Brianchonova věta). Šestiúhelníku $ABCDEF$ je vepsána kružnice. Dokažte, že AD , BE , CF procházejí jedním bodem.

NULOVÉ KRUŽNICE

Úloha 39. Je dána kružnice k a bod A vně ní. Pro $X \in k$ označme Y průsečík osy AX a tečny k v X . Určete množinu Y .

Úloha 40. Je dán trojúhelník ABC s vepisštěm I . Kolmice na AI skrz I protne BC v A' . Podobně definujme B' a C' . Dokažte, že A' , B' , C' leží na přímce kolmé na OI , kde O je opsiště ABC .

Úloha 41. Je dána kružnice k a přímka p . Bod P probíhá p . Tečny z P ke k se jí dotýkají v T a U . Uvažme kružnici se středem P procházející body T , U . Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí dvěma společnými body.

Úloha 42. Kružnice k , l mají vnější dotyk v bodě T . Bod A probíhá kružnici l . Na kružnici k najdeme body B , C , aby AB , AC byly tečny kružnice k . Přímký BT , CT protnou kružnici l podruhé v bodech D , E . Najděte množinu průsečíků přímk DE a tečen ke kružnici l v bodě A .

Úloha 43. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran AB , AC v bodech Z , Y . Zkonstruujme rovnoběžníky $BCYR$, $BCSZ$. Dokažte, že $GR = GS$, kde $G = BY \cap CZ$. (ISL 2009, G3)

HEZKÉ ÚLOHY

Úloha 44. Uvnitř úhlu AVB je dán bod P . Přímka skrz P protne VA , VB v X , Y . Zkonstruujte přímku, pro kterou je součin $PX \cdot PY$ minimální.

Úloha 45. Bod O uvnitř trojúhelníku ABC splňuje $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle OBA = \angle OAC$ a $\angle BAO = \angle OCB$. Určete AC/OC . (Moskva 2011)

Úloha 46. Na stranách AB , AC trojúhelníku ABC s opsištěm O jsou dány body Q , P . Označme K , L , M středy BP , CQ , PQ . Dokažte, že pokud se (KLM) dotýká PQ , pak $OP = OQ$. (IMO 2009, 2)

Úloha 47. Na stranách AB , AC trojúhelníka ABC jsou dány body P , Q tak, že $AP = AQ$. Na úsečce BC jsou dány body S , R tak, že B , S , R , C leží na přímce v tomto pořadí a platí současně $\angle BPS = \angle PRS$ a $\angle CQR = \angle QSR$. Dokažte, že P , Q , R , S leží na kružnici. (USAJMO 2012)

Úloha 48. Kružnice k , l se dotýkají v bodě T . Na k zvolíme bod K . Tečna k l vedená bodem K se jí dotýká v L . Dokažte, že poměr KT/KL nezávisí na volbě bodu K na k .

Úloha 49. Je dána přímka p , kružnice k , která ji neprotíná, a bod M . Uvažme všechny kružnice, které se dotýkají p a mají vnější dotyk s k . Označme odpovídající body dotyku P a K . Dokažte, že středy kružnic opsaných všem trojúhelníkům PKM leží na přímce. (MO 57-A-I-5)

Úloha 50. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme G těžiště. Bod P na polopřímce AG splňuje $\angle CPA = \angle CAB$, bod Q na polopřímce BG splňuje $\angle CQB = \angle ABC$. Dokažte, že kružnice AQC a BPG se protínají na AB . (Kanada 2013)

TĚŽŠÍ ÚLOHY

Úloha 51. V trojúhelníku ABC s výškami AD , BE , CF označme $A' = BC \cap EF$ a podobně B' a C' . Dokažte, že A' , B' , C' leží na přímce kolmé na OH .

Úloha 52. Jsou dány dvě neprotínající se kružnice k , l . Jejich společné vnější tečny se protnou v H^+ , společné vnitřní tečny v H^- . Na k zvolme bod K tak, že přímky KH^+ , KH^- protnou l ve čtyřech bodech. Dokažte, že dva z nich tvoří průměr l a že přímka skrz zbylé dva prochází pevným bodem nezávislým na K .

Úloha 53. Je dán trojúhelník ABC splňující $\angle BAC = 30^\circ$. Dokažte, že pokud X , Y leží na polopřímkách AC , BC tak, že $OX = BY$, kde O je opsiště ABC , pak osa úsečky XY prochází pevným bodem. (Bulharsko 2006)

Úloha 54. Jsou dány trojúhelníky PAB , PCD takové, že $PA = PB$, $PC = PD$ a trojice P, A, C a B, P, D leží na přímce v těchto pořadích. Libovolná kružnice skrz A a C se středem S_1 protne kružnicí skrz B a D se středem S_2 v X a Y . Dokažte, že střed S_1S_2 je opsištěm PXY . (Japonsko 2012)

Úloha 55. Je dán $\triangle ABC$. Po přímce BC za bodem C se pohybuje X tak, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABX a ACX se protínají. Označme jejich průsečíky P , Q . Dokažte, že PQ prochází pevným bodem. (ISL 2004 G7)

Úloha 56. Jsou dány dvě kružnice k , l se středy K , L a tři přímky p , q , r neprocházející jedním bodem takové, že každá z nich vytíná stejně dlouhou tětivu

na k jako na l . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami p , q , r prochází středem úsečky KL . (Turnaj Měst 2008)

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 4. Bude to chordála.

Hint 5. Dokreslete celou kružnici.

Hint 6. Když se kružnice dotýkají, splývá chordála se společnou tečnou.

Hint 7. Měřte mocnost středu k oběma kružnicím. Alternativně je to jen radikální lemma.

Hint 8. Mocnost A k těmto kružnicím je pevná.

Hint 9. Dokažte, že E má k oběma kružnicím stejnou mocnost (přeneste součin pomocí rovnoběžky na jednu ze základů).

Hint 10. Ukažte, že druhý průsečík každé takové kružnice s AS je pevný.

Hint 11. Je to H .

Hint 12. Osa úhlu dělí protější stranu ve známém poměru.

Hint 13. Porovnejte mocnost A k l a mocnost D ke k .

Hint 14. Body B , C , D , N leží na kružnici.

Hint 15. Tipněte, kde se jí bude dotýkat. Změřte mocnost z C a D .

Hint 16. Ověřte Pythagorovu větu.

Hint 17. Vše se děje na AC a BD .

Hint 18. Zkombinujte mocnosti s Cevovou větou.

Hint 19. Sečtěte mocnosti vrcholů k ω .

Hint 20. Dokreslete osu úhlu u A a vyjádřete vše potřebné.

Hint 21. Rozdíl mocností.

Hint 22. Rozdíl mocností k opsané a I upravte na $b \cdot c - x^2$.

Hint 23. Najdi podobné trojúhelníky.

Hint 24. Interpretujte rovnost úhlů jako tečnost nějaké přímky k nějaké kružnici a využijte, že chordála pólí společnou tečnu (nebo dokreslete tětiový čtyřúhelník).

Hint 25. Buď dokreslete současně rovnoběžník a tětiový čtyřúhelník, nebo druhou kružnici ke společné tečně. Doúhlete.

Hint 26. Střed přepony je současně opsiště.

Hint 27. Měřte podél MN , trojúhelníky BMD a DNC jsou rovnoramenné.

Hint 28. Těžnice je chordála k a l , takže $BCQP$ je tětiový (mocnost z A). Hledaný průsečík označte X a dokažte, že trojúhelník PXQ je rovnoramenný (u P, Q znáte úhly).

Hint 29. Protněte tečny v A a X a posléze najděte tětiový čtyřúhelník.

Hint 30. Protněte (BWN) , (CWM) podruhé.

Hint 31. Nejdřív radikálním lemmatem dokažte, že na kružnici leží čtveřice B_1, B_2, C_1, C_2 , podobně pro další dvě čtveřice. Mohlo by jít o tři různé kružnice?

Hint 32. Kde protne osa AI opsanou?

Hint 33. Dokazujte, že D a E leží na chordále kružnice opsané $\triangle ABC$ a kružnice skrz I a dvě přísiště.

Hint 34. Označte $PQ \cap RS$ a po chordále najděte ortocentrum, nebo opakovaně použijte definici mocnosti.

Hint 35. Dokreslete další dvě kružnice, aby byly přímky BB', CC', HH' jejich chordály.

Hint 36. Pro radikální lemma najděte dvě kružnice a ukažte, že $X = DE \cap PI$ k nim má stejnou mocnost.

Hint 37. Před použitím radikálního lemmatu dokreslete kružnice a protáhněte úsečky na přímky.

Hint 38. Dokreslete tři kružnice tak, aby byly AD, BE, CF jejich chordály.

Hint 39. Uvažte A jako kružnici s nulovým poloměrem.

Hint 40. Uvažte I jako kružnici s nulovým poloměrem, nebo spočtete rozdíl mocností k opsané a vepsané.

Hint 41. Přímka p je chordála k a nějakého bodu.

Hint 42. Dokažte, že DE je chordála k a bodu A .

Hint 43. Dokreslete A -připsanou.

Hint 44. Vepište do AVB vhodnou kružnici.

Hint 45. Dokreslete obraz C přes OB .

Hint 46. Nejdříve vyúhlete podobné trojúhelníky a přepište poměry na součiny.

Hint 47. Kdyby se kružnice (PRS) a (QRS) lišily, co by byla jejich chordála?

Hint 48. Zkombinujte mocnost se stejnolehlostí.

Hint 49. Všimněte si, že přímka PK prochází pevným bodem.

Hint 50. Úhlové podmínky přeložte na tečnosti. Tipněte správný bod na AB .

Hint 51. Najděte dvě kružnice, ke kterým má A' stejnou mocnost.

Hint 52. Kombinací mocnosti a stejnolehlosti vyjádřete pevné poměry. Menelaus.

Hint 53. Ze symetrie – co to bude za bod? Dokreslete druhé průsečíky kružnic a přímek.

Hint 54. Součet mocností.

Hint 55. Osa úhlu, střední příčka a spojnice bodů dotyku procházejí jedním bodem.

Hint 56. Chordála, střední příčka a Simsonova přímka.

REFERENCE

- [1] Andreescu, Rolinek, Tkadlec: *106 Geometry Problems*, XYZ Press, 2013.
- [2] Andreescu, Rolinek, Tkadlec: *107 Geometry Problems*, XYZ Press, 2013.
- [3] Altschiller-Court: *College Geometry*, Dover, 2007.
- [4] Coxeter, Greitzer: *Geometry Revisited*, MMA, 1967.
- [5] Archiv soutěží na stránce <http://mathlinks.ro/resources.php>.

DOKAZOVANIE DELITEĽNOSTÍ

MARTIN „VODKA“ VODIČKA

ABSTRAKT. Príspevok obsahuje úlohy na dokazovanie deliteľností, ktoré sa dajú riešiť použitím takmer ničoho, no aj tak bývajú na MO ako ťažké úlohy.

Pomerne veľa olympiádnych úloh z teórie čísel vyzerá tak, že máme dokázať, že niečo delí niečo iné. Pri týchto úlohách často nie je potrebné použiť veľa zbraní, ale treba ich použiť veľmi efektívne.

Väčšinou pomôže si to zapísať ako kongruenciu. Keď máme zlomky, je tiež dobré ich nechať tak a pracovať so zlomkovými kongruenciami. Definujeme ich napr. takto:

Definícia. Ak $(a, p) = 1$, tak $\frac{1}{a} \equiv a^{-1} \pmod{p}$, kde a^{-1} je také číslo, že $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Keďže a, p sú nesúdeliteľné, je jasné, že taký je práve 1 zvyšok. Lahko overíme, že také kongruencie vieme sčítať a násobiť normálne.

Samozrejme všetko ide aj bez nich, ale výrazne uľahčujú robotu, lebo môžeme bez obáv krátiť zlomky modulo nejaké prvočíslo. A nevadí nám, že nezostanú celé čísla. Avšak musíme si dať pozor, ak máme v menovateli niečo súdeliteľné, vtedy to musíme pokrátiť normálne a až potom nasadiť kongruencie.

Okrem toho hlavne pri práci s mocninami používame klasické vety:

Veta (Malá Fermatova). $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Veta (Eulerova). Ak $(a, n) = 1$, potom $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Ďalšia dobrá technika je v sume alebo v súčine nejako popárovať členy, ktoré spolu dávajú niečo pekné. Ako pri dôkaze Wilsonovej vety

Veta (Wilsonova). $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Hodí sa poznať vzorce na súčet mocnín. Predsa len zabíť 10 minút odvodzovaním je nanič.

Lemma (Trololo).

$$\begin{aligned} (1) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ (2) \quad 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \\ (3) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

A aj ak si ich nepamätáte, hodí sa vedieť jednu vec:

Lemma (Myjava). *Ak p je prvočíslo, $p-1 \nmid k$, tak*

$$p \mid \sum_{i=0}^{p-1} i^k.$$

Okrem takýchto príkladov sú časté príklady, kde nejaká deliteľnosť platí pre všetky čísla a z toho máme niečo vyvodiť. V týchto úlohach väčšinou stačí dosadiť správne číslo. No nájsť ho je ťažké. Treba len skúšať, skúšať a skúšať. Vhodné sú nejaké prvočísla alebo niečo, čo tú deliteľnosť zjednoduší.

No najlepšie je mať už niečo narátané, lebo budete mať lepšiu intuíciu. A preto:

JUPÍ IDEME RÁTAŤ!

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky prvočísla $p > 3$ platí

$$p^3 \mid \binom{2p-1}{p-1} - 1.$$

Úloha 2. Nájdite všetky prvočísla p také, že

$$p^3 \mid \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i}^2.$$

(CPS 2008)

Úloha 3. Dané sú nepárne prirodzené čísla $m > 1$, k a prvočíslo p také, že $p > mk + 1$. Dokážte, že

$$p^2 \mid \binom{k}{k}^m + \binom{k+1}{k}^m + \dots + \binom{p-1}{k}^m.$$

(Kazachstan 2011)

Úloha 4. Nech $k \geq 2$ je celé. Dokážte, že 2^{3k} delí číslo $\binom{2^{k+1}}{2^k} - \binom{2^k}{2^{k-1}}$, ale 2^{3k+1} nie. (Shortlist 2007)

Úloha 5. Nech n je a prirodzené. Dokážte, že čísla

$$\binom{2^n - 1}{0}, \binom{2^n - 1}{1}, \binom{2^n - 1}{2}, \dots, \binom{2^n - 1}{2^{n-1} - 1}$$

sú kongruetné $1, 3, 5, \dots, 2^n - 1$ (modulo 2^n) v nejakom poradí.

(Shortlist 2008)

Úloha 6. Nech $p > 2$ je prvočíslo. Dokážte, že

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv -1 \pmod{p^3}.$$

(Monogolsko TST 2011)

Úloha 7. Nech $p > 3$ je prvočíslo a $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. Dokážte, že $n \mid 2^n - 2$.

(iKS N4, prvý ročník)

Úloha 8. Nech p je prvočíslo a $n > p$. Dokážte, že

$$p \mid \binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

(India 2003)

Úloha 9. Prvočíslo $p > 3$ dáva zvyšok 2 po delení 3. Nech $a_k = k^2 + k + 1$ pre $k = 1, 2, \dots, p-1$. Dokážte, že $a_1 a_2 \dots a_{p-1} \equiv 3 \pmod{p}$.

(Poľsko)

Úloha 10. Nájdite všetky prvočísla p , že

$$p^3 \mid \sum_{i=1}^{p-1} i^{3p}.$$

(Slovenské výberko 2010)

Úloha 11. Nech $p > 3$ je prvočíslo. Dokážte, že

$$p \mid 1 + \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk.$$

Úloha 12. Nech p je nepárne prvočíslo. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^{p-2} \equiv \frac{2-2^p}{p} \pmod{p}.$$

(Singapore 2012, iKS N3, 2. ročník)

Úloha 13. Dokážte, že pre prvočíslo p platí

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}.$$

(Kanada 2004)

Úloha 14. Nech $q = \frac{3p-5}{2}$, kde p je nepárne prvočíslo, a

$$S_q = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$

Dokážte, že ak $\frac{1}{p} - 2S_q = \frac{m}{n}$ pre celé m, n , tak $p \mid m - n$. (USA 2010)

Úloha 15. Nech A je nekonečná množina prirodzených čísel. Nájdí všetky n také, že pre každé $a \in A$, $a^n + a^{n-1} + \cdots + a^1 + 1 \mid a^{n!} + a^{(n-1)!} + \cdots + a^{1!} + 1$. (Srbsko 2010)

Úloha 16. Nech p je prvočíslo. Dokážte, že existuje prvočíslo q také, že q nedelí $n^p - p$ pre žiadne n . (Shortlist 2003)

Úloha 17. Nech $p \geq 5$ je prvočíslo. Dokážte, že existuje celé číslo a ($1 \leq a \leq p-2$) také, že ani $a^{p-1} - 1$, ani $(a+1)^{p-1} - 1$ nie sú deliteľné p^2 . (Shortlist 2001)

Úloha 18. Nájdí všetky prvočísla p také, že existuje nekonečne veľa prirodzených n , pre ktoré platí: $p \mid n^{n+1} + (n+1)^n$. (China 2012)

Úloha 19. Pre všetky prirodzené n platí $b^n + n \mid a^n + n$. Dokážte, že $a = b$. (Shortlist 2005)

Úloha 20. Nájdite všetky také n , že existuje práve jedno $a < n!$ také, že $n! \mid a^n + 1$.

Úloha 21. Nech m a n sú prirodzené. Dokážte, že

$$6m \mid (2m+3)^n + 1 \Leftrightarrow 4m \mid 3^n + 1.$$

(Vietnam 2008)

HINTY K ÚLOHÁM

Hint 1. $2p - i = p + (p - i)$, roznásobiť a to, čo ostalo, je dosť jednoduchšie, použiť zlomky a popárovať.

Hint 2. Deliteľnosť p^2 je zrejmá, vydeliť a ostane len jednoduchý súčet zlomkov.

Hint 3. Tentoraz preč so zlomkami a vynásobme $k!$. Popárujte prvý s posledným atď. a máte deliteľnosť p . Zmodulujte p^2 . To, čo ostalo, vyzerá ako nejaké $P(0) + P(1) + \dots + P(\frac{p-k-1}{2})$, kde P je polynóm. Neviete ten súčet predĺžiť po $p-1$? Potom Myjava.

Hint 4. Upravte na jeden zlomok a povyberajte z čitateľa všetky mocniny 2 a zvyšok dajte na súčin. Oстане spočítať, ktorá mocnina 2 delí

$$(2^k + (2^k - 1)) \cdots (2^k + 1) - (2^k - 1) \cdots 3 \cdot 1.$$

A to stačí zmodulovať 2^{3k} . Dobré sa pracuje so zlomkami...

Hint 5. Zapište si kombinačné čísla ako zlomky, pokrátte ich modulo 2^n . Čo ostalo? Vyzerá to na indukciu. Súčet dvoch susedných je dokonca deliteľný 2^n , do indukcie treba aj to, že 2^{n+1} už nie.

Hint 6. Prvý a posledný člen nechajte bokom, zvyšné upravte, vyberte p a zmodulujte p^2 . Ostal len ten posledný člen, dá sa ručne, ale čo prvá úloha? :)

Hint 7. Zrejme $n \mid 2^{2p} - 1$, nedalo by sa z toho dostať k tej deliteľnosti?

Hint 8. Pokrátte to kombinačné číslo modulo p .

Hint 9. $k^2 + k + 1 = \frac{k^3-1}{k-1}$, môže sa stať, že $a^3 \equiv b^3$?

Hint 10. Popárujte členy $i^{3p} + (p-i)^{3p}$

Hint 11. Vyjadrite to len pomocou súčtu, súčtu druhých a súčtu tretích mocnín. A to ľahko zmodulujete.

Hint 12. 2^p si zapište ako súčet kombinačných čísel, pokrátte p a pracujte so zlomkami.

Hint 13. Popárujte členy $i^{2p-1} + (p-i)^{2p-1}$.

Hint 14. $\frac{1}{(3k-1)3k(3k+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} + \frac{1}{2} \frac{1}{3k+1}$. Najlepšie by bolo mať aj tam $+\frac{1}{2} \frac{1}{3k}$, čo musíme pripočítať? A potom už len ľahko zmodulovať zlomky.

Hint 15. Prenásobte tú deliteľnosť $(a-1)$. Potom už budú podstané zvyšky exponentov po delení $(n+1)$

Hint 16. Kongruencia s mocninou je fajn, ak má na pravo 1. Žiaľ položiť $p \equiv 1$ nefunguje, no čo takto zvýšiť exponent až na p^2 a potom tam dať 1?

Hint 17. Môžu aj $a^{p-1} - 1$, aj $(p-a)^{p-1} - 1$ byť deliteľné p^2 ?

Hint 18. $n = p - 2$

Hint 19. Skúste zariadiť, aby nejaké veľké prvočíslo delilo $b^n + n$.

Hint 20. Skúste také a nájsť, ak nevíete nájsť druhé, skúste pomocou Eulera dokázať, že už iné nie je.

Hint 21. Vyzerá to skoro ako zrejmé tvrdenie, no len pre nepárne m . Avšak pravá strana pre párne m nemôže platiť – treba ukázať, že ani ľavá. A po troche hrania sa zo zvyškami po delení 3 a 4 vyjde, že treba dokázať, že $3^n + 1$, kde n je nepárne, nemá prvočíselného deliteľa tvaru $6k - 1$, a tam pomôže reciprocita.

Obsah

Schur a SoS (Filip „Hiphop“ Hanzely)	3
Lineární algebra v kombinatorice (David Hruška)	8
Slabé funkcionální rovnice (Mirek Olšák)	15
Diofantovské rovnice (Pepa Svoboda)	20
Vektory v analytickej geometrii (Jakub „Xellos“ Šafín)	25
Kombinatorické konstrukce (Štěpán Šimsa)	32
Mocnost bodu ke kružnici (Pepa Tkadlec)	39
Dokazovanie deliteľností (Martin „Vodka“ Vodička)	49