



*i*KS

2026  
Kunžak

Adam Džavoronok  
David Hromádka  
Jakub Krivošík  
Michal Pecho  
Zdeněk Pezlar  
Dominik Rigasz  
Martin Šindelář  
Martin Štěpánek  
Jakub Šošovička



# Čudná geometria

Adam Džavoronok

**Abstrakt.** Tento príspevok zoznamuje s prístupmi riešenia geometrických úloh, ktoré sa vymykajú štandardným zadaniam a obsahujú „čudné“ podmienky alebo obsahujú konfigurácie s 2026 bodmi.

## Konštrukcie a Dokresľovanie

Zhrnieme si zopár prístupov ako bojovať s na prvý pohľad zvláštnymi podmienkami.

- Ak je v zadaní nejaká dĺžková podmienka vo veľkej časti prípadov sa oplatí dokresliť nejaký vhodný pomocný bod.
- Skús zamyslieť, ako by si daný bod vhodne skonštruovať
- Wishful thinking: Čo by tak mohlo platiť, aby sa dané podmienky mohli dať do súvisu.
- Neboj sa predefinovať si body.

Nezabudnime, pritom myslieť aj na zvyšok konfigurácie a rozmyslieť si ako sa dajú vhodne preniesť dĺžky uhly sa pomocou projekcií alebo obvodových uhlov. Častým trikom je taktiež vhodne predĺžiť úsečky v obrázku, aby sa nám uhlová podmienka objavila v obrázku.

## Začíname sa čudovať

**Úloha 1.** V pravidelnom päťuholníku  $ABCDE$  sa kolmica z bodu  $C$  na priamku  $CD$  pretína s priamkou  $AB$  v bode  $F$ . Dokážte, že  $AE + AF = BE$ .

(IGO 2017 E3)

**Úloha 2.** V trojuholníku  $ABC$  vnútorná osa uhla  $\angle ABC$  pretína  $AC$  v bode  $P$ . Nech  $I$  je stred kružnice vpísanej trojuholníka  $ABC$ . Dokážte, že ak  $AP + AB = CB$ , potom  $API$  je rovnoramenný trojuholník.

(Brazília 2006)

**Úloha 3.** Kružnica má stred na strane  $AB$  tetivového štvoruholníka  $ABCD$ . Ostatné tri strany sa dotýkajú kružnice. Dokážte, že  $AD + BC = AB$ .

(IMO 1985)

**Úloha 4.** Nech  $ABCD$  je lichobežník so základňami  $AB$  a  $CD$ , v ktorom platí  $AB + CD = AD$ . Uhlopriečky  $AC$  a  $BD$  sa pretínajú v bode  $E$ . Priamka prechádzajúca bodom  $E$  a rovnobežná so základňami lichobežníka pretína  $AD$  v bode  $F$ . Dokážte, že  $\angle BFC = 90^\circ$ .

(Poľsko juniori 2018)

**Úloha 5.** Bod  $P$  leží vnútri trojuholníka  $ABC$ , takže  $\angle ABP = \angle PCA$ . Bod  $Q$  je taký, že  $PBQC$  je rovnobežník. Dokážte, že  $\angle QAB = \angle CAP$ .

(Británia 2012)

**Úloha 6.** Bod  $O$  leží vnútri rovnobežníka  $ABCD$  tak, že  $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ . Dokážte, že  $\angle OBC = \angle ODC$ . (Kanada 1997)

**Úloha 7.** Nech vnútorný bod  $P$  konvexného štvoruholníka  $ABCD$  je taký, že

$$\angle PAD = \angle ADP = \angle CBP = \angle PCB = \angle CPD.$$

Nech  $O$  je stredom ( $CPD$ ). Dokážte, že  $OA = OB$ . (CKMO 2024)

**Úloha 8.** Nech  $ABCD$  je konvexný štvoruholník a bod  $P$  spĺňajúci:  $AB = AP$ ,  $DP = DC$ ,  $\angle PBA = 2\angle PAD$  a  $\angle PCD = 2\angle PDA$ . Označme  $O$  stred ( $PBC$ ) a  $M$  stred  $OP$ . Dokážte  $MA = MD$  (DuoGeo)

**Úloha 9.** Vnútri tetivového štvoruholníka  $ABCD$  sú body  $P$  a  $Q$ , také že  $\angle PDC + \angle PCB$ ,  $\angle PAB + \angle PBC$ ,  $\angle QCD + \angle QDA$  a  $\angle QBA + \angle QAD$  sú všetky rovné  $90^\circ$ . Dokážte, že priamka  $PQ$  zvierá s priamkami  $AD$  a  $BC$  rovnaký uhol. (ARO 2013)

**Úloha 10.** V konvexnom štvoruholníku  $ABCD$  sa uhlopriečky  $AC$  a  $BD$  pretínajú v bode  $P$ . Vieme, že  $\angle DAC = 90^\circ$  a  $2\angle ADB = \angle ACB$ . Ak máme  $\angle DBC + 2\angle ADC = 180^\circ$ , dokážte, že  $2AP = BP$ . (IGO 2018 I2)

**Úloha 11.** Daný je konvexný šesťuholník  $ABCDEF$  taký, že  $AB = BC, CD = DE \neq AD, EF = FA$  a  $\angle BDC + \angle EDF = \angle FDB$ . Dokažte, že  $\angle CBA + \angle EDC + \angle AFE = 360^\circ$  (KKMO 2026)

**Úloha 12.** Nech  $ABC$  je trojuholník s uhlom  $\angle BAC = 60^\circ$ . Nech  $AP, BQ$  sú osy uhlov  $\angle BAC$  a  $\angle ABC$  pričom  $P$  leží na úsečke  $BC$  a  $Q$  leží na úsečke  $AC$ . Ak platí, že  $AB + BP = AQ + QB$ , aké sú uhly trojuholníka  $ABC$ ? (IMOSL 2001)

## Neprestávame sa diviť

**Úloha 13.** Obdĺžniky  $BCC_1B_2, CAA_1C_2$  a  $ABB_1A_2$  sú skonštruované mimo ostreho trojuholníka  $ABC$ . Predpokladajme, že

$$\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180^\circ.$$

Dokáž, že priamky  $B_1C_2, C_1A_2$  a  $A_1B_2$  sa pretínajú v 1 bode. (USAMO 2021)

**Úloha 14.** Majme konvexný štvoruholník  $ABCD$ . Bod  $P$  leží vo vnútri  $ABCD$ . Platia nasledujúce pomerové rovnosti:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Dokáž, že nasledujúce tri priamky sa pretnú v jednom bode: vnútorné polpriamky uhlov  $\angle ADP$  a  $\angle PCB$  a os úsečky  $AB$ . (IMO 2020)

**Úloha 15.** Nech  $ABCD$  je tetivový štvoruholník s  $\angle BAD < \angle ADC$ . Nech  $M$  je stred oblúka  $CD$ , ktorý neobsahuje bod  $A$ . Predpokladajme, že existuje bod  $P$  vnútri  $ABCD$  taký, že  $\angle ADB = \angle CPD$  a  $\angle ADP = \angle PCB$ . Dokáž, že priamky  $AD, PM$  a  $BC$  sa pretínajú v jednom bode. (IMOSL 2023)

**Úloha 16.** Nech  $ABCDE$  je konvexný päťuholník a nech  $M$  je stredom úsečky  $AB$ . Predpokladajme, že úsečka  $AB$  je dotyčnicou kružnici ( $CME$ ) v bode  $M$  a že bod  $D$  leží na kružniciach ( $AME$ ) a ( $BMC$ ). Priamky  $AD$  a  $ME$  sa pretínajú v bode  $K$  a priamky  $BD$  a  $MC$  sa pretínajú v bode  $L$ . Body  $P$  a  $Q$  ležia na priamke  $EC$  tak, že  $\angle PDC = \angle EDQ = \angle ADB$ . Dokáž, že priamky  $KP, LQ$  a  $MD$  sa pretínajú v jednom bode. (IMOSL 2024)

**Úloha 17.** V trojuholníku  $ABC$  leží bod  $A_1$  na strane  $BC$  a bod  $B_1$  leží na strane  $AC$ . Nech  $P$  a  $Q$  sú body na úsečkách  $AA_1$  a  $BB_1$ , tak, že  $PQ$  je rovnobežná s  $AB$ . Nech  $P_1$  je bod na priamke  $PB_1$ , taký, že  $B_1$  leží presne medzi  $P$  a  $P_1$  a  $\angle PP_1C = \angle BAC$ . Podobne nech  $Q_1$  je bod na priamke  $QA_1$ , taký, že  $A_1$  leží presne medzi  $Q$  a  $Q_1$  a  $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ . Dokáž, že body  $P, Q, P_1$  a  $Q_1$  sú na jednej kružnici. (IMO 2019)

**Úloha 18.** Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník s  $AB < AC$  a nech  $D$  a  $E$  sú body na strane  $BC$  tak, že  $BD = CE$  a  $D$  leží medzi  $B$  a  $E$ . Predpokladajme, že existuje bod  $P$  vnútri  $ABC$  taký, že  $PD \parallel AE$  a  $\angle PAB = \angle EAC$ . Dokážte, že  $\angle PBA = \angle PCA$ . (ELMO 2012)

**Úloha 19.** Nech  $ABCD$  je štvoruholník taký, že  $AB = BC = CD$ . Na polpriamkach  $CA, BD$  ležia body  $X, Y$  tak, že  $BX = CY$ . Nech  $P, Q, R, S$  sú stredy úsečiek  $BX, CY, XD, YA$ . Dokážte, že body  $P, Q, R, S$  ležia na kružnici. (CAPS 2024)

**Úloha 20.** Nech  $P$  je bod vo vnútri štvoruholníka  $ABCD$  taký, že:

$$\angle BPC = 2\angle BAC \quad , \quad \angle PCA = \angle PAD \quad , \quad \angle PDA = \angle PAC$$

Dokážte  $\angle PBD = |\angle BCA - \angle PCA|$ . (Iran TST 2017)

**Úloha 21.** Nech  $ABC$  je trojuholník s ťažiskom  $G$ . Body  $R$  a  $S$  sú zvolené na polpriamkach  $GB$  a  $GC$  tak, že  $\angle ABS = \angle ACR = 180^\circ - \angle BGC$ . Dokážte, že  $\angle RAS + \angle BAC = \angle BGC$ . (USA TSTST)

**Úloha 22.** V trojuholníku  $ABC$  nech  $O$  a  $H$  je stred opísanej kružnice a ortocentrum. Bod  $P$  je obrazom bodu  $A$  vzhľadom na  $OH$ . Predpokladajme, že bod  $P$  nie je na tej istej strane ako bod  $A$  v trojuholníku  $BC$ . Body  $E, F$  ležia na stranách  $AB, AC$  tak, že  $BE = PC$ ,  $CF = PB$ . Nech  $K$  je priesečník  $AP, OH$ . Dokážte, že  $\angle EKF = 90^\circ$  (Iran TST 2017)

**Úloha 23.** Nech  $ABCDE$  je konvexný päťuholník taký, že  $BC \parallel AE$ ,  $AB = BC + AE$ , a  $\angle ABC = \angle CDE$ . Nech  $M$  je stredom úsečky  $CE$  a nech  $O$  je stredom ( $BCD$ ). Za predpokladu, že  $\angle DMO = 90^\circ$ , dokážte, že  $2\angle BDA = \angle CDE$ . (IMOSL 2010)

## Veľa bodov

Keď sa v zadaní vyskytne veľa bodov, môže to pôsobiť celkom odstrašujúco. Na druhej strane častokrát úloha je riešiteľná celkom dobre analyticky alebo vektorovým nadhľadom. Pri tomto prístupe sa často využije nasledovné lematko.

**Lema.** Ak je  $n$ -uholník orientovaný, súčet vektorov zodpovedajúcich stranám je nulový.

Ak chceme riešiť úlohu synteticky určite pomôže sa pozrieť iba na nejakú „lokálnu“ konfiguráciu a toto pozorovanie uplatniť. Častokrát sa pritom zide hľadať a hádať možné tetivovce a špirálky.

**Úloha 24.** Na stranách rovnostranného trojuholníka  $ABC$  je zvolených šesť bodov:  $A_1, A_2$  na  $BC$ ,  $B_1, B_2$  na  $CA$  a  $C_1, C_2$  na  $AB$ , tak, že sú vrcholmi konvexného šesťuholníka  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  s rovnakými dĺžkami strán. Dokážte, že priamky  $A_1B_2$ ,  $B_1C_2$  a  $C_1A_2$  sa pretínajú v jednom bode. (IMO 2005)

**Úloha 25.** Nech  $ABCDEF$  je konvexný šesťuholník s  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $CD = FA$  a  $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$ . Dokážte, že uhlopriečky  $AD$ ,  $BE$  a  $CF$  sa pretínajú v jednom bode. (IMOSL 2013)

**Úloha 26.** Nech  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  je pravidelný  $n$ -uholník. Nech  $B_1$  a  $B_{n-1}$  sú stredy jeho strán  $A_1A_2$  a  $A_{n-1}A_n$ . Takisto pre každé  $i \in \{2, 3, 4, \dots, n-2\}$ . Nech  $S_i$  je priesečník priamok  $A_1A_{i+1}$  a  $A_nA_i$  a nech  $B_i$  je priesečník vnútornej osi uhla  $\angle A_iS_iA_{i+1}$  s úsečkou  $A_iA_{i+1}$ . Dokážte, že  $\sum_{i=1}^{n-1} \angle A_1B_iA_n = 180^\circ$ .

**Úloha 27.** V rovine leží dva pravidelné (ne nutne shodné)  $2n$ -úhelníky, jejichž průnikem je  $4n$ -úhelník  $P_1P_2 \dots P_{4n}$ . Uvážime-li každou druhou jeho úhlopříčku, tedy  $P_{2k+1}P_{2k+1+2n}$  pro  $0 \leq k \leq n-1$ . Pak všech  $n$  těchto úhlopříček prochází jedním bodem. (iKS 11/5)

**Úloha 28.** Nech  $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$  je rovnostranný šesťuholník. Nech  $O_1$  a  $H_1$  označujú stred opisanej kružnice a ortocentrum trojuholníka  $\triangle A_1B_1C_1$  a nech  $O_2$  a  $H_2$  označujú stred opisanej kružnice a ortocentrum trojuholníka  $\triangle A_2B_2C_2$ . Predpokladajme, že  $O_1 \neq O_2$  a  $H_1 \neq H_2$ . Dokážte, že priamky  $O_1O_2$  a  $H_1H_2$  sú buď rovnobežné, alebo sa zhodujú. (USEMO 2021)

**Úloha 29.** Nech  $d \geq 3$  a nech  $A_1 \dots A_{d+1}$  je simplex (konvexný obal  $d + 1$  bodov, ktoré neležia v spoločnej nadrovine.) Pre každé  $i = 1, \dots, d + 1$  nech  $O_i$  leží v nadrovine  $A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_{d+1}$  a má rovnakú vzdialenosť od všetkých bodov  $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{d+1}$ . Pre každé  $i$  vedme priamku prechádzajúcu bodom  $A_i$  kolmú na nadrovinu  $O_1 \dots O_{i-1} O_{i+1} \dots O_{d+1}$ . Dokážte, že tieto priamky sú buď rovnobežné, alebo majú spoločný bod. (VJIMC 2016)

**Úloha 30.** Nech  $P_1 P_2 \dots P_{100}$  je tetivový 100-uholník a nech  $P_i = P_{i+100}$  pre všetky  $i$ . Definujme  $Q_i$  ako priesečník uhlopriečok  $\overline{P_{i-2} P_{i+1}}$  a  $\overline{P_{i-1} P_{i+2}}$  pre všetky celé čísla  $i$ . Predpokladajme, že existuje bod  $P$ , ktorý spĺňa  $\overline{PP_i} \perp \overline{P_{i-1} P_{i+1}}$  pre všetky celé čísla  $i$ . Dokážte, že body  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{100}$  ležia na kružnici. (USA TST)

## Geometrické nerovnosti

Niekedy sa objaví úloh, kedy máme ukázať nejakú nerovnosť. Častokrát sa len algebraicky ubuší ale niekedy je potrebné využiť nejaké geometrické tvrdenie alebo úvahu.

**Úloha 31.** V trojuholníku  $ABC$  uvažme vnútorný bod  $M$ . Dokážte, že

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + AC + BC.$$

(IMOSL 1999)

**Úloha 32.** Nech  $ABCD$  je tetivový štvoruholník taký, že  $\angle BAD \leq \angle ADC$ . Dokážte, že  $AC + CD \leq AB + BD$ .

**Úloha 33.** Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník. Nech  $\omega$  je kružnica, ktorej stred  $L$  leží na strane  $BC$ . Predpokladajme, že  $\omega$  sa dotýka  $AB$  v bode  $B'$  a  $AC$  v bode  $C'$ . Predpokladajme tiež, že stred kružnice  $(ABC)$  leží na kratšom oblúku  $B'C'$  kružnice  $\omega$ . Dokážte, že  $(ABC)$  a kružnica  $\omega$  sa pretínajú v dvoch bodoch. (IMOSL 2011)

**Úloha 34.** Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník vpísaný do kružnice  $\Gamma$ . Nech  $A_1$  je kolmá projekcia bodu  $A$  na priamku  $BC$  tak, že  $AA_1$  je výška. Nech  $B_1$  a  $C_1$  sú kolmé projekcie bodu  $A_1$  na úsečky  $AB$  a  $AC$ . Bod  $P$  je taký, že štvorec  $AB_1 P C_1$  je konvexný a má rovnakú plochu ako trojuholník  $ABC$ . Je možné, aby bod  $P$  ležal výlučne vo vnútri kružnice  $\Gamma$ ? (APMO 2025)

**Úloha 35.** V konvexnom šesťuholníku  $ABCYXD$  máme  $\angle ACY = \angle BDX = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 2\angle CAY$ ,  $\angle ABD = 2\angle DBX$ ,  $XY = DX + CY$ . Dokážte, že

$$\sqrt{(CD - DX)(CD - CY)} \leq \frac{AC + BD - AB}{2}.$$

**Úloha 36.** Je daný ostrouhlý trojuholník  $ABC$  a  $H$  a  $O$  sú jeho ortocentrum a stred opísanej kružnice. Nech  $K$  je stredom úsečky  $AH$  a  $\ell$  je priamka prechádzajúca bodom  $O$ . Nech  $P$  a  $Q$  sú priesečníky bodov  $B$  a  $C$  s priamkou  $\ell$ . Dokážte, že  $KP + KQ \geq BC$ . (RMM 2023)

**Úloha 37.** Nech  $ABC$  je trojuholník a  $D$  bod na jeho strane  $BC$ . Body  $E, F$  ležia na polpriamkach  $AB, AC$  za vrcholmi  $B, C$  tak, že  $BE = BD$  a  $CF = CD$ . Nech  $P$  je bod taký, že  $D$  je stredom kružnice vpísanej trojuholníka  $PEF$ . Dokážte, že  $P$  leží vnútri  $(ABC)$  alebo na nej. (CAPS 2024)

**Úloha 38.** Nech  $P$  je bod vo vnútri trojuholníka  $ABC$ . Nech  $AP$  pretína  $BC$  v bode  $A_1$ , nech  $BP$  pretína  $CA$  v bode  $B_1$  a nech  $CP$  pretína  $AB$  v bode  $C_1$ . Nech  $A_2$  je bod taký, že  $A_1$  je stredom úsečky  $PA_2$ , nech  $B_2$  je bod taký, že  $B_1$  je stredom úsečky  $PB_2$ , a nech  $C_2$  je bod taký, že  $C_1$  je stredom úsečky  $PC_2$ . Dôkaz, že body  $A_2, B_2$  a  $C_2$  nemôžu ležať všetky striktne vnútri  $(ABC)$ . (IMOSL 2019)

## Literatúra a zdroje

- [1] Evan Chen: *Weird Geometry*; <https://web.evanchen.cc/static/otis-samples/ZGX-weirdgeo.pdf>
- [2] CJ Quines: *Constructions*; <https://cjquines.com/files/constructions.pdf>

# Hinty

**Hint 1.** Dokreslite  $F'$  na polpriamke  $EA$ , aby  $FA = F'A'$ .

**Hint 2.** Dokreslite  $P'$  na priamke  $AB$ , že  $AP = AP'$ .

**Hint 3.** Voľ  $T$  na  $AB$ , že  $DA = AT$ .

**Hint 4.**  $P$  na  $AD$  že  $AB = AP, CD = PD$ .

**Hint 5.** Doplň  $APB$  na rovnobežník.

**Hint 6.** Doplňte vhodne na rovnobežník.

**Hint 7.** Začni kresliť obrázok bodom  $P$ .

**Hint 8.** Začni kresliť obrázok bodom  $P$ .

**Hint 9.** Čo hovorí podmienka?

**Hint 10.** Nejak preklop  $P$

**Hint 11.** Niečo vhodne preklop

**Hint 12.** Nech  $X$  a  $Y$  sú body na polpriamke  $\overrightarrow{AB}$  a úsečke  $\overline{AC}$  tak, že  $BX = BP$  a  $BQ = QY$ .

**Hint 13.** Čo dokresliť do obrázka, aby si mohol použiť uhlovú podmienku?

**Hint 14.** Uhádni, čo by mohol byť ten priesečník.

**Hint 15.** Niečo vhodne pretni

**Hint 16.** Niečo vhodne pretni

**Hint 17.** Niečo vhodne pretnite

**Hint 18.** Doplň vhodné rovnobežníky.

**Hint 19.** Dokresli dačo, aby si mohol mocniť

**Hint 20.** Dokresli  $T$ , aby  $\triangle BPT \sim \triangle APC \sim \triangle DPA$

**Hint 21.** Dokresli dačo, aby si mohol „mocniť.“

**Hint 22.** Preklop  $P$  podľa stredú  $BC$

**Hint 23.**  $P$  na  $\overrightarrow{AE}$  tak, že  $AP = AB$

**Hint 24.** Vektory

**Hint 25.** Najprv sa zamysli, čo znamená podmienka. Potom opäť vektory a trochu otáčania.

**Hint 26.** Zameraj sa na  $A_1A_iA_{i+1}A_n$ . Možno sa zídu harmonické zväzky.

**Hint 27.** Nájdi vhodnú špirálku

**Hint 28.** Niečo múdro dokresli a vektory.

**Hint 29.** Skúste si rozmyslieť najprv  $d = 2$  a  $d = 3$  a vymyslieť vhodné zovšeobecnenie.

**Hint 30.** glhf

**Hint 31.** Vhodne si trojuholník rozdeľte

**Hint 32.** Buď sinujte alebo dokreslite vhodný stred oblúku

**Hint 33.** Ukážte, že  $\angle BAC \leq 60^\circ$ .

**Hint 35.** Dokreslite si vhodné osi uhlov a päty výšok a bash.

**Hint 36.** Dokreslite stred  $BC$  a spomeňte si na známu geometrickú nerovnosť

**Hint 37.** Pozrite sa na  $(AEF)$

**Hint 38.** Uváž vhodnú afinnú transformáciu

# Kombinatorická geometrie

David Hromádka

**Abstrakt.** Úlohy z kombinatorické geometrie se objevují napříč olympiádní i vysokoškolskou matematikou. Jejich řešení jsou dost často triková, hezká, ale i těžká. Když už ale člověk na takové řešení přijde, tak ten čas nad tím strávený za to opravdu stojí.

## Tipy a triky

Řešení úloh z kombinatorické geometrie je zábavné, ale může být i dost těžké. Často totiž je potřeba si z úloh vybrat pouze to důležité, což na první pohled nemusí být vůbec zřejmé.

V naprosté většině přednášky si vystačíme „jenom“ s kombinatorickou geometrií v rovině. Právě ta se nejčastěji vyskytuje ve všemožných soutěžích a mnohdy z ní jsou ty nejtěžší úlohy.

Na úlohy nejsou úplně obecné postupy, kterými bychom mohli úlohy mlátit, přestože teorie za ní je bohatá. Tuto teorii ale v podstatě nikdy na soutěži člověk nevyužije, proto si představíme pár tipů a triků, které mohou s úlohami pomoci.

- *Spojitosť*

Někdy se nám například může hodit, že budeme s něčím spojitě „hýbat“ – např. posouvat, otáčet nebo nafukovat. Musíme si ale v takovém případě dávat pozor, jestli to, co tvrdíme, je opravdu pravdivé. Často se také vyskytuje tzv. *diskrétní spojitost*. Pokud se nějaká celočíselná hodnota postupně mění o  $\pm 1$  a víme, že v nějakou chvíli nabývá  $m$  a jindy  $n$ , tak mezitím musela nabýt všech hodnot mezi nimi.

- *Extremální princip*

Občas se stane, že se díváme na nějaký objekt a buď máme úlohu hotovou nebo najdeme v nějakém smyslu menší objekt. Tak proč rovnou nevzít ten nejmenší? A pokud zrovna ne nejmenší, tak největší? Nejvíce vleco? S nejmenším úhlem? Tímto způsobem se může mnoho řešení velice zpřehlednit a zjednodušit.

- *Invarianty a monovarianty*

Co když chceme ukázat, že něco někdy nenastane? Můžeme například najít vhodný *invariant*, tedy něco, co se nemění, a vyloučit tím, co chceme. K tomu se váže velmi podobný *monovariant*, kdy se věc, co sledujeme sice mění, ale velmi předvídatelným způsobem, například v každém kroku nám nějaká hodnota vzroste o 1.

- *Chytré počítání*

Jako v každé jiné kombinatorice, občas se vyplácí něco chytře spočítat, třeba i více způsoby.

- *Konvexní obal*

Když mám několik bodů v rovině, tak uvážení konvexního obalu může velmi často pomoci, například protože se některé podmínky na hranici konvexního obalu chovají mnohem lépe.

- *Triangulace*

Každý mnohoúhelník lze rozřezat na trojúhelníky s jeho vrcholy. (Pokud se nudíš, zkus si toto rozmyslet. Pro nekonvexní trojúhelníky to není zas tak zjevné.)

- *Obarvování*

Obarvování je jen přehlednější způsob, jak věci rozdělovat do nějakých množin, což úlohu často zpřehlední.

- *Dirichletův princip*

Když mám moc holubů na málo holubníků, tak je v nějakém holubníku víc jak jeden holub. No, moc světoborně to nezní, ale často se hodí a když tomu řeknete *Dirichletův princip*, tak to zní, že víte, co děláte.

- *Algoritmizace*

Někdy můžeme problém nějakým algoritmem postupně převádět na jednodušší a jednodušší problémy. Často se může hodit hezký invariant.

- *Pravděpodobnost*

Počítání diskrétní pravděpodobnosti je vlastně jen převlečená kombinatorika. Ale spočítat občas nějakou tu střední hodnotu a používat její vlastnosti může práci velice zjednodušit. Je potřeba si dávat ale pozor, protože s pravděpodobností se člověk velmi jednoduše spálí.

- *Indukce*

I na tu samotřejmě dojde. Indukovat můžeme samozřejmě podle velké řady věcí, ale opět je potřeba dávat pozor, protože ne vše jde zindukovat.

- *Věty*

Jak už bylo řečeno, teorií se moc zabývat nebudeme, ale pokud nějakou znáte, nebojte se ji využít! Jedna velmi často používaná věta, je konečná verze *Hellyho věty*. Ta tvrdí, že pokud máme  $n \geq d + 1$  konvexních množin v  $\mathbb{R}^d$  takových, že každá jejich  $(d + 1)$ -tice má neprázdný průnik, tak mají všechny tyto množiny neprázdný průnik. V přednášce se může občas hodit verze pro  $d = 1$  a  $d = 2$ .

A samozřejmě nebojte se použít cokoliv dalšího!

## Folklore

Na začátek tu jsou nějaké ty provařené úločky. I když jste se s kombinatorickou geometrií předtím nijak speciálně nesetkali, tak většinu z nich asi budete znát. Pokud ale nějaké z nich neznáte, tak vymyslet ten správný trik, může dát zabrat.

**Úloha 1.** Rozdělte čtverec na 13 shodných částí.

**Úloha 2.** Najděte šestiúhelník, který lze jedním rovným řezem rozdělit na 4 shodné trojúhelníky.

**Úloha 3.** Na opačných stranách úsečky délky 1 jsou mraveniště s  $m$  a  $n$  mravenci. Ti vyběhají proti sobě ve vteřinových intervalech ryhlostí 1. Když do sebe dva mravenci narazí, tak se otočí a běží zpět. Když některý přeběhne přes kraj úsečky, tak z ní spadne. Za jak dlouho všichni mravenci popadají?

**Úloha 4.** Z tabulky  $2^n \times 2^n$  někdo ukradl jedno políčko. Dokažte, že zbytek tabulky lze pokrýt pomocí rohových triomin.

**Úloha 5.** V rovině je dáno  $n \geq 3$  bodů tak, že neleží všechny na jedné přímce. Ukažte, že existuje kružnice, která prochází alespoň třemi z nich tak, že uvnitř ní není žádný další.

**Úloha 6.** Krivoš dostal k narozeninám kruhový dort a hned rozhodl se půlku darovat Davidovi. Mezitím mu ale Miško stihl dort nakrájet netradičním způsobem na 4k kousků. Půlka z nich je velká a druhá půlka je naopak malá a ještě k tomu jsou úplně pomíchané! (Všechny velké kousky mají stejnou velikost, stejně tak ty malé.) Dokažte, že i tak Krivoš zvládl najít několik za sebou jdoucích kousků, které tvoří přesně polovinu dortu. (PraSe 33-5-5)

**Úloha 7.** Na kružnici jsme náhodně vybrali  $n$  bodů. Jaká je pravděpodobnost, že leží na jedné půlkružnici?

**Úloha 8.** Po kruhovém rybníčku plave kachnička. Na obvodu číhá liška, která je čtyřikrát rychlejší, ale bojí se vody. Kachnička chce lišce utéct, ale umí vzlétnout jen ze souše. Umí lišce uniknout?

**Úloha 9.** Je možné rozdělit čtverec na několik ostroúhlých trojúhelníků?

**Úloha 10.** Je dána konvexní množina  $M$  v rovině, jejíž kolmý průmět na libovolnou přímku je úsečka délky 1. Musí  $M$  být kruh?

**Úloha 11.** V rovině je několik much a víme, že každé tři z nich umíme přiklopit kruhovým hrncem. Ukažte, že pak už umíme přiklopit všechny mouchy naráz.

**Úloha 12.** V rovině je  $n$  modrých a  $n$  červených bodů v obecné poloze. Dokažte, že umíme popárovat červené body s modrými tak, že když spojíme popárované body úsečkami, tak se žádné dvě tyto úsečky nekříží.

**Úloha 13.** Rozřezali jsme obdélník na menší obdélníky a zjistili jsme, že každý z menších obdélníků má alespoň jednu stranu celočíselnou. Dokažte, že i původní obdélník musel mít alespoň jednu stranu celočíselnou.

**Úloha 14.** Kruhovou studnu s průměrem 10 chceme zakrýt prkny širokými 1. Kolik nejméně prken na to potřebujeme?

**Úloha 15.** Nechtě  $S$  je konečná množina alespoň dvou bodů v rovině v obecné poloze. Na počátku je vybrána nějaká přímka  $l$  procházející právě jedním bodem  $P \in S$ . Tato přímka se začne otáčet po směru hodinových ručiček se středem otáčením v  $P$ , dokud nenařazí na další bod  $Q$  množiny  $S$ . Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ale se středem otáčení v  $Q$ , dokud nenařazí na další bod z množiny  $S$ , a tak dále. Dokžte, že lze zvolit počáteční přímku  $l$  tak, že při tomto procesu bude každý bod  $S$  středem otáčení nekonečněkrát. (IMO 2011-2)

## Lehčí úlohy

Od této chvíle dál jsem se snažil úlohy seřadit podle obtížnosti. Je to ale z velké části jen můj názor, proto když se na něčem zaseknete, neváhejte zkusit řešit něco dalšího.

**Úloha 16.** Na kluzišti trénuje hokejista. Má tři puky, které leží ve vrcholech nedegegenerovaného trojúhelníku. Pokaždé si jeden vybere a odpálí ho tak, aby proletěl mezi zbylými dvěma. Může se po 2025 odpalech stát, že skončí puky v původní poloze? (Puky jsou rozlišitelné.)

**Úloha 17.** Čtvercový dort s rozměry  $6 \times 6$  je pokryt kousky čokolády  $2 \times 1$ . Dokažte, že ho vždy umíme nějak rozkrojit tak, že nemusíme krájet žádný kus čokolády.

**Úloha 18.** Všechny body roviny jsou obarveny dvěma barvami. Ukažte, že existuje rovnostranný trojúhelník, který má všechny vrcholy stejné barvy.

**Úloha 19.** V rovině je konečná množina bodů  $S$  taková, že každý trojúhelník s vrcholy v  $S$  má obsah nanejvýš 1. Dokažte, že se celá  $S$  vejde do trojúhelníku s obsahem 4. (Putnam 2016)

**Úloha 20.** Uvnitř konvexního mnohoúhelníku  $M$  je bod  $O$ . Dokažte, že kolmá projekce bodu  $O$  na nějakou stranu  $M$  leží uvnitř této strany.

**Úloha 21.** V rovině leží několik mnohoúhelníků tak, že se každé dva protínají. Ukažte, že pak existuje přímka, která je všechny protíná.

**Úloha 22.** V rovině leží několik mnohoúhelníků tak, že se každé dva protínají. K tomu je dán bod  $O$ . Ukažte, že existuje kružnice se středem v  $O$ , která všechny mnohoúhelníky protíná.

**Úloha 23.** Máme dvě kružnice s obvodem 2026. Na jedné je vyznačeno 2026 bodů, na druhé několik oblouků se součtem délek nejvýše 1. Dokžate, že na sebe umíme kružnice položit tak, aby všechny vyznačené body ležely mimo vnitřky vyznačených oblouků.

**Úloha 24.** V rovině leží body  $O, A_1, A_2, \dots, A_{2026}$  tak, že žádné tři z nich neleží na přímce. Ukažte, že počet trojúhelníků  $A_i A_j A_k$ , které obsahují bod  $O$ , je sudý.

**Úloha 25.** Obdélník  $R$  s lichými celočíselnými délkami stran je rozřezán na menší obdélníky s celočíselnými délkami stran. Dokažte, že existuje malý obdélník, jehož vzdálenosti od všech čtyř stran obdélníku  $R$  mají stejnou paritu. (IMO SL 2017)

## Zajímavější úlohy

**Úloha 26.** V lese rostou tenké stromy, jejichž výška nepřekračuje 1012 metrů. Žádné dva stromy od sebe nejsou dál, než činí rozdíl jejich výšek. Dokažte, že les lze obehnat plotem délky 2025. (PraSe 26-1-7)

**Úloha 27.** V rovině je dáno  $n \geq 3$  bodů v obecné poloze. Uvažujme vnitřní úhly trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech, velikost toho nejmenšího označme  $\varphi$ . Pro dané  $n$  najděte největší možnou hodnotu  $\varphi$ . (MO 64-A-II)

**Úloha 28.** Mějme konečnou množinu bodů  $S$  v rovině. Víme, že každé tři z nich umíme zakrýt pásem šířky 1. Ukažte, že umíme zakrýt všechny pásem šířky 2.

**Úloha 29.** Nechť  $n$  je přirozené číslo. V rovině se pase  $n$  kraviček a  $n$  oveček. Žádná tři zvířátka neleží na jedné přímce. *Balanční* přímkou nazveme takovou, že prochází ovečkou a kravičkou s tím, že v obou polorovinách zvláště je stejně kraviček jako oveček. Dokažte, že vždy existují alespoň 2 balanční přímky. (USAMO 2005)

**Úloha 30.** V obdélníku  $R$  je dáno  $n$  růžových bodů tak, že spojnice žádných dvou není rovnoběžná s žádnou stranou  $R$ . Rádi bychom rozřezali  $R$  na obdélníčky se stranami rovnoběžnými se stranami  $R$  tak, aby žádný z nich neobsahoval růžový bod ve svém vnitřku. Ukažte, že obdélníčků musí být alespoň  $n + 1$ . (IMO SL 2014)

**Úloha 31.** Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem a rozdělují jej na konečně mnoho obdélníkových čtvrtí. *Centrem* nazveme čtvrt, která nesousedí s okrajem města. Podle vyhlášky neveda žádná hlavní ulice napříč celým městem. Zároveň město má alespoň jednu hlavní ulici, jinak by to byla vesnice. Dokažte, že město má centrum.

**Úloha 32.** V rovině je 2025 červených a 2026 modrých bodů v obecné poloze. Skupina  $k$  přímek je *dobrá*, pokud neprochází žádným vyznačeným bodem a žádná část roviny, která je těmito přímkami vymezená, neobsahuje body různých barev. Najděte nejmenší  $k$  takové, že vždy existuje dobrá skupina  $k$  přímek. (IMO 2013-2)

**Úloha 33.** V rovině je dáno  $n \geq 3$  bodů v obecné poloze. Zabodněte do roviny  $2n - 5$  špendlíků tak, aby každý trojúhelník s vrcholy ve vybraných bodech měl ve svém vnitřku špendlík. Zároveň najděte množinu bodů v obecné poloze, pro kterou  $2n - 6$  špendlíků nestačí.

**Úloha 34.** V rovině máme množinu  $n \geq 2$  bodů tak, že neleží všechny na jedné přímce. Dokažte, že existuje přímka, na které leží právě dva body.

**Úloha 35.** Konečný soubor čtverečků má celkový obsah 4. Dokažte, že jimi umíme pokrýt čtverec o straně délky 1.

**Úloha 36.** V rovině je 2026 přímek tak, že žádné tři neprochází jedním bodem. Šnek Turbo sedí v nějakém bodě na přímce a vydá se podél ní. V každém průsečíku se rozhodne, jestli se vydá doprava nebo doleva, rovně ale jít nemůže. Může se někdy stát, že projde nějakou úsečkou v opačném směru? (EGMO 2017-3)

## Trochu přituhuje

**Úloha 37.** Konečná množina  $M$  bodů v rovině se nazývá *vyvážená*, pokud pro libovolné dva různé body  $A, B \in M$  existuje  $P \in M$  splňující  $|AP| = |BP|$ . Řekněme, že  $M$  je *středuprostá*, pokud pro žádné tři různé body  $A, B, C \in M$  neexistuje  $P \in M$  splňující  $|AP| = |BP| = |CP|$ .

- (i) Dokažte, že pro každé  $n \geq 3$  existuje vyvážená množina  $M$  velikosti  $n$ .
- (ii) Určete všechna  $n \geq 3$ , pro něž existuje vyvážená středuprostá  $M$  velikosti  $n$ .

(IMO 2015-1)

**Úloha 38.** V rovině leží 2025 bodů v obecné poloze. Dokažte, že nanejvýš 70% všech trojúhelníků je ostroúhlých.

**Úloha 39.** Je možné přiřadit nenulová reálná čísla bodům roviny tak, aby součet hodnot v každém pravidelném 2015-úhelníku byl nulový? (iKS 5-C3)

**Úloha 40.** V rovině je  $2n + 1$  v obecné poloze tak, že žádné 4 neleží na kružnici. Kružnici procházející třemi z nich nazveme *vyváženou*, pokud uvnitř ní je stejný bodů, jako vně. Dokažte, že počet vyvážených kružnic má stejnou paritu jako  $n$ .

**Úloha 41.** Dokažte, že každým mnohoúhelníkem o obsahu alespoň  $n$  umíme zakrýt  $n + 1$  mřížových bodů.

**Úloha 42.** Na kruhovém ostrově je v písku nakreslen  $n$ -úhelník se stejně dlouhými stranami. Ve středu každé strany čekají zády k sobě dva ptakopysci. Najednou se všichni rozběhnou po stranách, na kterých stojí, a po přímce pokračují až k pobřeží. Ukažte, že můžeme ptakopysky rozdělit do dvou skupin tak, že součet uběhnutých vzdáleností v obou skupinách bude stejný. (PraSe 36-1j-7)

**Úloha 43.** Je dán konvexní mnohoúhelník  $A_1A_2 \dots A_n$ , ve kterém žádné dvě strany nejsou rovnoběžné. Označme  $A_{k_i}$  nejvzdálenější vrchol od přímky  $A_iA_{i+1}$ . Dokažte, že  $\sum_{i=1}^n |\sphericalangle A_iA_{k_i}A_{i+1}| = 180^\circ$

**Úloha 44.** Ať  $S$  je konečná množina bodů v rovině v obecné poloze. Pro každý konvexní mnohoúhelník  $P$  s vrcholy v  $S$  označme  $a(P)$  počet jeho vrcholů a  $b(P)$  počet bodů z  $S$  ležících mimo  $P$ . Úsečky, body i prázdnou množinu považujeme za konvexní mnohoúhelníky. Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  dokažte

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1,$$

kde sčítáme přes všechny konvexní mnohoúhelníky  $P$  s vrcholy v  $S$ .

(IMO SL 2006)

**Úloha 45.** David si na kružnici vyznačil  $4n$  různých bodů a pak je střídavě obarvil červeně a modře. Červené body rozdělil do  $n$  dvojic a každou dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně modré body. Žádné tři barevné úsečky se neprotínají v jednom bodě. Průsečík modré a červené úsečky označme fialově. Dokažte, že je alespoň  $n$  fialových bodů.

(PraSe 34-1-7)

**Úloha 46.** Na obvodu kruhu vybere náhodně 4 body. Jaká je pravděpodobnost, že umíme kruh rozdělit na 4 čtvrtkruhy, že v každém je právě jeden bod.

**Úloha 47.** Půdorys galerie má tvar  $n$ -úhelníka (ne nutně konvexního). Ukažte, že nám do galerie stačí umístit  $\lfloor n/3 \rfloor$  strážníků tak, aby viděli celou galerii. (Strážníci vidí kolem dokola.)

(Art Gallery Problem)

**Úloha 48.** Čtverec je rozřezán na trojúhelníky tak, že žádné tři vrcholy těchto trojúhelníků neleží na přímce. Pro každý vrchol včetně původních vrcholů čtverce se podíváme na počet z něj vyházejících úseček. Mohly být všechny tyto počty sudé?

(iKS 5-C1)

**Úloha 49.** V rovině je trojúhelník  $RGB$ . Rozdělíme jej na menší trojúhelníky, aby žádný z nich neměl vrchol uvnitř strany jiného. Vrcholy obarvíme červeně, zeleně a modře, přičemž vrcholy původního trojúhelníka dostanou různé barvy. Vrcholy na stranách velkého trojúhelníka navíc musí mít barvu jednoho z krajních vrcholů velkého trojúhelníka této strany. Dokažte, že některý z malých trojúhelníků má vrcholy tří různých barev.

(Spernerovo lemma)

**Úloha 50.** V rovině leží  $n \geq 2$  úseček tak, že se každé dvě protínají a žádné tři neprochází jedním bodem. Dominik si vybere jeden konec každé úsečky a posadí do něj žáby čelem k druhému konci. Pak  $n - 1$  krát tleskne. Při každém tlesknutí žáby skočí do následujícího průsečíku na svých úsečkách. Dominik by chtěl žáby rozmístit tak, aby žádné dvě z nich nikdy neseděly na stejném místě.

(i) Dokažte, že pro liché  $n$  se to Dominikovi vždy podaří.

(ii) Dokažte, že pro sudé  $n$  Dominik nemá šanci.

(IMO 2016-6)

**Úloha 51.** Ukažte, že existuje konvexní 1990-úhelník, který má všechny vnitřní úhly stejně velké a délky jeho stran jsou v nějakém pořadí  $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$ .

(IMO 1990-6)

**Úloha 52.** V rovině je několik čtverců zarovnanými s osami souřadnic obarvených  $n$  barvami. Pro každou  $n$ -tici různobarevných čtverců víme, že nějaké dva z nich mají neprázdný průnik. Ukažte, že umíme přiřpnedit všechny čtverce jedné konkrétní barvy pomocí  $2n - 2$  špendlíků.

**Úloha 53.** Najděte všechna reálná čísla  $k \geq 1$ , pro která lze obdélník  $1 \times k$  rozdělit na dva podobné mnohoúhelníky, které nejsou shodné.

(iKS 5-C4)

**Úloha 54.** V rovině je  $n \geq 3$  přímek, přičemž žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Tyto přímky rozdělují rovinu na oblasti. Dokažte, že lze obarvit  $\lceil \sqrt{n/2} \rceil$  přímek modře tak, aby žádná z konečných oblastí neměla celou hranici modrou. (Odvážlivci mohou zlepšovat konstantu, například obarvit  $\sqrt{n}$  přímek pro dost velké  $n$ .)

(IMO 2014-6)

**Úloha 55.** Nechť  $S$  je čtverec se stranami délky 100 a  $L$  je lomená čára uvnitř  $S$ . Předpokládejme, že pro každý bod  $P$  na hranici  $S$  je možné nalézt bod na  $L$ , který je od  $P$  vzdálený nanejvýš  $1/2$ . Dokažte, že je možné na  $L$  najít dva body takové, že  $|XY| \leq 1$ , ale délka  $L$  mezi  $X$  a  $Y$  je alespoň 198.

(IMO 1982-6)

## Těžké úlohy

V této sekci se nachází úlohy, které jsou podle mě výrazně těžší než cokoliv před nimi. Jejich řešení už není nutně krátké a elegantní a mohou vyžadovat více technické práce. Není jich mnoho, ale podle mě na vystačí na většinu přednášky.

**Úloha 56.** Dokažte, že existuje konstanta  $c < 1$  taková, že každý mnohoúhelník s obsahem 1 lze posubout o  $\frac{1}{100}$  nějakým směrem tak, aby průnik výsledného mnohoúhelníku  $Q$  s původním  $P$  měl obsah nejvýše  $c$ .

(USA TSTST 2018/2019)

**Úloha 57.** V rovině je  $n$  kružnic tak, že žádné tři z nich neprocházejí jedním bodem. Turbo začne na nějaké z kružnic (ne na průsečíku) lézt po směru hodinových ručiček a na každém průsečíku dvou kružnic přeलेze na druhou kružnici a začne lézt opačným směrem (po směru, proti směru hodinových ručiček). Turbo po nějakém čase navštíví všechny kružnice celé, ukážete, že  $n$  je liché. (IMO SL 2014)

**Úloha 58.** Každé straně  $b$  konvexního mnohoúhelníku  $P$  přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v  $P$  a jehož jedna strana je  $b$ . Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku  $P$  je větší nebo roven dvojnásobku obsahu mnohoúhelníku  $P$ . (IMO 2006-6)

**Úloha 59.** Mějme konvexní mnohostěn bez rovnoběžných hran a hran rovnoběžných se stěnami různými od těch, se kterými sousedí. Nazvěme dvojici bodů *antipodální* pokud existují dvě rovnoběžné roviny procházející těmito body takové, že mnohostěn je těmito rovinami vymezený (s rovinami může mít libovolný průnik, ale nemůže být rovinou „říznutý“). Nechť  $A$  je počet antipodálních dvojic vrcholů a  $B$  počet antipodálních dvojic středů hran. Vyjádřete  $A - B$  pomocí počtu vrcholů, hran a stěn mnohostěnu. (IMO SL 2006)

## Závěrem

Úloh je mnoho. Na přednášce jsme se moc žádnou teorií nezabývali, ale existuje. Jeden z možných směrů je zabývat se vlastnostmi konvexních množin obecně v  $\mathbb{R}^d$ , z čehož jsme na začátku uvedli *Hellyho větu*, což samozřejmě zdaleka není vše. Další zajímavé směry tvoří počítání incidencí geometrických objektů nebo výlesekdy okolo mřížek, jako je například *Minkowského věta*. Dále tu je zkoumání *arrangementů* geometrických objektů, což některé úlohy z přednášky nakously.

A samozřejmě je toho daleko víc. V kombinatorické geometrii se využívají výsledky z analýzy, algebry i topologie. Na to ale bohužel dnes čas není.

## Literatura a zdroje

- [1] Jakub Löwit; *Kombinatorická geometrie*, Sborník iKS, 2019
- [2] David Hruška; *Kombinatorická geometrie*, Sborník iKS, 2015
- [3] Mirek Olšák; *Kombinatorická geometrie*, 2011 Blansko-Obůrka
- [4] Mirek Olšák; *Kdopak by se IMO šestky bál?*, 2014 Uhelná Příbram
- [5] Pepa Tkadlec; *Provárky*
- [6] <http://www.artofproblemsolving.com>
- [7] Radovan Švarc; *Dvě neobvyklé existenční techniky* 2016 Hojsova Stráž
- [8] Djukic, Jankovic, Matic, Petrovic; *The IMO Compendium*
- [9] Libor Barto; *Kombinatorická geometrie*, 2000

## Hinty

**Hint 1.** Co se stane, když proženete čtverec skartovačkou?

**Hint 2.** Z

**Hint 3.** Vyřešte úlohu, kde mravenci sebou procházejí a neotáčí se.

**Hint 4.** Indukuj.

**Hint 5.** Konvexní obal, pak nafukuj/hýbej.

**Hint 6.** Vezmi  $2k$  za sebou jdoucích a otáčej.

**Hint 7.** Vyber průměr a pak jeho krajní bod.

**Hint 8.** Kachnička je uvnitř čtvrtinového kruhu rychlejší.

**Hint 9.** Ano.

**Hint 10.** Nemusí. Vezmi rovnostranný trojúhelník a přid mu nad strany kruhové oblouky.

**Hint 11.** Může se hodit Helly.

**Hint 12.** Poud se něco kříží, tak to sprav.

**Hint 13.** Nakresli si do roviny šachovnici s velikostí políček  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ .

**Hint 14.** Co kdybychom na studnu dali polokouli?

**Hint 15.** Vezmi přímkou, která púli ostatní body. Co se stane, když se přímkou ototčí o  $180^\circ$ ?

**Hint 16.** Orientace trojúhelníka

**Hint 17.** Každý řez krájí sudý počet čokolád.

**Hint 18.** Podívej se na nějakou trojúhelníkovou mřížku.

**Hint 19.** Vem trojúhelník s největším obsahem a vhodně ho zvětší

**Hint 20.** Nejbližší strana

**Hint 21.** Promítmi mnohoúhelníky na přímkou.

**Hint 22.** Mnohoúhelník „stoč“ na polopřímku začínající v  $O$ .

**Hint 23.** Kolik úhlů jeden konkrétní bod zakazuje?

**Hint 24.** Hýbejte s bode  $O$ . Co se stane, když přelege přes nějakou úsečku?

**Hint 25.** Obarvy šachovnicově.

**Hint 26.** Projděte stromy od nejvyššího po nejnižší.

**Hint 27.** Vybírej body na konvexním obalu s extrémním úhlem.

**Hint 28.** Nejbližší body.

**Hint 29.** Rozděl na 2 případy podle toho, co je na hranici konvexního obalu za zvířátka.

**Hint 30.** Protáhni růžové body co nejdál to jde, dokud nanarazíš na křižovatku ve tvaru T.

**Hint 31.** Začněte na kraji města a vydejte se na procházku tak, abyste z města nikdy nevyšli.

**Hint 32.** Dva body lze od zbytku oddělit dvěma přímkami. Na druhý odhad zkuste umístit body střídavě do kruhu.

**Hint 33.** Všechny body vhodně naráz dvakrát posuňte, pak ještě něco uštrete. Pro druhou část najděte triangulaci roviny.

**Hint 34.** Vezmi dvojici přímkou a bodu, které od sebe mají nejmenší nenulovou vzdálenost.

**Hint 35.** Zmenšete čtverečky tak, aby měly obsahy  $1/4^n$ .

**Hint 36.** Vhodně obarvete části roviny vymezené přímkami.

- Hint 37.** Pro konstrukci dávejte body vhodně na kružnici a případně do jejího středu. Nemožnost v druhé části chytře spočítejte.
- Hint 38.** Podívejte se na pětice bodů.
- Hint 39.** Vezměte 2015-úhelník a otáčejte ho v jednom z vrcholů.
- Hint 40.** Kolik je vyvážených kružnic pro fixní dvojici bodů?
- Hint 41.** Rozstříhejte mnohoúhelník podle jednotkových čtverečků.
- Hint 42.** Mocnost z vrcholů.
- Hint 43.** Postupně otáčejte přímkou a ve vhodnou chvíli měňte bod otáčení.
- Hint 44.** Obarvujte body s pravděpodobností  $x \in [0, 1]$ , levou stranu interpretujte jako pravděpodobnost jistého jevu.
- Hint 45.** Vyzraďte na procházku po modrých úsečkách. Začněte na modrém bodě a zastavte se ve fialovém.
- Hint 46.** Vyberte body s nějakým pevně daným křížem. Podívejte se, kam popadali a postupně křížem otáčejte o  $90^\circ$ .
- Hint 47.** Vezmi tringulaci a obarvy vrcholy třemi barvami.
- Hint 48.** Ne. Obarvěte stěny dvěma barvami.
- Hint 49.** Vyroba si duální graf (graf, jehož vrcholy jsou stěny původního).
- Hint 50.** Protáhněte úsečky a protněte s dost velkou kružnicí. Dívejte se na pořadí, ve kterém kružnici protínají.
- Hint 51.** Strany naproti budou přibližně stejně dlouhé. Komplexní čísla.
- Hint 52.** Indukuj. Podívej se na nejlevější čtverec.
- Hint 53.** Pouze pro  $k = 1$  to lze. Rozdělte obdélník pomocí „schodů“.
- Hint 54.** Obarvovat hladově funguje.
- Hint 55.** Projděte se po lomenné čáře a obarvujte hranici čtverce.
- Hint 56.** Stačí dokázat, že střední hodnota průniku je malá.
- Hint 57.** Vhodně obarvěte oblasti roviny a kruhové oblouky. Hýbejte kružnicí a sledujte paritu počtu cyklů.
- Hint 58.** Nejprve ukažte, že v libovolném konvexním  $2n$ -úhelníku o obsahu  $S$  se dá najít trojúhelník s obsahem alespoň  $\frac{S}{n}$ , a to dokreslením hlavních diagonál a dívání se na „motýly“ tvořené za sebou jdoucími diagonálami. Pak už jen vhodně rozbijte původní mnohoúhelník.
- Hint 59.** U každého vrcholu, hrany a stěny se podívejte na normálové vektory rovin, které těmito vrcholami/hranami/stěnami prochází, ale neprochází „skrz“ mnohostěn. Tyto vektory vám vytvoří nějaké oblasti na jednotkové sféře (pozor na to, že každá rovina má normálové vektory dvou různých směrů). Jak se podmínky ze zadání převedou na jednotkovou sféru? Co splňují antipodální vrcholy a středy hran? Pak si nakreslete na sféře vhodný graf.

# $p$ -valuácie

*Jakub Krivošík*

**Abstrakt.**  $p$ -valuácie sú nástroj, pomocou ktorého môžeme skúmať problém lokálne pre každé prvočíslo  $p$ , ukazuje sa, že keď poznáme túto lokálnu analýzu pre každé prvočíslo  $p$ , tak môžeme spätne vydedukovať nejaké globálne vlastnosti. V tejto prednáške sa pozrieme ako pracovať s  $p$ -valuáciami a taktiež aj na nejaké pokročilé vety o nich.

**Definícia.** Pre prvočíslo  $p$  a celé číslo  $n$  označíme  $p$ -valuáciu čísla  $n$  ako  $\nu_p(n) = k$ , pričom  $p^k \mid n$ , ale  $p^{k+1} \nmid n$ .

**Poznámka.** Môžeme si z definície všimnúť, že  $n = 0$ , práve vtedy keď pre všetky  $p$  je  $\nu_p(n) = \infty$ .

**Tvrdenie.** Nech  $p$  je prvočíslo a  $a, b \in \mathbb{Z}$ , potom

- (i)  $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$ .
- (ii)  $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$ .
- (iii)  $\nu_p(a \pm b) \geq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$ , pričom rovnosť nastáva ak  $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$ .

**Tvrdenie.** Nech  $a, b \in \mathbb{Z}$ , potom:

- (i)  $a = b$  práve vtedy keď  $\nu_p(a) = \nu_p(b)$  pre všetky prvočísla  $p$ .
- (ii)  $a \mid b$  práve vtedy keď  $\nu_p(a) \leq \nu_p(b)$  pre všetky prvočísla  $p$ .
- (iii)  $a$  je  $b$ -ta mocnina práve vtedy keď  $b \mid \nu_p(a)$  pre všetky prvočísla  $p$ .

**Cvičenie.** Rozmyslite si, že  $p$ -valuácie sa dajú prirodzene rozšíriť na funkciu  $\nu_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ , pričom si zachováva všetky vyššie spomenuté vlastnosti.

**Veta (Legendre's formula).** Nech  $n \in \mathbb{N}$ , potom

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \frac{n - s_p(n)}{p - 1},$$

pričom  $s_p(n)$  je ciferný súčet čísla  $n$  v sústave so základom  $p$ .

**Veta (Kummer's theorem).** Pre každé prvočíslo  $p$  je  $\nu_p\left(\binom{m}{n}\right)$  rovné počtu prechodov pri sčítaní  $n$  a  $m - n$  v sústave so základom  $p$ .

**Veta (Lifting the exponent lemma).** Nech  $a, b, n \in \mathbb{N}$  a nech  $p$  je prvočíslo, také, že  $p \mid a - b$ , ale  $p \nmid a, b$ , potom:

- Ak  $p > 2$ , potom

$$\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a - b) + \nu_p(n).$$

- Ak  $p = 2$  a  $n$  je párne, potom

$$\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a^2 - b^2) + \nu_2\left(\frac{n}{2}\right).$$

- Ak  $p = 2$  a  $n$  je nepárne, potom

$$\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a - b).$$

**Poznámka.** Rozmyslite si, že pre nepárne  $n$  a  $a, b, p$  s predpokladmi ako vyššie máme  $\nu_p(a^n + b^n) = \nu_p(a + b) + \nu_p(n)$ .

**Úloha 1.** Nech  $a, b, c$  sú prirodzené čísla také, že jedna z hodnôt

$$\gcd(a, b)\text{lcm}(b, c), \quad \gcd(b, c)\text{lcm}(c, a), \quad \gcd(c, a)\text{lcm}(a, b)$$

sa rovná súčinu zvyšných dvoch. Dokážte, že niektoré z čísel  $a, b, c$  je násobkom iného z nich. (CKMO 2024/1)

**Úloha 2.** Majme prirodzené čísla  $a, b, c, d$  také, že  $ab = cd$ . Dokážte, že

$$\gcd(a, c) \cdot \gcd(a, d) = a \gcd(a, b, c, d)$$

(Poland 1983/4)

**Úloha 3.** Pre prirodzené čísla  $a, b, c$  platí, že  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  je prirodzené číslo. Dokážte, že aj  $\sqrt[3]{abc}$  je tiež prirodzené číslo. (BAMO 2018/4)

**Úloha 4.** Majme prirodzené čísla  $a, b$  také, že platí  $a \mid b^2, b^2 \mid a^3, a^3 \mid b^4, \dots$ . Dokážte, že platí  $a = b$ .

**Úloha 5.** Majme rôzne reálne čísla  $a, b$  také, že

$$a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3, \dots$$

sú všetko celé čísla. Dokážte, že  $a, b$  sú celé čísla.

**Úloha 6.** Predpokladajme, že existuje kladné celé  $C$  a postupnosť kladných celých čísel  $a_0, a_1, a_2, \dots$  takých, že

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^3 - Ca_n}$$

pre všetky  $n \in \mathbb{N}$ . Dokážte, že od nejakého momentu je postupnosť konštantná.

**Úloha 7.** Nech  $b, n > 1$  sú prirodzené čísla. Predpokladajme, že pre každé  $k \in \mathbb{N}$  existuje  $a_k \in \mathbb{N}$  také, že  $b - a_k^n$  je deliteľné číslom  $k$ . Dokážte, že  $b = A^n$  pre nejaké prirodzené číslo  $A$ . (ISL 2007 N2)

**Úloha 8.** Racionálne číslo nazveme *mocné*, ak sa dá zapísať v tvare  $\frac{p^k}{q}$  pre nesúdeliteľné  $p, q$ . Nech  $a, b, c$  sú kladné racionálne čísla také, že  $abc = 1$ . Predpokladajme, že existujú kladné celé čísla  $x, y, z$  také, že  $a^x + b^y + c^z$  je celé číslo. Dokážte, že  $a, b, c$  sú mocné čísla. (APMO 2017/4)

**Úloha 9.** Ktoré prirodzené čísla môžu byť pre nejaké  $a, b, c \in \mathbb{N}$  zapísané ako

$$\frac{\text{lcm}(a, b) + \text{lcm}(b, c)}{\text{lcm}(a, c)}?$$

(USEMO 2020/1)

**Úloha 10.** Pre prirodzené čísla  $n$  a  $k \geq 2$  si definujeme  $E_k(n)$  ako najväčší exponent  $r$ , pre ktorý platí  $k^r \mid n!$ . Dokážte, že existuje nekonečne veľa  $n$  takých, že  $E_{10}(n) > E_9(n)$  a že existuje nekonečne veľa  $n$  takých, že  $E_{10}(n) < E_9(n)$ . (ISL 2023 N3)

**Úloha 11.** Dokážte, že počet nepárnych čísel v ľubovoľnom riadku Pascalovho trojuholníka je mocnina 2. (Glaisher's theorem)

**Úloha 12.** Nech  $k > 1$ , dokážte, že existuje nekonečne veľa  $n$  takých, že

$$n \mid 1^n + 2^n + \dots + k^n.$$

**Úloha 13.** Nájdí všetky  $n, k \in \mathbb{N}$  také, že

$$k! = \prod_{i=0}^{n-1} (2^n - 2^i) = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

(IMO 2019/4)

**Úloha 14.** Pre každé kladné celé číslo  $n$  označíme  $\text{rad}(n)$  súčin všetkých rôznych prvočísel deliacich  $n$ . Dokážte, že existuje nekonečne veľa  $a, b > 1$  takých, že  $\text{gcd}(a, b) = 1$  a

$$\text{rad}(ab(a + b)) < \frac{a + b}{2024^{2024}}$$

(BxMO 2024/4)

**Úloha 15.** Nájdite všetky  $a \in \mathbb{N}$  také, že pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  je  $4(a^n + 1)$  tretia mocnina.  
(Iran 2008/1)

**Úloha 16.** Nech

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

kde  $a_i \in \{0, 1\}$ . Dokážte, že ak  $f(\frac{2}{3}) = \frac{3}{2}$ , tak  $f(\frac{1}{2})$  je iracionálne.

(Putnam 2017 B3)

**Úloha 17.** Predpokladajme, že pre prirodzené  $n \geq 2$  je  $3^n - 2^n$  mocnina prvočísla. Dokážte, že  $n$  je prvočíсло.

**Úloha 18.** Majme postupnosť  $a_1, a_2, \dots$  takú, že  $a_1 = 2$  a

$$a_{n+1} = a_n^{n+1} - 1$$

pre  $n \geq 1$ . Dokážte, že pre každé nepárne prvočíсло  $p$  a kladné celé číslo  $k$  existuje  $n$  také, že  $p^k \mid a_n$ .  
(USAJMO 2024/3)

**Úloha 19.** Majme kladné celé číslo  $n$ . Povieme, že  $n$  je *blízko*, ak jeho zápis v dvojkovej sústave sa končí na jeho zápis v desiatkovej sústave. Nájdite všetky čísla  $n$ , ktoré sú blízko a v desiatkovej sústave majú najviac dve cifry 1.

(KMS 45/3/9)

**Úloha 20.** Nájdite všetky trojice  $(a, b, p)$  prirodzených čísel, kde  $p$  je prvočíсло a platí

$$a^p = b! + p.$$

(IMO 2022/5)

**Úloha 21.** Nech  $a_1, a_2, \dots$  je postupnosť prirodzených čísel a nech  $N$  je nejaké dané prirodzené číslo. Predpokladajte, že pre všetky  $n \geq N$  je

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$$

prirodzené číslo. Dokážte, že existuje  $M \in \mathbb{N}$  také, že  $a_m = a_{m+1}$  pre všetky  $m \geq M$ .

(IMO 2018/5)

**Úloha 22.** Dokážte, že existuje konečne veľa štvoric prirodzených čísel  $(n, a, b, c)$  takých, že

$$n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}.$$

(ISL 2021 N5)

**Úloha 23.** Nájdite najväčšie kladné celé číslo  $n$  také, že existuje postupnosť prirodzených čísel  $a_1, \dots, a_n$ , že

$$a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = \dots = a_{n-1}^{a_n}.$$

(ELMO SL 2023 N2)

**Úloha 24.** Majme dané kladné celé  $b$  a nezáporné celé čísla  $a_0, a_1, \dots$  také, že  $a_i < b$ . Je dané, že  $a_0 \neq 0$  a postupnosť  $\{a_i\}$  je od nejakého momentu periodická s nekonečne veľa nenulovými členmi. Nech  $S$  je množina čísel  $n$ , takých že  $n \mid (a_0 a_1 \dots a_n) \cdot b$ . Predpokladajme, že  $S$  je nekonečná, dokážte že existuje nekonečne veľa prvočísel deliacich aspoň jeden člen  $z$   $S$ .

(ELMO SL 2019 N4)

**Úloha 25.** Pre kladné celé číslo  $m = 2^k \cdot t$ , kde  $k \geq 0$  a  $t$  je nepárne si definujeme  $f(m) = t^{1-k}$ . Dokáž, že pre každé prirodzené číslo  $n$  a ľubovoľné nepárne prirodzené číslo  $a \leq n$  platí, že  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n)$  je násobok  $a$ .

(China TST 2016/2/4)

**Úloha 26.** Nájdite všetky nekonečné postupnosti prirodzených čísel  $a_1, a_2, \dots$  takých, že pre každé celé čísla  $m \leq n$  aritmetický a geometrický priemer:

$$\frac{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}{n - m + 1} \quad \text{a} \quad (a_m a_{m+1} \dots a_n)^{\frac{1}{n - m + 1}}$$

sú celé čísla.

(ISL 2024 N3)

**Úloha 27.** Predpokladajme, že  $a_1 < a_2 < \dots < a_{2024}$  je aritmetická postupnosť kladných celých čísel a  $b_1 < b_2 < \dots < b_{2024}$  je geometrická postupnosť kladných celých čísel. Koľko najviac spoločných členov môžu mať tieto dve postupnosti?

(USA TST 2024/5)

**Úloha 28.** Uvažujme nekonečnú postupnosť  $a_1, a_2, \dots$  prirodzených čísel takú, že  $a_1 > 1$  a  $(2^{a_n} - 1)a_{n+1}$  je štvorec pre všetky prirodzené  $n$ . Je možné, aby sa niektoré dva členy postupnosti rovnali?

(RMM 2025/2)

**Úloha 29.** Nech  $a$  je kladné celé číslo. Kladné celé číslo  $b$  nazveme  $a$ -dobré ak  $\left(\frac{an}{b}\right) - 1$  je deliteľné  $an + 1$  pre každé kladné celé číslo  $n$ , pre ktoré  $an \geq b$ . Predpokladajme, že  $b$  je kladné celé číslo také, že  $b$  je  $a$ -dobré, ale  $b + 2$  nie je  $a$ -dobré. Dokáž, že  $b + 1$  je prvočíslo.

(ISL 2019 N5)

**Úloha 30.** Nech  $n > 1$  je celé číslo. Dokáž, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel  $k$  takých, že člen  $a_k$  je nepárny, pričom

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor.$$

(ISL 2014 N4)

**Úloha 31.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$  také, že:

- (i)  $f(n) \neq 0$  pre aspoň jedno  $n$ ,
- (ii)  $f(xy) = f(x) + f(y)$  pre všetky kladné celé  $x, y$ ,
- (iii) existuje nekonečne veľa kladných celých  $n$  takých, že  $f(k) = f(n - k)$  pre všetky  $k < n$ .

(ISL 2020 N5)

**Úloha 32.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že pre všetky  $a, b$  platí

- (i)  $a$  a  $f(a)$  majú rovnaký počet kladných deliteľov,
- (ii) ak  $a \nmid b$  a  $b \nmid a$ , tak

$$\gcd(f(a), f(b)) > f(\gcd(a, b))$$

(EGMO 2024/5)

**Úloha 33.** Funkcia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sa nazýva *senza* ak

$$f(a) \mid b^a + f(b)^{f(a)}$$

pre všetky kladné celé  $a, b$ . Nájdite najmenšie reálne  $c$  také, že  $f(n) \leq cn$  pre všetky *senza* funkcie a všetky kladné celé  $n$ . (IMO 2025/3)

**Úloha 34.** Nájdite všetky dvojice  $(a, b)$  nesúdeliteľných prirodzených čísel takých, že  $a > b$  a existuje konečne veľa prirodzených čísel  $n$ , takých že  $n^2$  delí  $a^n - b^n$ .

**Úloha 35.** Nech  $a, b$  sú prirodzené čísla také, že pre každé prvočíslo  $p$  je zvyšok  $a$  po delení  $p$  nanajvyš rovný zvyšku  $b$  po delení  $p$ . Dokážte, že  $a = b$ .

(Erdős-Pálffy-Szegedy)

## Hinty

**Hint 1.** Priama kalkulácia funguje.

**Hint 2.** Proste to rozpiš a uváž možnosti usporiadania.

**Hint 3.** Priama kalkulácia funguje.

**Hint 4.** Zoberme prvočíslo kde  $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$  a pozrime sa pre veľké  $k$  na  $a^k \mid b^{k+1}$  alebo  $b^k \mid a^{k+1}$ .

**Hint 5.** Z prvých dvoch čísel dokáž, že  $a, b$  sú racionálne. Potom sa pozri na  $p$ -valuácie menovateľov.

**Hint 6.** Priama kalkulácia funguje, treba však rozobrať prípady.

**Hint 7.** Sporom, vynúť si aby  $\nu_p(b - a_k^n)$  malo ohraničenú  $p$ -valuáciu.

**Hint 8.** Priama kalkulácia funguje.

**Hint 9.** Ukáž, že 2-valuácia zlomku nemôže byť nulová, pre zvyšné čísla nájdí konštrukciu.

**Hint 10.** Použi Legendreho vo forme ciferného súčtu.

**Hint 11.** Typický Kummer.

**Hint 12.** Vhodne popáruj členy, LTE sa môže zísť.

**Hint 13.** Pozri sa na 2 a 3 valuácie a boundni  $k$ .

**Hint 14.** Aby  $\text{rad}(a)$  a  $\text{rad}(b)$  boli malé si zaručíme ľahko. Na "zmenšenie"  $\text{rad}(a + b)$  chceme aby bolo to bolo deliteľné veľa krát nejakým prvočísлом, čo tak použiť LTE?

**Hint 15.** Použi LTE.

**Hint 16.** Sporom, čo ak je  $f(\frac{1}{2})$  racionálne, ako bude potom vyzerat postupnosť  $\{a_i\}$ ?

**Hint 17.** Sporom  $n = ab$ ,  $a, b > 1$ , spomeň si na LTE.

**Hint 18.** Nájdí nekonečne veľa členov deliteľných  $p$ , rozprípadať podľa parity indexu. Jeden stačí rozklad na súčin, v druhom si treba vytvoriť vhodný index a použiť LTE.

**Hint 19.** Rozmysli si, v akom tvare musí byť  $n$ , použi LTE.

**Hint 20.** Najprv skús ohraničiť  $b$ , potom zisti  $a$ , na záver sa pozri na 2-valuácie.

**Hint 21.** Odčítaj po sebe idúce členy, chceme aby postupnosť  $\nu_p(a_i)$  bola konštantná od nejakého momentu (toto však samo o sebe nestačí, uvážme  $\{a_i\}$  je  $i$ -te prvočíslo).

**Hint 22.** Najprv ukáž, že  $n$  je párne. Potom rozdel na prípady podľa toho, či sú všetky  $a + b, b + c, c + a$  mocniny 2 alebo nie. Môže sa zísť aj Legendre, aj LTE.

**Hint 23.** Odpoveď je 5.

**Hint 25.** Treba to len priamo vypočítať, môže sa zísť Legendre.

**Hint 26.** Druhá podmienka hovorí, že  $\nu_p(a_i)$  spĺňa prvú podmienku. Dokáž, že existujú nekonečne veľa rovnakých členov v  $\{\nu_p(a_i)\}$ .

**Hint 27.** Kvocient geometrickej postupnosti je racionálny. Pre nejaké  $p$  má geometrická postupnosť rastúce  $p$ -valuácie, avšak v aritmetickej postupnosti nemôžu tak rýchlo rásť.

**Hint 28.** Ukáž, že existuje  $p \mid 2^n - 1$ , že  $p > n$  a  $\nu_p(2^n - 1)$  je nepárne.

**Hint 29.** Ukáž, že  $b$  je  $a$ -dobré  $\iff b$  je párne a zároveň všetky  $p \leq b$  delia  $a$ .

**Hint 30.** Nepárne  $n$  sú ľahké, pre párne  $n$  zober prvočíslo deliace  $n - 1$  a použi LTE.

**Hint 32.** Pozri hint 30 na strane 62.

**Hint 33.** Ak pre nejaké  $n$  máme  $f(n) \neq n$ , ukáž, že  $f(p) = 1$  pre všetky dostatočne veľké prvočísla. Rozšír toto na všetky nepárne čísla. Mocniny 2 sa mapujú na mocniny 2, na finálny bound použi LTE.

**Hint 34.** Musí platiť  $a - b = 1$ .

# Kruhová inverze

Michal Pecho

**Abstrakt.** V příspěvku zavedeme inverzi a ukážeme si spoustu příkladů.

Inverze je jedno z nejexotičtějších geometrických zobrazení. Přestože nezachová ani tak jednoduché objekty jako jsou přímky, má řadu překvapujících a užitečných vlastností, díky nimž je velmi silným nástrojem při řešení jinak obtížných geometrických úloh.

## Definice

**Dohovor.** Rovinu rozšíříme o (jediný) bod  $\infty$ , o němž prohlásíme, že leží na všech přímkách.

**Definícia.** *Inverze* je geometrické zobrazení určené kružnicí  $k$  se středem  $O$  a poloměrem  $r$ , které bodu  $A$  přiřadí bod  $A'$  podle následujících pravidel:

- (i) Když je  $A = O$ , potom  $A' = \infty$ .
- (ii) Když je  $A = \infty$ , potom  $A' = O$ .
- (iii) Jinak je  $A'$  bod polopřímky  $OA$ , pro který platí

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2.$$

## Základní vlastnosti

**Tvrdenie.** Platí několik jednoduchých vlastností:

- 1) Inverze je bijekce, pokud ji navíc provedeme dvakrát podle stejné kružnice, dostaneme identitu.
- 2) Pevné body inverze podle kružnice  $k$  jsou přesně body této kružnice.
- 3) Pokud leží bod  $A$  „uvnitř“ kružnice  $k$ , leží obraz  $A'$  „vně“, a naopak.

**Lema.** Je dána kružnice  $k$  se středem  $I$  a poloměrem  $r$ . Uvažujme libovolnou dvojici bodů  $X, Y$ . Označme  $X', Y'$  obrazy bodů  $X, Y$  v inverzi podle kružnice  $k$ . Pak  $\angle IXY = \angle X'Y'I$ .

**Tvrdenie (Tětivové čtyřúhelníky).** Je dána kružnice  $k$  se středem  $I$  a body  $A, B$  takové, že neleží na jedné přímce s  $I$ . Označme  $A', B'$  obrazy bodů  $A, B$  v inverzi podle  $k$ . Pak body  $A, B, A', B'$  leží na jedné kružnici.

**Tvrdenie (Stěžejní).** Uvažme inverzi určenou kružnicí  $k$  se středem  $I$ . Pak

- (i) obrazem přímky procházející bodem  $I$  je ona sama,
- (ii) obrazem přímky **nep**rocházející bodem  $I$  je kružnice procházející bodem  $I$ ,
- (iii) obrazem kružnice procházející bodem  $I$  je přímka **nep**rocházející bodem  $I$ ,
- (iv) obrazem kružnice **nep**rocházející bodem  $I$  je kružnice **nep**rocházející bodem  $I$ .

**Tvrdenie.** Podle předchozího tvrzení je obrazem kružnice  $k$  se středem  $O$  nějaká kružnice  $k'$  se středem  $S$  (neprochází-li  $k$  středem inverze  $I$ ). Pak bod  $S$  leží na polopřímce  $IO$ , ale není to obraz bodu  $O$  (inverze tedy na sebe nezobrazuje středy kružnic).

**Tvrdenie (Konstrukce obrazu).** Je dána kružnice  $k$  a bod  $A$  vně této kružnice. Tečny ke kružnici  $k$  vedené bodem  $A$  se jí dotýkají v bodech  $T, U$ . Pak obraz  $A'$  bodu  $A$  v inverzi podle kružnice  $k$  je střed úsečky  $TU$ .

**Úloha 1.** Nechť  $ABC$  je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu  $A$ . Body  $X$  a  $Y$  leží postupně na jeho stranách  $AB$  a  $AC$ . Dokažte, že paty kolmic z  $A$  na  $BC, XY, BY$  a  $CX$  leží na jedné kružnici.

**Úloha 2.** Tři kružnice se po dvou dotýkají. Zkonstruujte kružnici, která se dotýká všech tří.

## Najdi střed

**Úloha 3.** Nechť  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  jsou kružnice takové, že  $\omega_i$  a  $\omega_{i+1}$  se dotýkají v  $A_i$  (kde  $\omega_5 = \omega_1$ ). Ukažte, že  $A_1A_2A_3A_4$  je tětíivový čtyřúhelník.

**Úloha 4.** Buď  $ABCD$  čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami, které se protínají v  $E$ . Ukažte, že obrazy bodu  $E$  podle stran  $ABCD$  všechny leží na jedné kružnici.

(USAMO 1993/2)

**Úloha 5.** Kružnice vepsaná trojúhelníku  $ABC$  se dotýká jeho stran  $BC, CA, AB$  postupně v bodech  $D, E, F$ . Bod  $X$  leží uvnitř trojúhelníka  $ABC$  tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku  $BCX$  se dotýká jeho stran  $BC, CX, XB$  postupně v bodech  $D, Y, Z$ . Ukažte, že body  $E, F, Y, Z$  leží na jedné kružnici. (IMO SL 1995)

**Úloha 6.** Je dána půlkružnice  $t$  nad průměrem  $AB$ . Přímka  $p$  kolmá na  $AB$  protíná úsečku  $AB$  v bodě  $C$  a půlkružnici  $t$  v bodě  $D$ . Kružnice  $k$  se dotýká úsečky  $AC$  v bodě  $E$ , půlkružnice  $t$  v bodě  $T$  a navíc přímky  $p$ . Dokažte, že  $DE$  půlí úhel  $ADC$ . (Izrael 1995)

**Úloha 7.** Buď  $ABC$  trojúhelník takový, že  $K$  a  $L$  jsou postupně středy stran  $AB$  a  $AC$ . Nechť  $P$  je druhý průsečík kružnic  $(ABL)$  a  $(AKC)$ . Buď  $Q$  druhý průsečík úsečky  $AP$  s  $(KAL)$ . Dokažte, že  $AQ = 2PQ$ . (Baltic Way 2006)

**Úloha 8.** Jsou dány pevné kružnice  $k$  a  $l$  protínající se ve dvou bodech. Uvažme nějaké dvě kružnice  $m$ ,  $n$ , které mají obě vnější dotyk s  $k$ , vnitřní dotyk s  $l$  a navíc se samy dotýkají v bodě  $X$ . Ukažte, že bod  $X$  leží na pevné kružnici nezávisle na volbě  $m$  a  $n$ .

**Úloha 9.** Je dán trojúhelník  $A_1A_2A_3$  a sedm kružnic  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$ , které splňují následující dvě podmínky:

- 1) kružnice  $\omega_1$  prochází body  $A_1$  a  $A_2$ , kružnice  $\omega_2$  body  $A_2$  a  $A_3$ , kružnice  $\omega_3$  body  $A_3$  a  $A_1$  a tak dále, až kružnice  $\omega_7$  prochází body  $A_1$  a  $A_2$ ,
- 2) kružnice  $\omega_i$  a  $\omega_{i+1}$  mají vnější dotyk pro všechna  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

Dokažte, že kružnice  $\omega_1$  a  $\omega_7$  splývají. (MKS 24-2-7)

**Úloha 10.** Nechť  $KL$  a  $KN$  jsou tečny z bodu  $K$  ke kružnici  $k$ . Na polopřímce opačné k  $NK$  leží bod  $M$ . Buď  $P$  druhý průsečík  $k$  s  $(KLM)$ . Patu kolmice z  $N$  na  $ML$  označme jako  $Q$ . Ukažte, že  $\angle MPQ = 2 \cdot \angle KML$ .

## Určování poloměru

Přestože při invertování je obvykle důležitý pouze střed inverze, občas se hodí mít i správný poloměr.

**Definícia.** Řekneme, že dvě kružnice  $\omega_1$  a  $\omega_2$  jsou *kolmé*, když se protínají a tečny k  $\omega_1$  a  $\omega_2$  v jejich průsečíku jsou na sebe kolmé.

**Tvrdenie.** Uvažme inverzi určenou kružnicí  $k$  se středem  $I$ . Pak kružnice  $\omega$  různá od  $k$  se v této inverzi zobrazí sama na sebe právě tehdy, když jsou  $\omega$  a  $k$  kolmé.

**Tvrdenie.** Pro kružnici  $k$  a bod  $T$  vně ní existuje inverze se středem  $T$ , v níž se  $k$  zobrazí sama na sebe.

**Tvrdenie.** Jsou-li  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  tři kružnice ležící vně sebe, jejichž středy neleží na přímce, pak existuje inverze, která každou z nich zobrazuje na sebe samotnou.

**Úloha 11.** Nechť  $\omega_1$  a  $\omega_2$  jsou dvě kolmé kružnice. Označme střed  $\omega_1$  jako  $O$ . Nechť  $AB$  je průměr  $\omega_1$  takový, že  $B$  leží uvnitř  $\omega_2$ . Sestrojíme dvě kružnice procházející  $A$  a  $O$ , které se dotýkají  $\omega_2$  v bodech  $F$  a  $G$ . Ukažte, že  $FBGO$  je tětivový čtyřúhelník. (ELMO SL 2013)

**Úloha 12.** Je dán trojúhelník  $ABC$ . Označme polovinu jeho obvodu  $s$ . Na přímce  $BC$  nalezneme body  $X, Y$  tak, že  $AX = s = AY$ . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku  $XAY$  se dotýká kružnice připsané trojúhelníku  $ABC$  vzhledem k vrcholu  $A$ .

**Úloha 13.** Kružnice  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  leží vně sebe. Kružnice  $\omega$  se jich dotýká zvenku v bodech  $A_1, A_2, A_3$  a kružnice  $\Omega$  se jich dotýká zevnitř v bodech  $B_1, B_2, B_3$ . Ukažte, že přímky  $A_1B_1, A_2B_2$  a  $A_3B_3$  se protínají v jednom bodě.

**Úloha 14.** Budiž  $ABCD$  tětívový čtyřúhelník takový, že přímky  $BA$  a  $CD$  se protínají v bodě  $P$ . Na přímce  $CD$  libovolně zvolíme body  $E$  a  $F$ . Nechť  $G$  je střed kružnice opsané  $\triangle ADE$  a  $H$  je střed kružnice opsané  $\triangle BCF$ . Dokažte, že pokud body  $A, B, F, E$  leží na jedné kružnici, pak lze body  $P, G, H$  proložit přímkou.

**Úloha 15.** Buď  $ABCD$  dvojstředový čtyřúhelník<sup>\*)</sup>. Ukažte, že čtyřúhelník vytvořený z bodů dotyku kružnice vepsané má kolmé úhlopříčky.

**Úloha 16.** Kružnice  $\omega_a$  a  $\omega_b$  mají vnější dotyk v bodě  $T$ . Jejich vnější společná tečna  $\ell$  se dotýká  $\omega_a$  a  $\omega_b$  v  $A$  a  $B$ . Buď  $\omega$  kružnice se středem v bodě  $O$  a poloměrem  $r$ , která se dotýká  $\omega_a$  i  $\omega_b$  zvenku a pro kterou je  $\ell$  tečna. Ukažte, že  $OT \leq 3r$ .

**Úloha 17 (Shoemaker's Knife).** Nechť  $A, B, C$  jsou tři body ležící v tomto pořadí na přímce. Zkonstruujeme půlkružnice  $\Gamma_{AC}, \Gamma_{AB}, \omega_0$  postupně nad průměry  $AC, AB$  a  $BC$  (všechny na stejné straně od  $AC$ ). Pro každé přirozené  $k$  buď  $\omega_k$  kružnice dotýkající se  $\Gamma_{AC}, \Gamma_{AB}$  a  $\omega_{k-1}$ .

Ukažte, že pro každé  $n$  je vzdálenost středu  $\omega_n$  od  $AC$  rovna  $n$ -násobku průměru  $\omega_n$ .

**Úloha 18 (Steinerovo porisma).** Uvnitř kružnice  $k$  je dána kružnice  $\ell$ . Předpokládejme, že existuje  $n$ -prvkový řetěz kružnic  $m_1, \dots, m_n$  takový, že každá kružnice v řetězu má vnější dotyk se svými dvěma sousedními kružnicemi a s  $\ell$  a vnitřní dotyk s  $k$ . Potom každá kružnice mající vnější dotyk s  $\ell$  a vnitřní dotyk s  $k$  je částí nějakého  $n$ -prvkového řetězu.

## Překlápíme

Občas se hodí kromě zvolení správného poloměru navíc překlápnout podle osy úhlu, protože pak obrázek zůstane skoro stejný.

**Tvrdenie.** Nechť  $M$  a  $N$  jsou body na úsečkách  $AB$  a  $AC$  takové, že  $MN \parallel BC$ . Pak inverze s středem  $A$  a poloměrem  $\sqrt{AB \cdot AN}$  složená s překlopením podle osy úhlu  $BAC$  zobrazuje body  $B, C, M$  a  $N$  postupně na  $N, M, C$  a  $B$ .

<sup>\*)</sup> To je čtyřúhelník, který je zároveň tečnový a tětívový.

**Důsledek ( $\sqrt{bc}$ -inverze).** Inverze s středem v  $A$  a poloměrem  $\sqrt{AB \cdot AC}$  složená s překlopením podle osy úhlu  $ABC$  prohazuje body  $B$  a  $C$ .

**Tvrdenie.** V  $\sqrt{bc}$ -inverzi se na sebe zobrazují kružnice opsaná a přímka  $BC$ .

**Úloha 19.** Buď  $ABC$  trojúhelník s kružnicí opsanou  $\Omega$ . Kružnice  $\omega$  se dotýká stran  $AB$  a  $AC$  a má vnitřní dotyk s  $\Omega$  v bodě  $P$ . Přímka  $\ell$  je rovnoběžná s  $BC$ , protíná vnitřek  $\triangle ABC$  a dotýká se  $\omega$  v bodě  $Q$ . Ukažte, že  $\angle PAB = \angle QAC$ .  
(EGMO 2013/5)

**Úloha 20.** Buď  $M$  střed strany  $BC$  v trojúhelníku  $ABC$ . Tečny ke kružnici  $(ABC)$  v  $B$  a  $C$  se protínají v  $T$ . Ukažte, že  $\angle BAM = \angle CAT$ .

**Úloha 21.** Nechtě  $M, N$  jsou body na stranách  $AB$  a  $AC$  trojúhelníku  $ABC$  takové, že  $MN \parallel BC$ . Přímky  $BN$  a  $CM$  se protínají v bodě  $P$ . Kružnice  $(MPB)$  a  $(NPC)$  se podruhé protínají v bodě  $Q$ . Ukažte, že  $\angle BAQ = \angle CAP$ .  
(Balkán 2009)

**Úloha 22.** Označme  $O$  opsíště trojúhelníka  $ABC$ . Jeho Feuerbachova kružnice protíná kružnici opsanou  $BOC$  v dvou bodech  $K$  a  $L$ . Dokažte, že  $\angle BAK = \angle CAL$ .  
(Srbsko 2015/3)

**Úloha 23.** Na straně  $BC$  trojúhelníku  $ABC$  leží body  $K$  a  $L$  tak, že  $\angle BAK = \angle CAL < \frac{1}{2}\angle BAC$ . Kružnice  $\omega_1$  se dotýká přímkou  $AB$  a  $AL$ , kružnice  $\omega_2$  se dotýká přímkou  $AC$  a  $AK$ . Předpokládejme, že se  $\omega_1$  a  $\omega_2$  protínají v  $P$  a  $Q$ . Dokažte, že  $\angle PAC = \angle QAB$ .  
(Kazachstán 2012)

**Úloha 24 (Kosnitha theorem).** Buď  $O$  opsíště  $\triangle ABC$ . Označíme si  $O_a, O_b$  a  $O_c$  opsíště trojúhelníků  $BOC, COA$  a  $AOB$ . Pak se přímky  $AO_a, BO_b$  a  $CO_c$  protínají v jednom bodě.

## Přepočítávací lemma

Inverze není shodné ani podobné zobrazení. Přesto dokážeme vyjádřit vzdálenost obrazů dvou bodů následujícím způsobem.

**Lema (přepočítávací lemma).** Je dána kružnice  $k$  se středem  $I$  a poloměrem  $r$ . Uvažujme libovolnou dvojici bodů  $X, Y$ . Označme  $X', Y'$  obrazy bodů  $X, Y$  v inverzi podle kružnice  $k$ . Pak  $|X'Y'| = |XY| \cdot \frac{r^2}{|IX| \cdot |IY|}$ .

**Úloha 25 (Ptolemaiova nerovnost).** Mějme čtyřúhelník  $ABCD$ . Pak

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

přičemž rovnost nastává právě pro tětíkové čtyřúhelníky.

**Úloha 26.** Bod  $P$  leží na kružnicích  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  a  $\Gamma_4$ . Kružnice  $\Gamma_1$  se zvenku dotýká  $\Gamma_3$  a  $\Gamma_2$  se zvenku dotýká  $\Gamma_4$ . Označme druhý průsečík  $\Gamma_i$  s  $\Gamma_{i+1}$  jako  $A_i$ . Ukažte, že

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_2A_3}{A_3A_4 \cdot A_4A_1} = \frac{PA_2^2}{PA_4^2}.$$

(IMO SL 2003/G4)

**Úloha 27.** Buď  $k$  kružnice se středem  $S$  ležící uvnitř trojúhelníka  $ABC$ . Nechtě  $A_1$  a  $A_2$  jsou dotyky tečen z  $A$  ke  $k$ . Označme průsečík  $A_1A_2$  s  $AS$  jako  $A'$ . Analogicky sestrojíme body  $B'$  a  $C'$ . Ukažte, že pokud

$$\frac{1}{SA} : \frac{1}{SB} : \frac{1}{SC} = BC : CA : AB,$$

pak je trojúhelník  $A'B'C'$  rovnostranný.

**Úloha 28.** Nechtě  $P$  je bod uvnitř trojúhelníku  $ABC$  takový, že

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Nechtě  $D$  a  $E$  jsou vepišťe trojúhelníků  $APB$  a  $APC$ . Ukažte, že přímky  $AP$ ,  $BD$  a  $CE$  se protínají v jednom bodě. (IMO 1996/2)

## Ještě další úlohy

**Úloha 29.** Uvažujme půlkružnici  $\omega$  nad průměrem  $AB$  se středem  $O$ . Přímka  $\ell$  protíná přímku  $AB$  v bodě  $M$  a půlkružnici  $\omega$  v bodech  $C$  a  $D$  tak, že  $MA > MB$  a  $MD > MC$ . Kružnice  $(AOD)$  a  $(BOC)$  se protínají v bodě  $K$ . Ukažte, že  $K$  leží na kružnici nad průměrem  $MO$ . (Rusko 1995, Írán 1996)

**Úloha 30.** Buď  $\ell$  přímka, na které leží body  $A, B$  a  $C$ , ale ne  $P$ . Ukažte, že  $P$  leží na kružnici opsané trojúhelníku z opsišť  $\triangle BPA, \triangle APC$  a  $\triangle CPB$ .

**Úloha 31.** Kružnice  $k, l$  se protínají v bodech  $A, D$ . Jejich společná tečna bližší bodu  $A$  se dotýká  $k$  v  $E$  a  $l$  v  $F$ . Rovnoběžka s touto tečnou procházející bodem  $D$  protne kružnice  $k, l$  podruhé v bodech  $C, B$ . Kružnice opsané trojúhelníkům  $CDF$  a  $BDE$  se podruhé protínají v bodě  $P$ . Ukažte, že body  $D, A$  a  $P$  leží v přímce. (Brkos 2011)

**Úloha 32.** Buď  $O$  opsišťe trojúhelníka  $ABC$ . Body  $E, F$  leží na úsečkách  $OB, OC$  tak, že platí  $BE = OF$ . Nechtě  $M$  a  $N$  jsou středy oblouků  $EOA$  a  $AOF$ . Dokažte, že  $\angle ENO + \angle OMF = 2\angle BAC$ . (iKS 6-5)

**Úloha 33.** Buď  $ADBE$  čtyřúhelník, ve kterém  $AD \perp DB$  a  $BE \perp EA$ . Jeho průsečík diagonál si označme jako  $C$  a střed  $AB$  si označme jako  $O$ . Nechť  $\gamma$  je kružnice opsaná  $\triangle BOD$  a nechť  $F$  je bod na  $\gamma$  takový, že  $OF$  tvoří průměr  $\gamma$ . Nakonec si označme druhý průsečík polopřímky  $FC$  s  $\gamma$  jako  $G$ . Dokažte, že  $A$ ,  $O$ ,  $G$  a  $E$  leží na jedné kružnici. (Čína Západ 2006/6)

**Úloha 34.** Buď  $ABC$  trojúhelník s vepsíštěm  $I$  a kružnicí vepsanou dotýkající se stran  $BC$ ,  $CA$  a  $AB$  v bodech  $D$ ,  $E$  a  $F$ . Označme jako  $Q$  takový bod, že  $AB \perp BQ$  a  $AC \perp CQ$ . Průsečík  $QI$  s  $EF$  nazvěme  $P$ . Ukažte, že  $DP \perp EF$ . (NIMO 2014)

**Úloha 35.** Nechť  $A_1A_2A_3$  je různoustranný trojúhelník s vepsíštěm  $I$ . Buď  $C_i$  ta menší z kružnic procházejících  $I$ , které se dotýkají  $A_iA_{i+1}$  a  $A_iA_{i+2}$ . Označme jako  $B_i$  druhý průsečík  $C_{i+1}$  a  $C_{i+2}$ . Ukažte, že opsiště trojúhelníků  $A_1B_1I$ ,  $A_2B_2I$  a  $A_3B_3I$  leží všechna na jedné přímce. (IMO SL 1997)

**Úloha 36.** Lichoběžník  $ABCD$  s  $AB \parallel CD$  je vepsaný v kružnici  $\omega$ . Bod  $G$  leží uvnitř  $\triangle BCD$ . Polopřímky  $AG$  a  $BG$  podruhé protnou  $\omega$  v  $P$  a  $Q$ . Rovnoběžka k  $AB$  procházející skrze  $G$  protíná  $BD$  a  $BC$  v bodech  $R$  a  $S$ . Dokažte, že  $PQRS$  je tětíkový právě tehdy, když  $G$  leží na ose úhlu  $CBD$ . (USAMO 2009/5)

**Úloha 37.** Buď  $ABC$  trojúhelník s vepsíštěm  $I$  a opsištěm  $O$ . Nechť  $D$ ,  $E$  a  $F$  jsou dotyky kružnice vepsané  $\triangle ABC$  se stranami. Označme jako  $G$  těžiště  $\triangle DEF$ . Ukažte, že  $O$ ,  $I$  a  $G$  leží na jedné přímce.

**Úloha 38.** Nechť  $ABC$  je ostroúhlý trojúhelník ve kterém  $AB > AC$ . Označme jeho kružnici opsanou, jeho kolmiště, patu výšky z  $A$  a střed strany  $BC$  postupně jako  $\Gamma$ ,  $H$ ,  $F$  a  $M$ . Nechť  $Q$  a  $K$  jsou takové body na  $\Gamma$ , že  $HQ \perp QA$  a  $HK \perp KQ$ . Předpokládejme, že  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  a  $Q$  jsou všechny různé body a leží na  $\Gamma$  v tomto pořadí. Ukažte, že  $(KQH)$  a  $(KFM)$  se dotýkají. (IMO 2015/3)

**Úloha 39.** Konvexní čtyřúhelník  $ABCD$  splňuje  $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$ . Uvnitř něj leží bod  $X$  takový, že  $\angle XAB = \angle XCD$  a  $\angle XBC = \angle XDA$ . Dokažte, že  $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ . (IMO 2018/6)

**Úloha 40.** Kružnice  $\omega$  vepsaná ostroúhlému trojúhelníku  $ABC$  se dotýká strany  $BC$  v  $K$ . Nechť  $D$  je pata výšky z  $A$  a  $M$  je střed  $AD$ . Pokud  $N$  je druhý společný bod  $\omega$  a  $KM$ , ukažte, že se  $\omega$  dotýká  $(BNC)$ . (IMO SL 2002 G7)

**Úloha 41.** Buď  $ABC$  ostroúhlý trojúhelník s kružnicí opsanou  $\omega$  a buď  $\ell$  tečna k  $\omega$ . Přímky  $\ell_a$ ,  $\ell_b$ ,  $\ell_c$  vzniknou z  $\ell$  překlopením podle přímk  $BC$ ,  $CA$  a  $AB$ . Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami  $\ell_a$ ,  $\ell_b$ ,  $\ell_c$  se dotýká  $\omega$ . (IMO 2011/6)

## Literatura a zdroje

Tento příspěvek téměř výhradně čerpal z příspěvku Majdy Mišínové na iKSk 2022.

## Hinty

**Hint 1.** Zinvertujte podle  $B$  a použijte buď Thaletovky v původním obrázku, nebo prosté přehazování úhlů.

**Hint 2.** Invertujte podle jednoho z bodů dotyku.

**Hint 3.** Zinvertujte podle libovolného z  $A_i$  a dvě kružnice, které se změní na přímky, si nakreslete svisle.

**Hint 4.** Dokreslete si kružnice se středem ve vrcholech čtyřúhelníka, které procházejí skrz  $E$ .

**Hint 5.** Zinvertujte podle  $D$ . V novém obrázku použijte osy úseček.

**Hint 6.** Invertujte podle  $E$  a najděte rovnoramenný trojúhelník.

**Hint 7.** Upravte si dokazovanou rovnost do invertovatelnějšího stavu. Pak zinvertujte podle  $A$ .

**Hint 8.** Zinvertujte podle  $A$  a použijte symetrii.

**Hint 9.** Zinvertujte podle  $A_1$  a najděte středovou souměrnost nebo doúhlete.

**Hint 10.** Zinvertujte podle  $M$ . Dokreslete si střed obrazu  $k$  a s pomocí stejnolehlosti doúhlete.

**Hint 11.** Zinvertujte podle  $\omega_1$ . Dokreslete si střed  $EF$ .

**Hint 12.** Jak daleko jsou body dotyku kružnice připsané s  $AB$  a  $AC$  od  $A$ ?

**Hint 13.** Zinvertujte podle kružnice, která zachovává  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$ .

**Hint 14.** Invertujte podle  $P$  a prohodte kružnice opsané  $\triangle ADE$  a  $\triangle BCF$ .

**Hint 15.** Zinvertujte podle kružnice vepsané. Najděte tětíkový rovnoběžník.

**Hint 16.** Zinvertujte podle kružnice, která má střed v  $T$  a zachovává  $\omega$ .

**Hint 17.** Zinvertujte podle kružnice se středem v  $A$ , která zachovává  $\omega_n$ .

**Hint 18.** Invertujte tak, aby se kružnice  $k$  a  $\ell$  staly soustřednými.

**Hint 19.** Udělejte inverzi se středem  $A$  a poloměrem  $\sqrt{AB \cdot AX}$  složenou s překlopením podle osy úhlu  $BAC$ , kde  $X$  je průsečík  $\ell$  s  $AC$ .

**Hint 20.** Použijte  $\sqrt{bc}$ -inverzi. Využijte mocnost.

**Hint 21.** Uvědomte si, že  $Q$  leží na kružnicích  $(ANB)$  a  $(AMC)$ . Pak udělejte vhodnou inverzi se středem v  $A$ , překlopte podle osy a rozmyslete si, že máte hotovo.

**Hint 22.**  $\sqrt{bc}$ -inverze, ale s polovičním poloměrem.

**Hint 23.** Inverzí a překlápěním vyměňte  $\omega_1$  a  $\omega_2$ .

**Hint 24.**  $\sqrt{bc}$ -inverze, ale s polovičním poloměrem.

**Hint 25.** Zinvertujte podle libovolného z vrcholů. Použijte přepočítávací lemma (a trojúhelníkovou nerovnost).

**Hint 26.** Zinvertujte podle  $P$  a použijte přepočítávací lemma.

**Hint 27.** Body  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  jsou obrazy  $A$ ,  $B$ ,  $C$  v inverzi podle  $k$ . Použijte přepočítávací lemma.

**Hint 28.** Použijte větu o ose úhlu. Pak zinvertujte podle  $P$  a dopočítejte.

**Hint 29.** Zinvertujte podle  $\omega$  a najděte Feuerbachovu kružnici.

**Hint 30.** Zinvertujte podle  $P$  a využijte Simsonovu přímku.

**Hint 31.** Zinvertujte podle  $D$ . Pokud znáte Gergonnův bod, jste hotovi. Jinak použijte Cevovu větu.

**Hint 32.** Zbavte se  $B$  a  $C$ , zinvertujte podle  $O$  a pomocí přepočítávacího lemmatu dokažte  $E'N' \parallel F'M'$ .

**Hint 33.** Zinvertujte přes  $O$  a najděte Feuerbachovu kružnici.

**Hint 34.** Invertujte podle kružnice vepsané a vzpomeňte si na Feuerbachovu kružnici (správného trojúhelníku).

**Hint 35.** Zinvertujte podle  $I$ . Nalezněte nějaké stejnohlé trojúhelníky a z nich odvoďte, že se nějaké tři přímky protínají v jednom bodě. Douhlete.

**Hint 36.** Zinvertujte podle  $B$ . Všimněte si, že  $PQRS$  je lichoběžník, tedy je tětíkový právě tehdy, když je rovnoramenný.

**Hint 37.** Zinvertujte podle kružnice vepsané to, co se dá rozumně zinvertovat. Nesahejte na to, co se invertuje blbě. Pak najděte Eulerovu přímku.

**Hint 38.** Zinvertujte podle  $H$  a najděte pár obdélníků. Hodí se všimnout si, že  $Q$ ,  $M$  a  $H$  leží na přímce.

**Hint 39.** Zinvertujte podle  $X$ . Pak se podívejte do následujícího příspěvku na tvrzení o kamarádech v čtyřúhelníku. Použijte přepočítávací lemma.

**Hint 40.** Vyjádřete  $\tan \angle BKM$  jen pomocí úhlů v  $ABC$ . Potom si zdefinujte  $L$  jako bod na  $\omega$  takový, že  $\omega$  se dotýká ( $BLC$ ). Abyste ukázali, že  $N = L$ , udělejte inverzi podle  $K$  a pak zatněte zuby a spočítejte  $\tan \angle BKL$ .

**Hint 41.**

(i) Zinvertujte podle kolmiště  $ABC$ . Fakt.

(ii) Podívejte se na následující cvičení a uvědomte si, že speciální případ, kdy  $P$  je kolmiště  $ABC$  nám dává řešení.

# Odhady

Zdeněk Pezlar

**Abstrakt.** Podíváme se na mnohé úlohy, kde chceme odhadovat kvantify, a na metody, jak k tomu přistupovat. Fíčuroou je, že teorie je poměrně málo, většinu času budeme počítat. Jupí!

V tomto příspěvku se budeme trochu obecně zamýšlet nad tím, jak pracovat s algebraickými odhady v těžších úlohách. Nerovnosti nám budou chlebem – a věřím, že už máte hlad. U lehčích úloh (A1,A2 v shortlistu) se často jen použijí lehké nástroje (AG nerovnost pro dva členy, trojúhelníková nerovnost) nějak fikaně. Několik dobře miněných rad:

- (i) Monovarianty a indukce jsou kamarádi.
- (ii) Když pracujeme s posloupnostmi, občas se hodí si vypsát prvních několik členů a sledovat, co by tak mělo vynutit odhad (je to prvních pár členů? je to spíš chování v nekonečnu? ).
- (iii) Používej takové odhady, co tě dostanou blíž k cíli – pokud je nerovnost těsná, používej těsné odhady. Když ne, klidně se rozšoupni.

## Úlohy na rozjezd

**Úloha 1.** Pro reálná čísla  $x, y$  platí  $xy \geq x + y > 0$ . Jaká je nejmenší možná hodnota jejich součtu? (MO-B-I-2025)

**Úloha 2.** Pro přirozené  $n$  dokažte

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

**Úloha 3.** Nezáporná reálná čísla  $x, y, z$  mají součet 2025 a splňují  $x \geq 10, y \geq 20, z \geq 1700$ . Jaká je největší možná hodnota jejich součinu?

**Úloha 4.** Je dané  $c \in \mathbb{R}^+$  a reálná čísla  $a_1, \dots, a_n$  splňující  $|a_i| \geq c$ . Dokažte, že

$$\sum_{i,j,|a_i-a_j|<2c} a_i a_j > 0.$$

**Úloha 5.** Reálná čísla  $x, y, z$  splňují  $x + y + z = 12, x^2 + y^2 + z^2 = 54$ . Dokažte, že  $9 \leq xy \leq 25$ , že jedno z čísel je nejvýše 3 a další je alespoň 5.

(Celostátko 2011/3)

**Úloha 6.** Dokažte, že pro každé liché  $n$  existuje permutace  $k_0, k_2, \dots, k_{n-1}$  čísel  $1, 2, \dots, n$  taková, že polynom

$$k_{n-1}x^{n-1} + k_{n-2}x^{n-2} + \dots + k_0$$

nemá žádný celočíselný kořen.

## Naivní bounding

Často v úlohách není potřeba žádná velká myšlenka, „prostě se to udělá“. Dobrá mantra na zapamatování je vždy nejdříve zkoušet hloupé věci před těmi chytřejšími. Podezřele často totiž ty hloupé věci stačí.

**Příklad.** Posloupnost je daná  $a_1 = a_2 = 1$  a pro  $n \geq 1$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{a_n}.$$

Dokažte, že  $a_{180} > 19$ .

**Úloha 7.** Dokažte, že pro každé  $r > 2$  má rovnice  $x^2 = r[x]$  buď dvě nebo tři kladná reálná řešení. (iKS)

**Úloha 8.** Nechtě  $a_0 < a_1 < a_2 \dots$  je nekonečná posloupnost přirozených čísel. Dokažte, že existuje právě jedno  $n \geq 1$  takové, že

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

(IMO 2014/1)

**Úloha 9.** Jsou daná reálná čísla  $a_1, \dots, a_n$ . Pro každé  $i$  definujme

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}$$

a označme  $d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Dokažte, že pro všechna reálná čísla  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  platí

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}.$$

(IMO 2007/1)

**Úloha 10.** Pro reálné číslo  $x \in [0, 1]$  uvažme  $S_x = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \mid \lfloor nx \rfloor\}$ . Dokažte, že pro každé reálné číslo  $x$  platí

$$\sum_{n \in S_x} \frac{1}{2^n} \geq \frac{4}{7}.$$

(Putnam 2015/A4)

## Posloupnosti

Na posloupnosti není žádný univerzální návod. Často je úloha stavěná nějakou konkrétní úpravou, vhodné teleskopování či nějaký jiný trik. Každá z následujících úloh je typově různá, dobrou chuť!

**Úloha 11.** Posloupnost  $a_1, a_2, \dots$  splňuje  $a_1 = 2, a_2 = 3$  a

$$a_{2n+1} = 2 + 2a_n, \quad a_{2n+2} = 2 + a_n + a_{n+1}$$

pro všechna  $n \geq 1$ . Určete všechna  $n$  taková, že  $\frac{a_n}{n}$  je přirozené číslo.

(Indie 2025/1)

**Úloha 12.** Dvě posloupnosti kladných čísel  $(a_i)_{i=1}^{\infty}, (b_i)_{i=1}^{\infty}$  splňují pro  $n \geq 1$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2b_n}, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2a_n}.$$

Dokažte, že  $\max(a_{2026}, b_{2026}) > 45$ .

(Indie TST 2018/3)

**Úloha 13.** Pro reálné číslo  $c$  definujeme posloupnost  $a_1, a_2, \dots$  následovně. Položíme  $a_1 = c$  a pro  $n \geq 2$  platí

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i)^{n-i+1}.$$

Najděte všechna  $c$  taková, že  $a_i > a_{i+1}$  pro všechna  $i \geq 1$ .

(USA TSTST 2025/7)

**Úloha 14.** Posloupnost kladných reálných čísel  $a_1, a_2, a_3, \dots$  splňuje

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

pro  $k \in \mathbb{N}$ . Dokažte, že pro všechna přirozená  $n \geq 2$  platí  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ .

(Shortlist 2015/A1)

## Extremální princip, seřazení

Trik starý jak Kunžak (tedy alespoň od roku 1288). Když ti úloha dá moc volnosti a pak chce něco dokázat, ty „nejlepší případy“ heuristicky často nastávají v extrémních bodech – v nejvyšší hodnotě, v hodnotě s nejvyšším rozdílem,  $\dots$  Stojí za to zničit symetrii co nejvíce co jde, např. úplným seřazením symetrické úlohy.

**Úloha 15.** Je dáno  $n \geq 3$  kladných čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Pro  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  definujme  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  (indexy bereme cyklicky). Předpokládejme, že pro všechna  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $a_i \geq a_j$  právě tehdy, když platí  $b_i \geq b_j$ . Dokažte, že  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

(EGMO 2023/1)

**Úloha 16.** Necht'  $a_1, a_2, \dots, a_n$  je posloupnost reálných čísel splňujících  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ . Pro každé celé  $i$  splňující  $1 \leq i \leq n$  označme  $b_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ . Předpokládejme, že pro každé celé  $i$  splňující  $1 \leq i \leq n-2$  platí  $b_i(a_{i+2} - a_{i+1}) \geq 0$ . Dokažte, že

$$\max_{1 \leq l \leq n} |a_l| \geq \max_{1 \leq m \leq n} |b_m|.$$

(Výběrko 2021)

**Úloha 17.** Buď  $n$  přirozené číslo. Uvažme podmnožinu  $A \subset \{0, 1, 2, \dots, 5^n\}$  mající  $4n + 2$  prvků. Dokažte, že existují  $a < b < c$  z  $A$  takové, že  $c + 2a > 3b$ .

(Výběrko 2022, Shortlist 2021/A1)

**Úloha 18.** Jsou daná kladná reálná  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ . Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\sum_{cyc} \left\lfloor \frac{7a_i}{a_i + a_{i+1}} \right\rfloor,$$

kde indexy bereme modulo 10.

(Indie EGMO TST 2024/2)

**Úloha 19.** Posloupnost  $a_1, a_2, \dots$  reálných čísel splňuje

$$a_n = - \max_{i+j=n} (a_i + a_j) \quad \text{pro } n \geq 2025.$$

Dokažte, že existuje  $M > 0$  takové, že  $|a_n| < M$  pro všechna  $n > 0$ .

(Shortlist 2017/A4)

**Úloha 20.** Buď  $n \geq 3$  a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  čísla z intervalu  $[0, 1]$  se součtem  $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Předpokládejme, že  $s \geq 3$ . Dokažte, že existují indexy  $1 \leq i < j \leq n$  takové, že

$$2^{j-i} x_i x_j > 2^{s-3}.$$

(Shortlist 2022/A4)

## Znamínka a dobré indexy

Univerzální odhady jsou často bohužel obtížné. Pro některé případy najdeme jednoduché odhady, pak ale zůstávají nějaké „zlé“ případy. Takové rozdělení je jemnější než standardní odhady a často užitečné.

**Úloha 21.** Buď  $n$  liché přirozené a  $x_1, \dots, x_n$  nezáporná reálná čísla. Dokažte, že platí

$$\min_{i=1,2,\dots,n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,2,\dots,n} (2x_j x_{j+1}),$$

kde  $x_{n+1} = x_1$ .

(EGMO 2016/1)

**Úloha 22.** Jsou daná sudé  $n \in \mathbb{N}$  a reálná  $c_1, \dots, c_{n-1}$  taková, že  $\sum_{i=1}^{n-1} |1 - c_i| < 1$ . Dokažte, že polynom

$$2x^n + (-1)^{n-1}c_{n-1}x^{n-1} + (-1)^{n-2}c_{n-2}x^{n-2} - \dots - (-1)c_1x^1 + 2$$

nemá reálné kořeny.

(USA TST 2014/4)

**Úloha 23.** Najděte nejmenší reálné  $C > 0$  takové, že pro libovolných (ne-nutně různých) kladných reálných čísel  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  můžeme vybrat po dvou různé indexy  $i, j, k, l$  tak, že

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| < C.$$

(Shortlist 2016/A2)

**Úloha 24.** Posloupnost  $(x_n)_{n=1}^\infty$  je definovaná následovně:

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}.$$

Dokažte, že

$$n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n + 1.$$

(Vietnam 2018/1)

**Úloha 25.** Nechť  $a_1, a_2, \dots, a_n$  je posloupnost reálných čísel a nechť  $m$  je pevné kladné celé číslo menší než  $n$ . Řekneme, že index  $k$  s  $1 \leq k \leq n$  je *dobrý*, pokud existuje nějaké  $\ell$  s  $1 \leq \ell \leq m$  takové, že  $a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+\ell-1} \geq 0$ , kde indexy jsou brány modulo  $n$ . Nechť  $T$  je množina všech dobrých indexů. Dokažte, že  $\sum_{k \in T} a_k \geq 0$ .

(USA TSTST 2015/1)

**Úloha 26.** Nechť  $n \geq 2$  je kladné celé číslo a  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jsou reálná čísla taková, že  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ . Definujme množinu  $A$  jako

$$A = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, |a_i - a_j| \geq 1\}$$

Dokažte, že pokud  $A$  není prázdná, pak  $\sum_{(i,j) \in A} a_i a_j < 0$ .

(Shortlist 2019/A4)

## Asymptotika

V následující řadě úloh budeme dívat, jak se některé funkce chovají – jak rychle asymptoticky rostou. Tento pohled může být často užitečný, může vynutit rovnosti, ke kterým se lokálnější odhady jenom přibližují. Eventuálně totiž funkce  $x^{1.001}$  přeroste  $100000x$ , i když ze začátku se to tak nezdá.

**Definice.** Pro dvě funkce  $f, g$  řekneme, že  $f \in O(g)$  pokud existují reálná  $c, N$  taková, že  $f(x) \leq cg(x)$  pro všechna  $x \geq N$ .

**Věta (Užitečná asymptotika).** Platí

- (i)  $\log n \in O(n^\varepsilon)$  pro každé  $\varepsilon > 0$ .
- (ii)  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \in O(\log n)$ , přesněji  $= \log n + O(1)$ .
- (iii) (Taylor pro mocniny) Pro libovolnou (i zápornou mocninu)  $m$  platí

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + O(x^{m-2}).$$

**Definice (Limita posloupnosti).** Nechť  $(a_n)_{n=1}^\infty$  je posloupnost. Řekneme, že  $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  je *limitou* této posloupnosti, pokud pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $N$  tak, že pro všechna  $n \geq N$  platí  $|a_n - L| < \varepsilon$ .

**Věta.** Nechť  $(a_n)$  je monotonní omezená posloupnost. Pak má limitu.

**Příklad.** Pro která kladná  $b$  existuje posloupnost kladných reálných čísel splňující  $a_{n+2} = \sqrt{ba_{n+1} - a_n}$ ?

*Řešení.* Pro  $b > 1$  vyhovuje konstantní posloupnost  $a_n = b - 1$ . Ukážeme, že pro  $b \leq 1$  taková posloupnost neexistuje. Pokud si budeme zkoušet pro  $b < 1$ , zjistíme, že po několika členech posloupnost přestane existovat. Ukážeme, že jak se  $n$  blíží k nekonečnu, měla by posloupnost limitu, což bude vést ke sporu s vlastnostmi její limity.

Uvažme nějakou takovou posloupnost  $(a_i)$ . Nejprve si všimněme, že pro všechna  $n$  musí platit  $a_{n+1} \geq ba_{n+1} > a_n$ , tedy posloupnost je rostoucí. Ukážeme, že posloupnost je navíc shora omezená.

Aby bylo  $a_{n+3}$  definované, musí být

$$0 < ba_{n+2} - a_{n+1} = b\sqrt{ba_{n+1} - a_n} - a_{n+1} \implies b^3a_{n+1} - b^2a_n - a_{n+1}^2 > 0.$$

Pokud to vezmeme jako kvadratickou nerovnici v  $a_{n+1}$ , diskriminant musí být kladný, tj.  $a_n < \frac{b^4}{4}$ , posloupnost je tedy shora ohraničená. Má tedy nějakou limitu  $L$ , pro libovolné  $n$  tak existují malá  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  taková, že  $a_{n+i} = L + \varepsilon_i$ . Dosazením získáme

$$L + \varepsilon_2 = \sqrt{bL + b\varepsilon_1 - L - \varepsilon_0} \implies L^2 + L(2\varepsilon_2 - b + 1) + \varepsilon_2^2 - b\varepsilon_1 + \varepsilon_0 = 0.$$

Vyřešením této rovnice v  $L$  získáme pro  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ , že musí platit  $L \in \{0, b - 1\}$ , tedy  $L \leq 0$ . To je ale spor s tím, že naše posloupnost je rostoucí a kladná. Tím pádem pro  $b \leq 1$  opravdu požadovaná posloupnost neexistuje.

**Úloha 27.** Jsou daná kladná reálná  $p, q, r$  taková, že pro nekonečně mnoho přirozených  $n$  platí

$$\lfloor pn \rfloor + \lfloor qn \rfloor + \lfloor rn \rfloor = n.$$

Dokažte, že  $p, q, r$  jsou racionální.

(CAPS 2023/1, část (a))

**Úloha 28.** Existuje nezáporné celé číslo  $a$  takové, že rovnice

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

má alespoň 100000 různých řešení  $(m, n)$  pro  $m, n \in \mathbb{N}$ ? (EGMO 2021/6)

**Úloha 29.** Posloupnost je daná  $a_0 = c$  a  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ . Zkuste si tipnout, jak rychle asymptoticky prostě  $a_n$ . Bude to lineárně, kvadraticky, exponenciálně?

**Úloha 30.** Najděte všechna reálná  $A$  takové, že každá posloupnost  $x_1, x_2, \dots$  splňující

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

pro všechna  $n \geq 1$  obsahuje konečně mnoho záporných členů. (MEMO 2021/I1)

**Úloha 31.** Nazveme prirodzené číslo  $n$  *mocninové*, ak  $n = x^k$  pro nějaké prirodzené čísla  $x, k$ , kde  $k \geq 2$ . Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic po sobě jdoucích čtverců s rozdílem dělitelným 2025 takových, že mezi těmito čtverci neleží žádné jiné mocninové číslo. (vesměs iKS 10/N6)

**Úloha 32.** Necht  $x_0, x_1, \dots$  je posloupnost splňující

$$x_{n+1} = \frac{(n^2 + 1)x_n^2}{x_n^3 + n^2}.$$

Pro které hodnoty  $x_0$  je posloupnost ohraničená? (Simon Marais 2023/A4)

**Úloha 33.** Buď  $a$  sudé přirozené číslo. Najděte všechna reálná  $x$  taková, že

$$\left\lfloor (b^a + x)^{1/a} \cdot b^{a-1} \right\rfloor = b^a + \lfloor x/a \rfloor$$

platí pro všechna přirozené  $b$ . (IMC 2025/4)

## Co se mi nevešlo jinem

**Úloha 34.** Součet přirozených čísel je 2026. Jaký je jejich nejvyšší možný součin?

**Úloha 35.** Dokažte, že pro každé přirozené  $m$  existuje  $n \geq m$  takové, že

$$\binom{n}{m} = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor.$$

Navíc pro dané  $m$  označme  $p(m)$  nejmenší takové  $n$ . Ukažte dále, že  $p(2025) = p(2026) \neq p(2027)$ . (MEMO 2018/I4)

**Úloha 36.** Rovnice

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

s 2016 členy na každé straně je napsaná na tabuli. Kolik nejméně můžeme vymazat členů tak, aby obě strany zůstaly neprázdné a navíc výsledná rovnice neměla řešení?  
(IMO 2016/5)

**Úloha 37 (technická).** Pro každé přirozené  $n$  najděte nejmenší hodnotu výrazu

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor,$$

přes všechny permutace  $a_1, \dots, a_n$  množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . (Shortlist 2021/A3)

## Literatura a zdroje

Tato přednáška mi byla zjevena ve snu.

- [1] Alex Song: *Sequences*, Canada IMO preparation 2024.
- [2] Majda Mišinová: *Nerovnosti bez kladiv*, Prase, Mamutov 2023.
- [3] Victor Y. Wang: *Manipulation and Bounding*, MOP, 2018.

## Hinty

**Hint 4.** Zamysli se nad podmínkou a tou sumou.

**Hint 5.** Pro první část jednoduše dosazuj podmínku do výrazu  $xy + yz + xz$ . Pro druhou část najděte minimální polynom.

**Hint 6.** Co když  $k_{n-1} = n$ ?

**Hint 7.** Zapiš  $x = n + q$  pro  $q \in [0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a dořeš pro  $q$ .

**Hint 8.**  $na_{n+1} - a_1 - \dots - a_n$  je rostoucí posloupnost.

**Hint 9.** Sporuj a použij trojúhelníkovou nerovnost.

**Hint 10.** Dokaž, že jedno z každých tří po sobě jdoucích  $n$  leží v  $S_x$  pro  $x \geq \frac{1}{2}$ .

**Hint 11.** Vypiš si hodnoty  $\frac{a_n}{n}$ . Moc velkých hodnot nenabývá, co?

**Hint 12.** Podívej se na  $a_n b_n$  a odhaduj. Taky se dá dívat na  $a_n + b_n$ .

**Hint 13.** Pro prvních pár členů najdi zlatý řez. Pak chytře indukuj – ukaž, že  $a_{n+1} < ca_n(1 + a_n)$ .

**Hint 14.** Uprav podmínku na teleskopující součet. Na konci indukuj.

**Hint 15.** Podívej se na nejmenší a největší číslo.

**Hint 16.** Sporuj a najdi maximální  $|b_k|$ . Pak znamínkuj a najdi explicitně větší  $|a_i|$ .

**Hint 17.** Seřaď si čísla v  $A$  a postupuj sporem.

**Hint 18.** Seřaď po sobě jdoucí podíly. Rozděl případy podle toho, jestli je málo nebo hodně podílů  $> 1$ .

**Hint 19.** Nejprve odhadni zespoda členy s lichými indexy nějakou konstantou. Pak už to je zbývá dobušit.

**Hint 20.** Zvol  $(a, b) = (i, j)$ , pro které nastane maximum a sporuj. Uvažuj  $\alpha, \beta$ , že  $2^\alpha a < 1$  a pod., ukaž, že  $\alpha + \beta < b - a$ .

**Hint 21.** Díky lichosti  $n$  existuje monotonní trojice.

**Hint 22.** Pro kladné  $x$  zjednoduš pomocí  $d_i = 1 - c_i$ . Pak všechny  $d_i x^i$  odhadni jedním členem.

**Hint 23.** Uvažme čtyři čísla  $a < b < c < d$ . Pro jakou permutaci získáme dvojici nejbližších zlomků? Uspořádej si je.

**Hint 24.**  $x_n - 1$  je alternující posloupnost, co klesá ve velikosti.

**Hint 25.** Nejprve se podívej na  $m = 1$ , pak  $m = 2$ . Pro každý dobrý index si vezmi nejkratší úsek, který ho udělá dobrým.

**Hint 26.** Využij jednu rozjezdovou úlohu a rozděl si případy.

**Hint 28.** Zvol si  $n = \lfloor \text{levá strana} \rfloor$  a odhadni levou stranu asymptoticky jako  $O(m \log m)$ . Najdi pak funkci, že levá - pravá bude  $O(f(m))$ .

**Hint 29.** Tipni, že  $a_n \approx (An)^B$  a Tayloruj.

**Hint 30.** Pro  $A \geq 2$  zkonstruuj triviálně. Pro  $A < 2$  limiř.

**Hint 31.** Sporuj. Co by se stalo, kdyby v každém intervalu  $(x^2, (x+1)^2)$  délky 2025 ležela mocnina? Kolik je vlastně mocnin  $\leq N$ ?

**Hint 32.**  $x_1, x_2 \leq 1$  je lehké. Jinak dokaž, že posloupnost má limitu.

**Hint 33.** Odvoď si, že  $b = 1$  je postačující.

**Hint 35.** Horní odhad na celé části toho moc nedá. Tak co ten dolní?

**Hint 36.** Určitě to musí být alespoň 2016, to vyjde. Empiricky pro 4, 8 najdi, jaké členy smazat.

**Hint 37.** Kam se díváš, počítej

# Aritmetické multiplikatívne funkcie

*Jakub Šošovička*

**Abstrakt.** Na prednáške sa pozrieme na multiplikatívne funkcie, ktoré sa často vyskytujú v olympiáde, ako počet deliteľov, súčet deliteľov alebo Eulerova funkcia. Ukážeme si ako spolu súvisia a čo s tým má Dirichletova konvolúcia. Na záver si spočítame pár príkladov.

**Poznámka.** Počet deliteľov budeme značiť  $d(n)$ , súčet deliteľov  $\sigma(n)$  a Eulerovu funkciu tradične  $\varphi(n)$ .

**Definícia.** Funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  nazveme aritmetické.

**Definícia.** Aritmetická funkcia  $f$  je multiplikatívna, ak pre všetky nesúdeliteľné dvojice prirodzených čísel  $m, n$  platí  $f(mn) = f(m)f(n)$ .

**Definícia.** Aritmetická funkcia  $f$  je kompletne multiplikatívna, ak pre všetky dvojice prirodzených čísel  $m, n$  platí  $f(mn) = f(m)f(n)$ .

**Definícia.** Dirichletová delta funkcia  $\delta$  je aritmetická funkcia spĺňajúca

- (i)  $\delta(n) = 1$ , ak  $n = 1$ ,
- (ii)  $\delta(n) = 0$ , ak  $n > 1$ .

**Definícia.** Möbiova funkcia  $\mu$  je aritmetická funkcia spĺňajúca

- (i)  $\mu(n) = 0$ , ak je  $n$  deliteľné štvorcom väčším ako 1,
- (ii)  $\mu(n) = -1$ , ak je  $n$  bezštvorcové a delí ho nepárny počet prvočísel,
- (iii)  $\mu(n) = 1$ , ak je  $n$  bezštvorcové a delí ho párny počet prvočísel.

**Tvrdenie.** Nasledujúce funkcie sú multiplikatívne:

- (i)  $\mathbf{1}(n)$
- (ii)  $\delta(n)$
- (iii)  $\mu(n)$
- (iv)  $id(n)$
- (v)  $d(n)$
- (vi)  $\sigma(n)$
- (vii)  $\varphi(n)$

**Tvrdenie.** Nech  $n = \prod p_i^{\alpha_i}$  (prvočíselný rozklad). Potom

- (i)  $d(n) = \prod (\alpha_i + 1)$ ,
- (ii)  $\sigma(n) = \prod \left( \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right)$ ,
- (iii)  $\varphi(n) = \prod p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1)$ .

**Tvrdenie.**  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ .

**Tvrdenie.** Nech  $f$  je aritmetická multiplikatívna funkcia. Potom funkcia  $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$  je tiež multiplikatívna.

**Definícia (Dirichletová konvolúcia).** Nech  $f, g$  sú aritmetické funkcie. Definujme operátor  $*$  nasledovne:  $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$ .

**Tvrdenie.** Platí, že binárna operácia  $*$  spĺňa

- (i) Je komutatívna, teda  $f * g = g * f$ ,
- (ii) Je asociatívna, teda  $f * (g * h) = (f * g) * h$ ,
- (iii) Má jednotkový prvok, teda existuje  $e$  také, že  $f * e = f$ ,
- (iv) Je distributívna, teda  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ ,
- (v) Ak  $f$  a  $g$  sú multiplikatívne, tak aj  $f * g$  je multiplikatívna.

**Cvičenie 1.** Pozrite sa späť na predchádzajúce tvrdenia a skúste ich dokázať jednoduchšie pomocou Dirichletovej konvolúcie.

**Cvičenie 2.** Určte nasledujúce funkcie:

- (i)  $f * \delta$
- (ii)  $id * \mathbf{1}$
- (iii)  $\varphi * \mathbf{1}$
- (iv)  $\mathbf{1} * \mathbf{1}$
- (v)  $\mu * \mathbf{1}$
- (vi)  $\varphi * d$

## Ľahšie úlohy

**Poznámka.** Ak nie je povedané inak, v úlohách uvažujeme prirodzené čísla.

**Úloha 3.** Dokážte, že pre všetky  $n$  platí

$$d(n) \leq 2\sqrt{n}.$$

**Úloha 4.** Dokážte, že pre všetky  $n$  platí

$$\frac{\sigma(n)}{d(n)} \geq \sqrt{n}.$$

**Úloha 5.** Dokážte, že pre všetky  $n$  platí

$$n + 1 \geq d(n) + \varphi(n).$$

**Úloha 6.** Dokážte, že pre všetky  $n$  platí

$$d(n) \leq \sqrt{3n}.$$

**Úloha 7.** Dokážte, že pre všetky zložené čísla  $n$  platí

$$\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}.$$

**Úloha 8.** Nájdite všetky  $n$ , pre ktoré platí

$$\varphi(n) < \sqrt{n}.$$

**Úloha 9.** Nech  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  spĺňa  $f(f(n)) = d(n)$ . Dokážte, že  $f(p)$  je prvočíslo pre všetky prvočísla  $p$ .  
(Kanada 2017)

**Úloha 10.** Dokážte, že pre všetky  $n$  platí

$$d(1) + d(3) + \dots + d(2n - 1) < d(2) + d(4) + \dots + d(2n).$$

(Výberko 2023)

**Úloha 11.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ktoré spĺňajú  $f(mn) = f(m)f(n)$  a  $m + n \mid f(m) + f(n)$  pre všetky dvojice prirodzených čísel  $m, n$ .

(Turecko TST 2016)

## Ťažšie úlohy

**Úloha 12.** Označme  $f(n)$  počet súdeliteľných čísel s  $n$ , ktoré nedelia  $n$ . Dokážte, že rovnica  $f(n) = k$  má pre všetky  $k > 0$  iba konečný počet riešení. (iKS 12, N1)

**Úloha 13.** Nájdite všetky  $n$ , pre ktoré platí

$$\sigma(n) = d(n) \lceil \sqrt{n} \rceil.$$

(CPS 2022, 4)

**Úloha 14.** Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $(n, k)$  takých, že existuje prirodzené číslo  $s$ , pre ktoré platí  $d(sn) = d(sk)$ . (ISL 2018 N1)

**Úloha 15.** Pre prirodzené číslo  $n$  platí  $\varphi^k(n) = 1$ , kde  $\varphi^k$  značí  $k$ -krát aplikované  $\varphi$ . Dokážte, že  $n \leq 3^k$ . (USA TSTST 2016, 4)

**Úloha 16.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  spĺňajúce

- 1)  $f(mn) = f(m)f(n)$ ,
- 2) aspoň 2 z čísel  $f(m), f(n), f(m+n)$  sa rovnajú

pre všetky dvojice prirodzených čísel  $m, n$ . (EGMO 2022, 2)

**Úloha 17.** Nech  $d^k(n)$  značí  $k$ -krát aplikované  $d$  na prirodzené číslo  $n$ . Definujme postupnosť  $a_n$  nasledovne:  $a_0 = 1$ ,  $a_n = d(a_{n-1}) + d^2(a_{n-2}) + \dots + d^n(a_0)$ . Dokážte, že pre všetky prirodzené  $n$  je  $a_n \leq 3n$ . (ELMO Shortlist 2023)

**Úloha 18.** Nájdite všetky celočíselné polynómy  $P$  také, že  $\sigma(n) \mid P(n)$  pre všetky prirodzené  $n$ . (MEMO 2024 I4)

**Úloha 19.** Označme  $f(n)$  najmenšie  $m$ , pre ktoré  $d(m) = n$ . Dokážte, že  $f(2^k)$  delí  $f(2^{k+1})$  pre všetky  $k$ . (ISL 2011 N1)

**Úloha 20.** Dokážte, že postupnosť  $d(n^2 + 1)$  nie je od žiadneho momentu rastúca. (Petrohrad 1998)

**Úloha 21.** Nájdite všetky  $k$ , pre ktoré existuje  $n$  spĺňajúce

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

(IMO 1998/3)

**Úloha 22.** Celé číslo  $n > 2$  nazveme chutné, ak pre všetky dvojice kladných celých čísel  $a, b$  takých, že  $a + b = n$  platí, že  $\frac{a}{b}$  alebo  $\frac{b}{a}$  majú konečný desatinný zápis. Existuje nekonečne veľa chutných čísel? (ELMO 2017)

**Úloha 23.** Nech  $d_1(n)$  je počet deliteľov čísla  $n$  so zvyškom 1 modulo 3. Určte všetky  $k$ , pre ktoré existuje  $n$  spĺňajúce

$$\frac{d(10n)}{d_1(10n)} = k.$$

(ISL 2016 N2)

**Úloha 24.** Definujme postupnosť  $a_n$  nasledovne:  $a_0 = 1$  a  $a_n$  je najmenšie celé číslo väčšie ako 1 spĺňajúce

$$\sigma(a_0 a_1 \dots a_{n-1}) \mid \sigma(a_0 a_1 \dots a_n).$$

Koľko deliteľov čísla  $2024^{2024}$  sa v postupnosti vyskytuje? (Turecko TST 2024)

**Úloha 25.** Definujme funkciu  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ako  $f(n) = \sum_{k=1}^n \gcd(k, n)$ . Nájdite všetky  $a$ , pre ktoré má rovnica  $f(n) = an$  práve jedno riešenie. (ISL 2004 N2)

**Úloha 26.** Existuje konštanta  $C$  taká, že

$$\frac{\varphi(d(n))}{d(\varphi(n))} \leq C$$

pre všetky  $n \geq 1$ ?

(ISL 2020 N6)

## Literatúra a zdroje

[1] Aditya Khurmi: *Modern olympiad number theory*

## Hinty

**Hint 1.** Za  $g$  stačí dosadiť **1**; ak je funkcia multiplikatívna, stačí ju vedieť zrátať v mocnine prvočísla.

**Hint 2.** Sú multiplikatívne, stačí ich určiť v mocninách prvočísla.

**Hint 3.** Popárujte delitele  $d$  a  $\frac{n}{d}$ .

**Hint 4.** Popárujte delitele  $d$  a  $\frac{n}{d}$ .

**Hint 5.** Riešenie sa nachádza v zadaní úlohy 13.

**Hint 6.** Odhadujte postupne po prvočíslach výraz  $\frac{d(n)^2}{n}$ .

**Hint 7.** Prvočíselný rozklad, najmenšie prvočíсло je najviac odmocnina.

**Hint 8.** Prvočíselný rozklad.

**Hint 9.** Stačí ukázať  $f(2) = 2$ .

**Hint 10.** Počítajte dvoma spôsobmi. Pozrite sa na každého deliteľa, koľko krát je na ktorej strane.

**Hint 11.** Určite  $f(2)$  a dosadte  $(f(2)^k, n)$  pre pevné  $n$ . Druhá možnosť - predpokladajte sporom  $q \mid f(p)$  a dosadte lineárnu kombináciu  $p$  a  $q$ , aby ste dostali spor.

**Hint 12.** Uvažujte najmenšieho prvočíselného deliteľa, stačia vám jeho násobky.

**Hint 13.** Jednotku a  $n$  vyhod' bokom a popáruj ostatné delitele AG-čkom. Ďalej odhadni (stačí  $d(n) \leq 2\sqrt{n}$ ) a over malé prípady.

**Hint 14.** Pokiaľ jedno delí druhé, je to jasné. Inak sa pozerajte na rozklady a skonštruujte vhodné  $s$ .

**Hint 15.** Pri každej aplikácii  $\varphi$  odoberieme najviac jednu dvojku. Koľkými dvojkami prispievajú prvočísla? Je to aspoň  $\log_3 p$ ?

**Hint 16.** Nech  $p$  je najmenšie (prvo)číсло, kde  $f(p) \neq 1$ . Nech  $q$  je druhé najmenšie také prvočíсло. Z toho dostaň spor.

**Hint 17.** Stačí zobrať odhad  $d(n) \leq \frac{n}{2} + 1$  a šikovne odhadnúť z indukcie. Dá sa použiť aj lepší odhad (nejaká odmocnina), ale bude to asi pain odhadovať.

**Hint 18.** Možných prístupov je veľa. Napríklad môže pomôcť, že  $q \mid \sigma(p^{q-2})$  pre vhodné prvočísla  $p, q$ .

**Hint 19.** Predpokladajte, že to neplatí a napíšte si prvočíselné rozklady. Skúste "vylepšiť" rozklad čísla  $f(2^k)$  na základe rozkladu čísla  $f(2^{k+1})$  tak, aby sa číсло zmenšilo a počet deliteľov zostal rovnaký.

**Hint 20.** Dosadte  $n$  a  $n + 1$ . Túto nerovnosť viete teleskopicky počítat. Pre veľké párne číсло potom dostanete spor.

**Hint 21.** Uvažujte rozklad. Tipnite si výsledok a indukciou. 2. hint: Ak je  $k = 4m + 1$ , tak uvažujte zlomok s čitateľom rovným  $k$ , inak zlomok s čitateľom  $3k$ .

**Hint 22.** Uvažujte nesúdeliteľné  $a$ , tých je dosť, ale tých, čo majú iba dvojky a päťky je málo (asymptoticky).

# Funkcionálne rovnice a iné

*Dominik Rígasz*

**Abstrakt.** Funkcionálky sú typ príkladov, ktorému sa nechce zomrieť, a stále sa každoročne objavujú na súťažiach. Na prednáške budeme riešiť **nedávne** funkcionálky všetkých typov, zo všetkých oblastí. Zatiaľčo funkcionálky nad  $\mathbb{R}$  občas pôsobia ako sudoku, funkcionálky z iných oblastí často vyžadujú netriviálne úvahy.

## Všeobecné techniky (sudoku)

Najzákladnejšou a najvšeobecnejšou metódou je **dosadzovanie**. Dobré rady, ako a čo dosadzovať:

- **Dosadzujeme pekné konštanty** (neutrálne prvky vzhľadom na sčítanie, násobenie) ako 0, 1,  $-1$ , podľa situácie aj iné. Snažíme sa v nich vypočítať funkčné hodnoty.
- Snažíme sa **vynulovať alebo skonštantniť niektoré výrazy** v argumentoch funkcií (napríklad keď máme  $f(x + y)$ , tak môžeme skúsiť  $y := -x$ ).
- Snažíme sa **eliminovať výrazy na opačných stranách** rovnice (napríklad keď máme na jednej strane  $f(x + 2f(x))$  a na druhej  $f(y + f(x))$ , tak voľbou  $y := x + f(x)$  tieto výrazy eliminujeme).
- **Vyjadrovanie výrazov dvoma spôsobmi**. Keď napríklad máme vzťah  $f(x + y) = V(x, y)$ , tak  $f(4x) = V(3x, x)$ , ale rovnako  $f(4x) = V(2x, 2x)$ , teda  $V(3x, x) = V(2x, 2x)$ . Napríklad aj na  $f(f(x))$  sa vieme pozerať dvoma spôsobmi: jednak je to výraz ktorý dostaneme keď na  $f(x)$  aplikujeme  $f$ , no taktiež je to výraz, ktorý dostaneme keď dosadíme  $x := f(x)$ . Konkrétne ak napríklad  $f(x) = V(x)$ , tak potom  $f(V(x)) = V(f(x))$ .
- **Symetrie v premenných**. Keď napríklad máme  $xyf(f(x)f(y)) = f(x) + y$ , tak zámenou  $x, y$  sa ľavá strana nezmení a porovnaním dostaneme  $f(x) + y = f(y) + x$ . Často si musíme symetriu v rovnici dotvoriť nejakým dosadením.

Často je veľmi užitočné robiť úvahy o **vlastnostiach** hľadanej funkcie, ktoré poznáte zo školy. Najčastejšie a najpoužívanejšie sú:

- **Párnosť a nepárnosť**. Dajú sa dokazovať napríklad z rovníc  $f(x^2) = xf(x)$ , resp.  $f(x^2) = x^2f(x)$ , dosadeniami, v ktorých zmeníme znamienka niektorých premenných.
- **Prostosť (injekcia)**. Dokázať sa dá zo vzťahov, kde máme všetky  $x$ -ká zabalené v  $f$ , až na jedno. Sila injektivity je, že nám dovoľuje škrtať  $f$ -ká. Napríklad z  $f(f(x)) = f(x)$  dostaneme  $f(x) = x$ . **Prostosť často v úlohách súvisí s periodicitou** – špeciálne ak predpokladáme "neprostosť" tak z toho občas plynie periodičita (MEMO 2024 T-2).

- **Na (surjekcia)**, resp. uvažovanie oboru hodnôt. Táto vlastnosť sa dá vidieť z rovníc, kde máme nejakú voľnú premennú mimo  $f$ -iek. Často nevieme dokázať surjektivitu funkcie na celý obor. Niekedy však stačí poznať len časť oboru hodnôt. Typickým príkladom je ukázať, že funkcia má **nulový bod**, ten si nejako označiť a potom ho dosadzovať. Alebo ak vieme, že obor hodnôt funkcie je zhodný s jej definičným oborom, tak môžeme nahradiť výraz  $f(x)$  novou premennou  $z$ .

Existuje množstvo ďalších trikov a figľov, kreativite sa medze nekladú. Z času na čas, najmä v ťažších úlohách, sa dajú uplatniť aj nasledujúce metódy:

- **Vyriešiť rovnicu v menšom obore** (napríklad v  $\mathbb{Q}$ ) a rozšíriť riešenie na väčší obor (napríklad  $\mathbb{R}$ ).
- Nielen s predchádzajúcim bodom je spojená aj **matematická indukcia**. Napríklad z rovnice  $f(x+1) = f(x) + 1$  získame  $f(x+n) = f(x) + n$ . Aj takéto **malé zovšeobecnenia sa môžu hodíť**.
- Použitie monotónnosti, či iných nerovností týkajúcich sa funkčných hodnôt. **Nerovnosti sú obzvlášť užitočné pri funkcionálkach nad  $\mathbb{R}^+$** .
- Použitie **periodicity** funkcie. Platí, že ak má funkcia každú možnú reálnu periódu, tak už je konštantná.
- Použitie **fixných bodov** (bodov, kde  $f(t) = t$ ).
- **Dosaď zadanie samé do seba**, aplikovať podmienku samú na seba. Napríklad ak máme  $f(x+y) = f(x) - f(x+x^2f(y))$  (KMS 46-Z2-10) tak môžeme skúsiť  $y := x^2f(y)$ , čím využijeme podmienku v samej sebe, a možno niečo dostaneme.
- **Definovať nové funkcie** – napríklad keď tušíme, že  $f(x) = x^2$  je jediné riešenie, tak nie je na škodu označiť  $g(x) = f(x) - x^2$  a prepísať pôvodnú rovnicu v  $g$ , o ktorej chceme dokázať, že je nulová. Často to nemusí priniesť nič zásadne nové, ale môže to situáciu výrazne sprehľadniť.

## A-funkcionálky (klasické)

**Úloha 1.** Nech  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  je funkcia taká, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}^+$  platí

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Ukážte, že existuje prirodzené číslo  $n_0$  také, že pre všetky prirodzené  $n \geq n_0$  a všetky reálne  $x > 0$  platí

$$f^n(x) \geq x.$$

(Tu  $f^n$  znamená zloženie funkcie  $f$  so sebou  $n$ -krát.) (MEMO 2025 I-1)

**Úloha 2 (ťažšia).** Nájdite všetky funkcie  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}^+$ , platí

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$$

a existuje nanajvýš jedno číslo  $a \in \mathbb{R}^+$ , pre ktoré  $f(a) = 1$ . (MEMO 2025 T-2)

**Úloha 3.** Určte všetky celé čísla  $k \geq 0$ , pre ktoré existuje funkcia  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  taká, že  $f(2024) = k$  a  $f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$  pre všetky celé čísla  $n \geq 0$ .  
(MEMO 2024 I-1)

**Úloha 4.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}$  platí

$$yf(x+1) = f(x+y-f(x)) + f(x)f(f(y)).$$

(MEMO 2024 T-2)

**Úloha 5.** Daná je funkcia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taká, že pre všetky  $m, n \in \mathbb{N}$  platí

$$f(n+f(n))(m+f(n)) = (f(2m) + 2f(n))f(n).$$

Určte všetky možné hodnoty (a)  $f(2022)$ , (b)  $f(2023)$ . (MBL-B 2023 QQ)

**Úloha 6.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}$  platí

$$f(xy + f(x^2)) = xf(x+y).$$

(Výberko 2025)

**Úloha 7.** Nech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia taká, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}$  platí

$$f(x+y)f(x-y) \geq f(x)^2 - f(y)^2.$$

Predpokladajme, že existujú nejaké  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je nerovnosť vyššie ostrá. Ukážte, že buď pre všetky  $x \in \mathbb{R}$  platí  $f(x) \geq 0$ , alebo pre všetky  $x \in \mathbb{R}$  platí  $f(x) \leq 0$ .  
(ISL 2023 A2)

**Úloha 8.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}^+$  platí

$$x(f(x) + f(y)) \geq (f(f(x)) + y)f(y).$$

(ISL 2023 A4)

**Úloha 9 (ťažšia).** Nájdite všetky funkcie  $f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  také, že pre všetky  $x, y \in (0, \infty)$  platí

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(x+y).$$

(CAPS 2025 P6)

**Úloha 10 (ťažšia).** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}^+$  platí

$$f(x + yf(x)) = xf(1+y).$$

(EMC 2024 Senior P4)

**Úloha 11.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}^+$  platí

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + 2.$$

(USAMO 2023 P2)

**Úloha 12.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}^+$  platí

$$f(x) = f(x + y) + f(x + x^2 f(y)).$$

(KMS 46-Z2-P10)

**Úloha 13 (ťažšia).** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}$  platí

$$f(xf(y)) + f(y) = f(x + y) + f(xy).$$

(iKS 14-3)

**Úloha 14.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}$  platí

$$f(xf(y) + x^2 + y) = f(x)f(y) + xf(x) + f(y).$$

(KMS 47-Z2-P10)

## C-funkcionálky (iteračné a iné)

Pri iteračných funkcionálkach (teda takých, kde sa nám vyskytuje  $f$  vnorené do seba veľa krát) sa často oplatí situáciu znázorniť grafom, konkrétne orientovaným grafom kde vrcholy sú prvky definičného oboru  $f$ , a šípka ide z  $x$  do  $y$  práve vtedy ak  $f(x) = y$ .

**Definícia.** Nech  $f$  je funkcia. Pre prirodzené  $n$  budeme značiť

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-krát}}(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n\text{-krát}},$$

teda  $f$  aplikované  $n$ -krát na  $x$ , a pre  $n = 0$  dodefinujeme  $f^0(x) = x$ . Keby sme náhodou chceli zapísať  $n$ -tú mocninu hodnoty  $f(x)$ , napíšeme  $(f(x))^n$ .

Všimnime si niekoľko užitočných pozorovaní:

- Funkciám  $f : M \rightarrow M$  zodpovedajú práve tie grafy na množine vrcholov  $M$ , kde z každého vrcholu vychádza práve jedna šípka.
- Pre funkciu na konečnej množine sa cesta z ľubovoľného vrcholu zacyklí.
- Nech  $x$  leží v cykle dĺžky  $k$  na funkcii  $f$ . Potom  $f^n(x) = x$  práve vtedy, keď  $k \mid n$ .
- Funkcia uvažovaná ako graf je: (1) **prostá** (injektívna), keď do každého vrcholu vedie najviac jedna šípka, (2) **na** (surjektívna), keď do každého vrcholu vedie aspoň jedna šípka, (3) **bijektívna**, keď do každého vrcholu vedie práve jedna šípka.
- Nech  $M$  je konečná množina. Potom je funkcia  $f : M \rightarrow M$  prostá práve vtedy, keď je na.
- Bijekcia pozostáva len z navzájom disjunktných cyklov a obojstranných reťazí.
- Prostá funkcia pozostáva len z navzájom disjunktných cyklov, jednostranných reťazí a obojstranných reťazí. Počiatkové vrcholy jednostranných reťazí sú pritom presne tie prvky, ktoré chýbajú v obore hodnôt.

Úlohy s iteráciami dokážu byť dosť rôznorodé a okrem všeobecných funkcionálových trikov a uvedených pozorovaní je častý aj **extremálny princíp**: Na cykloch sa môže oplatiť pozrieť sa na najväčší alebo najmenší prvok. Rovnako tak môže niekedy pomôcť minimálny prvok oboru hodnôt. Častá je tiež **indukcia**.

**Cvičenie.** Je daná funkcia  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Skonstruujte  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  takú, že  $f^n(x) = 0$  má presne  $g(n)$  riešení pre každé  $n \in \mathbb{N}$ .

**Cvičenie.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ktoré pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  spĺňajú

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

**Cvičenie.** Rozhodnite, či existuje funkcia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  spĺňajúca  $f(f(n)) = 3n$  pre všetky  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Úloha 15.** Sú dané  $a, k \in \mathbb{N}$ . Dokážte, že funkcia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  spĺňajúca  $f^k(n) = n + a$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje práve vtedy, keď  $k \mid a$ .

**Úloha 16.** Nájdite všetky prirodzené  $k$ , pre ktoré existujú funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že  $g$  nadobúda nekonečne veľa hodnôt a  $f^{g(n)}(n) = f(n) + k$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ . (MEMO 2020 I-1)

**Úloha 17.** Nájdite všetky polynómy  $P \in \mathbb{Z}[X]$  také, že pre všetky  $x \in \mathbb{Z}$  a všetky  $n \in \mathbb{N}$  platí  $n \mid P^n(x) - x$ . (Israel TST 2020)

**Úloha 18.** Daná je konečná (neprázdna) množina  $S$ . Povieme, že funkcia  $f : S \rightarrow S$  je  $n$ -tá mocnina, ak existuje funkcia  $g : S \rightarrow S$  taká, že  $f(x) = g^n(x)$  pre všetky  $x \in S$ . Ukážte, že ak  $f : S \rightarrow S$  je  $n$ -tou mocninou pre všetky  $n \in \mathbb{N}$ , tak potom  $f(f(x)) = f(x)$  pre všetky  $x \in S$ . (Baltic Way 2024)

**Úloha 19.** Nech  $S$  je konečná množina, a nech  $A$  je množina všetkých funkcií z  $S$  do  $S$ . Nech  $f \in A$ , a nech  $T = f(S)$  je obraz množiny  $S$  pod mapovaním  $f$ . Predpokladajme, že  $f \circ g \circ f \neq g \circ f \circ g$  pre každú funkciu  $g \in A \setminus \{f\}$ . Ukážte, že  $f(T) = T$ . (ISL 2017 A3)

**Úloha 20.** Nech  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . Funkcia  $f : S \rightarrow S$  je *krutoprisna*, pokiaľ pre každé  $k \in S$  platí  $f^{f(k)}(k) = k$ . Dokážte, že každá krutoprisna funkcia má aspoň  $P + 1$  pevných bodov, kde  $P$  je počet prvočísel v intervale  $(\sqrt{n}, n]$ . (PraSe 36-4p-7)

**Úloha 21.** Určte všetky podmnožiny  $S$  množiny  $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ , pre ktoré existuje funkcia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taká, že

$$S = \{f(a + b) - f(a) - f(b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}.$$

(ISL 2024 A4)

**Úloha 22.** Striktne rastúcu funkciu  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  nazveme *centrálnou*, ak pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(f(n))}{f(n)} = f(n).$$

Ukážte, že existuje (fixná) funkcia  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taká, že pre ľubovoľnú centrálnu funkciu  $f$  existuje nekonečne veľa čísel  $n \in \mathbb{N}$  takých, že  $g(n) = f(n)$ .

(EGMO 2025 P2)

**Úloha 23.** Nech  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je funkcia taká, že pre ľubovoľné  $k \in \mathbb{N}$  platí, že množina

$$\{f(1), f(2), \dots, f(k)\}$$

obsahuje práve  $f(f(k))$  rôznych prvkov. Ukážte, že  $f(f(f(k))) = f(k)$  platí pre všetky  $k \in \mathbb{N}$ .

(EMC 2025 Senior P2)

**Úloha 24.** Konečná množina  $S$  kladných celých čísel sa nazýva *žirafová*, ak  $S$  obsahuje celé číslo  $|S|$ , kde  $|S|$  označuje počet rôznych prvkov v  $S$ . Majme funkciu  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , takú že pre ľubovoľnú žirafovú množinu  $S$  platí, že množina  $f(S)$  je tiež žirafová, kde  $f(S) := \{f(a) : a \in S\}$ . Nájdite všetky možné hodnoty  $f(2024)$ .

(iKS 14-1)

**Úloha 25.** Funkcia  $f : A \rightarrow A$  sa nazve  $A$ -dobrá, ak  $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$  pre všetky  $a, b \in A$ . Aký najväčší počet rôznych hodnôt môže byť medzi číslami  $f(1), \dots, f(2023)$ , kde  $f$  je  $A$ -dobrá funkcia? Riešte pre (a)  $A = \mathbb{Z}$ , (b)  $A = \mathbb{N}$ .  
(MEMO 2023 T-1)

## N-funkcionálky

Ide o funkcionálky, v ktorých vystupujú deliteľnosti, prvočísla, aritmetické funkcie, prípadne celočíselné polynómy. Používame poznatky z teórie čísel, stratégia ostáva rovnaká. Častou metódou pri deliteľnostných funkcionálkach je skúsiť **skonštantniť pravú stranu deliteľnosti a vedieť hýbať ľavou** – potom totižto dostávame, že pravá strana musí byť nulová. Často sa tiež oplatí pozerať **kam sa mapujú prvočísla**, prípadne ukázať, že funkcia je multipliatívna alebo niečo podobné (o tom vám ale viac povie Šošo ;D).

**Úloha 26.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že  $f(2) = 1$  a pre všetky  $a, b \in \mathbb{N}$  platí

$$\text{lcm}(f(a + b), f(b)) \mid \text{lcm}(a + f(b), b).$$

(Baltic Way 2025)

**Úloha 27.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že pre všetky  $a, b \in \mathbb{N}$  platí

$$f(a) + f(b) \mid (a + b)^2.$$

(Baltic Way 2022)

**Úloha 28 (ťažšia).** Nech  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je funkcia taká, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{N}$  je číslo  $f(x) + y$  štvorcom práve vtedy ak je štvorcom číslo  $x + f(y)$ . Ukážte, že  $f$  je injektívna.  
(EMC 2023 Senior P4)

**Úloha 29.** Nájdite všetky  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že pre ľubovoľné  $m, n \in \mathbb{N}$  platia obe podmienky

$$f(mn) = f(m)f(n), \quad m + n \mid f(m) + f(n).$$

(iKS 14-2)

**Úloha 30.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že  $a + f(b) \mid a^2 + bf(a)$  pre všetky  $a, b \in \mathbb{N}$  také, že  $a + b > 2019$ .  
(ISL 2019 N4)

**Úloha 31 (ťažšia).** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{N}$  platia obe nasledovné podmienky:

- (1):  $x$  a  $f(x)$  majú rovnaký počet kladných deliteľov,
- (2): ak  $x \nmid y$  a  $y \nmid x$ , potom  $\text{gcd}(f(x), f(y)) > f(\text{gcd}(x, y))$ .

(EGMO 2024 P5)

**Úloha 32.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že pre všetky  $a, b \in \mathbb{N}$ , platia obe nasledovné podmienky:

(1):  $f(ab) = f(a)f(b)$ ,

(2): aspoň dve z čísel  $f(a)$ ,  $f(b)$ , a  $f(a + b)$  sa rovnajú. (EGMO 2022 P2)

**Úloha 33.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  také, že pre všetky  $x, y \in \mathbb{Q}$  platí

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2.$$

(EGMO 2021 P2)

## G-funkcionálky

**Úloha 34.** Nech  $S$  je množina všetkých bodov roviny. Nájdite všetky funkcie  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  také, že ak  $ABC$  je nedegenerovaný trojuholník, pre ktorý platí  $f(A) \leq f(B) \leq f(C)$  a bod  $H$  je jeho ortocentrum, tak potom

$$f(A) + f(C) = f(B) + f(H).$$

(MBL-B 2024 QQ)

**Úloha 35.** Daná je funkcia  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ . Uvažujme graf tejto funkcie v súradnicovej sústave. Ak vyberieme ľubovoľné tri rôzne body  $A, B, C$  patriace grafu funkcie  $f$ , ktoré neležia na priamke, tak aj ťažisko trojuholníka  $ABC$  patrí grafu funkcie  $f$ . Nájdite všetky také funkcie  $f$ .

**Úloha 36.** Nech  $f : \pi \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia z roviny do reálnych čísel taká, že

$$f(A) + f(B) + f(C) = f(O) + f(G) + f(H)$$

pre ľubovoľný ostrouhlý trojuholník  $\triangle ABC$  so stredom kružnice opisanej  $O$ , ťažiskom  $G$  and ortocentrom  $H$ . Ukážte, že  $f$  je konštantná. (BMOSL 2024 G7)

**Úloha 37.** Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  také, že

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0,$$

pre všetky štvorice bodov  $A, B, C, D$  tvoriace vrcholy štvorca so stranou 1.

(BMOSL 2022 A6)

**Úloha 38 (ťažšia).** Nech  $L$  je množina všetkých priamok v rovine a  $f$  je funkcia, ktorá priradí každej priamke  $\ell \in L$  bod  $f(\ell)$  na  $\ell$ . Predpokladajme, že pre hocikákoľvek bod  $X$  a ľubovoľné tri priamky  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  prechádzajúce cez  $X$ , ležia body  $f(\ell_1), f(\ell_2), f(\ell_3)$ , a  $X$  na kružnici. Ukážte, že existuje práve jeden bod  $P$  taký, že  $f(\ell) = P$  pre všetky priamky  $\ell$  prechádzajúce cez  $P$ . (ISL 2019 G8)

# Hinty

**Hint 1.** Ukáž to pre nejaké konkrétne  $n$ -ká, potom nakombinuj.

**Hint 2.** Ak  $f(1) = 1$  sme hotoví. Nerovnosti. Čo ak  $f(1) > 1$ ? Čo ak  $f(1) < 1$ ? Pomôže uvažovať veľkosť výrazu  $b = \frac{2-f(1)}{f(1)}$  a veľa dosadení.

**Hint 3.** Môže byť  $f(n) > n$ ? Pre (skoro) všetky ostatné urob nenáročnú konštrukciu.

**Hint 4.** Urob múdre dosadenie aby sa ti rovnali argumenty na oboch stranách. Ak by sme mali injektivitu tak sme vyhrali. Čo vieme povedať o  $f$  ak existujú  $a \neq b$  s  $f(a) = f(b)$ ?

**Hint 5.** Ľahko zistíš  $f(2x)$ . Čo ak  $f(y)$  je nepárne? Pre párne hodnoty skús konštrukciu.

**Hint 6.** Ukáž, že  $f$  je nepárna. Často sa oplatí na  $x + y$  pozeráť ako na jednu premennú. Využi nepárnosť a beztréstne zmeň znamienka nejakých premenných.

**Hint 7.** Zmeň premenné ( $x + y$  a  $x - y$  sú lineárne nezávislé).

**Hint 8.** Indukciou ukážte  $f(x) > \frac{n}{n+1}x$ .

**Hint 9.** Výraz  $a + bf(a)$  je zaujímavý, vieme povedať niečo o jeho hodnote. Čo tak dosadiť ho za  $x$ .

**Hint 10.** Ukáž, že je rastúca, potom rastúca sujekcia  $\rightarrow$  spojité, odkiaľ je to ľahké ( $y \rightarrow 0^+$ ). Dá sa to však aj bez analýzy iba odhadmi: Pre  $x > 1$  ukážte  $f(x) \geq 1$ , následne  $f(x) \geq x$ . Z  $f(x) > x$  dostante pre  $x > 1$  spor.

**Hint 11.** Veľa prístupov. Najkratší: Skúste dosadiť ze niektoré premenné jednotky a porovnať to s  $P(x, c/x + 1)$ .

**Hint 12.** Dosadte zadanie do seba. Výraz  $x^2 f(y)$  je zaujímavý. Pozor na detaily.

**Hint 13.** Využi symetriu na začiatku, rob veľa dosadení. Môže  $f$  byť periodická?

**Hint 14.** Zvoľ argument ľavej strany tak, aby sa ti odčítal s niečim napravo. Čo ak by  $f$  bola prostá v 1?

**Hint 15.** Ako budú vyzeráť reťaze? Pri hýbaní sa po nich uvažujte zvyšky čísel modulo  $a$ .

**Hint 16.** Nakresli si obrázok. Pre  $k = 1$  máš málo čísel. Bude to pri ostatných fungovať?

**Hint 17.** Nech  $P(x) - x$  je nekonštantný polynóm. Potom existuje nekonečne veľa prvočísel  $p \mid P(n) - n$  pre nejaké  $n \in \mathbb{N}$ . Ak sa pozeráme na  $P$  ako funkciu v  $\mathbb{Z}_p$ , ako musí vyzeráť?

**Hint 18.** Stačí nájsť nejaké  $N$  také, že pre ľubovoľnú funkciu  $g : S \rightarrow S$  máme  $g^{2N} = g^N$ . Aké  $N$  by mohlo vyhovovať? Po koľkých aplikovaniach  $g$  sa určite dostaneme do cyklu? A potom?

**Hint 19.** Zvoľ  $g$  tak, aby si nanútil  $fgf = gfg$ . Využi to, že každá cesta  $f$  sa zacyklí ( $S$  je konečná).

**Hint 20.** Dĺžky cyklov.

**Hint 21.** Definuj novú funkciu. Aké sú riešenia  $2^a + 2^b = 2^c$ ? Indukcia.

**Hint 22.** Platí  $\sum_{k=1}^N (2k - 1) = N^2$ . Pomôže (po viac alebo menej skúšaní) definovať  $F(n) = f(n) - (2n - 1)$ . Ako rastie/klesá  $F$ ?

**Hint 23.** Existuje veľa riešení, všetky využívajú extrémálny princíp. Uvážte najmenšie  $n$  také, že  $f(f(f(n))) < f(n)$ .

**Hint 24.** Ak  $f(x) \geq x$  pre všetky  $x$  tak sa tešíme. V opačnom prípade uvážte najmenšie  $x$  pre ktoré  $f(x) < x$ . Aká môže byť hodnota  $f(x)$ ? Skúmajte vhodné množiny, nemusia mať ani veľa prvkov.

**Hint 25.** (a) je ľahká. Pre (b) uvaŕajte graf na vrcholoch  $1, \dots, 2023$ , kde hrany vedú medzi  $a^2 + b$  a  $b^2 + a$ . Úloha sa potom pýta na najväčší možný počet komponentov takého grafu. Ako vyzerajú tieto komponenty?

**Hint 26.** Dosaď jednotku a dvojku.

**Hint 27.** Veľa spôsobov, funguje napríklad indukcia v spojení s Bertrandom. Pravú stranu volíme tak aby mala málo deliteľov, skúmame  $f$  (prvočísla).

**Hint 28.** Nájdí nekonečnú konštantnú podpostupnosť, potom odhaduj.

**Hint 29.** Vhodným modulárnym dosadením ukáž, že  $f(p) = p^k$  pre nejaké  $k$  (závislé na  $p$ ). Potom sa snaž skonštantniť pravú stranu deliteľnosti tak že eliminuješ exponent.

**Hint 30.** Nájdí nekonečne veľa  $n$  takých, že  $f(n) = nf(1)$  (Dirichletova veta o prvočíslach pomôže), potom skonštantni pravú stranu.

**Hint 31.** Vyhovujú  $f(x) = p^{d(x)-1}$ . Indukcia na  $d(x)$ .

**Hint 32.** Pozri sa na najmenšie prvočísla  $p < q$  také, že  $f(p) > 1$  a aj  $f(q) > 1$ .

**Hint 33.** Nezabúdať na indukívne zovšeobecnenia. Špeciálne teraz, lebo  $\mathbb{Q}$  je iba na skok od  $\mathbb{Z}$ .

**Hint 34.** Ak  $H$  ortocentrum  $ABC$ , potom  $C$  je ortocentrum  $ABH$ . Potom sa hraj. Pravoúhlé trojuholníky sú pekné.

# Algoritmy

Martin {Šindelář, Štěpánek}

**Abstrakt.** Překvapivě často se stává, že je možné jinak těžkou úlohu vyřešit docela jednoduchým algoritmem. Ukážeme si, jak takové algoritmy mohou vypadat a vyřešíme nějaké úlohy.

Pod pojmem *algoritmus* rozumíme nějaký přesný návod či postup, kterým lze provádět nějakou proceduru či řešit úlohu. Přestože by se mohlo zdát, že algoritmy se hodí spíš do olympiády z informatiky, můžeme s jejich pomocí vyřešit mnoho (nejen) kombinatorik. Může se vyplatit použití nějakého algoritmu, jestliže

- hledáme netriviální konstrukci,
- máme zadanou nějakou operaci,
- chceme redukovat nepřehlednou konfiguraci,
- hrajeme hru a hledáme výherní strategii.

## Hladové algoritmy

Hladový algoritmus vždy provede to, co zrovna vypadá nejlépe. Algoritmus tedy vůbec „nepřemýšlí“ dopředu a vždy jde do lokálního optima. Někdy ale i tento „hloupý“ algoritmus může dojít k optimálnímu řešení.

**Příklad.** Potřebujeme zaplatit přesně  $N$  korun a máme neomezená množství bankovek a mincí standardních hodnot  $(1, 2, 5, \dots)$ . Chceme použít co nejmenší množství mincí a bankovek, jak to máme udělat?

**Úloha 1.** V každém políčku tabulky  $m \times n$  je napsáno reálné číslo. V jednom kroku můžeme změnit znaménka u všech čísel v jednom řádku nebo v jednom sloupci. Ukažte, že lze dosáhnout stavu, kdy bude součet v každém řádku i v každém sloupci nezáporný.

**Úloha 2.** Nechtě  $d$  je nejvyšší stupeň daného grafu. Dokažte, že tento graf lze obarvit nejvýše  $d + 1$  barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu.

**Úloha 3.** Dokažte, že každé přirozené číslo lze zapsat jediným způsobem jako součet jednoho nebo více Fibonacciho čísel, z nichž žádné dvě nejsou po sobě jdoucí ve Fibonacciho posloupnosti.

**Úloha 4.** Kamínky vázící dohromady 9 tun je třeba přepravit pomocí nákladáků. Víme, že žádný kamínek neváží víc než tunu a každý nákladák uveze 3 tuny. Kolik nejméně nákladáků je třeba, aby šlo všechny kamínky naráz přepravit?

(Německo 2000)

**Úloha 5.** Necht  $n$  je přirozené číslo. Majda a Lucia hrají hru – Majda má  $k$  listů papíru, kde  $k$  je také přirozené číslo. Na každý z listů Majda napíše některá z čísel od 1 do  $n$  (může napsat klidně všechna nebo žádná) – zbývající čísla vždy dopíše na druhou stranu papíru (tj. na každém listu budou dohromady z obou stran všechna čísla od 1 do  $n$ ). Nyní může Lucia otočit nějaké listy na druhou stranu. Pokud se Lucii povede, aby po tomto otočení byla vidět všechna čísla od 1 do  $n$ , zvítězí. Najděte nejmenší  $k$ , pro které Lucia vždy dovede zvítězit. (Nizozemsko 2014)

**Úloha 6.** Uvažujme tabulku se dvěma řádky a  $n$  sloupci. Do každé buňky tabulky napíšeme kladné reálné číslo tak, aby součet čísel v každém sloupci byl roven 1. Ukažte, že umíme vybrat jedno číslo z každého sloupce tak, aby součet vybraných čísel v každém řádku byl nejvýše  $\frac{n+1}{4}$ . (Rusko 2005)

**Úloha 7.** Je možné vybrat 1983 různých přirozených čísel menších nebo rovných 100 000, z nichž žádné tři netvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti? (IMO 1983)

**Úloha 8.** Množinu tří nezáporných čísel  $\{x, y, z\}$ , kde platí  $x < y < z$ , nazveme *divnou*, pokud  $\{z - y, y - x\} = \{a, b\}$  pro daná  $0 < a < b$ . Ukažte, že množina všech nezáporných celých čísel se dá zapsat jako sjednocení navzájem disjunktních divných množin. (IMO shortlist 2001, zobecněně)

**Úloha 9.** Buď  $n$  přirozené číslo. Najděte nejmenší celé číslo  $k$  s následující vlastností: Pro libovolná reálná čísla  $a_1, \dots, a_d$  taková, že  $a_1 + a_2 + \dots + a_d = n$  a  $0 \leq a_i \leq 1$  pro všechna  $i$  od 1 do  $d$  je možné tato čísla rozdělit do  $k$  skupin (z nichž některé mohou být prázdné) tak, aby součet čísel v každé skupině nepřevyšoval 1. (IMO shortlist 2013)

**Úloha 10.** Lenka našla 100 krabic, v každé je nějaký počet jablek, banánů a ananasů. Ukažte, že si Lenka může vybrat 51 z těchto krabic tak, aby měla aspoň polovinu kusů každého ovoce. (PraSe)

**Úloha 11.** Kunžacká banka razí mince s hodnotou  $\frac{1}{n}$  pro každé kladné celé číslo  $n$ . Mějme konečnou kolekci takových mincí (ne nutně různých hodnot), která má celkovou hodnotu nejvýše  $99 + \frac{1}{2}$ . Dokažte, že tuto kolekci je možné rozdělit na 100 nebo méně částí tak, aby každá část měla celkovou hodnotu nejvýše 1. (IMO 2014)

**Úloha 12.** Je dáno celé číslo  $N \geq 2$ . V řadě stojí  $N(N+1)$  navzájem různě vysokých fotbalistů. Trenér Vrba chce vyřadit některých  $N(N-1)$  z nich tak, aby nová řada sestávající ze zbylých  $2N$  fotbalistů splňovala následujících  $N$  podmínek:

- (1) Nikdo nestojí mezi dvěma nejvyššími fotbalisty.
- (2) Nikdo nestojí mezi třetím a čtvrtým nejvyšším fotbalistou.
- ⋮

( $N$ ) Nikdo nestojí mezi dvěma nejnižšími fotbalisty.

Dokažte, že je to vždy možné.

(IMO 2017)

**Úloha 13.** Množina přímek v rovině v obecné pozici (tj. žádné tři neprocházejí stejným bodem, žádné dvě nejsou rovnoběžné) rozdělí rovinu na území, z nichž některá mají konečný obsah. Dokažte, že pro dostatečně velká  $n$  lze pro libovolnou množinu přímek v rovině v obecné pozici obarvit alespoň  $\sqrt{n}$  přímek růžově tak, aby žádné konečné území nemělo zcela růžový okraj. (IMO 2014)

## Invarianty a monovarianty

Najdeme něco, co se pro dané operace zachovává nebo mění jenom jedním směrem.

**Příklad.** V rovině je dáno  $n$  modrých a  $n$  červených bodů tak, že žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že lze nakreslit  $n$  úseček tak, aby každý z  $2n$  bodů byl spojený s právě jedním bodem jiné barvy a žádné dvě úsečky se nekřížily.

**Úloha 14.** Na zájezdu má každý turista nejvýše tři nepřátele (nepřátelství jsou vzájemná). Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem.

**Úloha 15.** Necht'  $a_1, \dots, a_n$  ( $n > 3$ ) jsou reálná čísla taková, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \quad \text{a zároveň} \quad (a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2 \geq n^2.$$

Dokažte, že  $\max\{a_1, \dots, a_n\} \geq 2$ .

(USAMO 1999)

**Úloha 16.** V každém čtverečku tabulky  $m$  krát  $n$  je napsáno přirozené číslo. Povolným tahem je přičtení celého čísla  $k$  ke dvěma sousedním čtverečkům tak, aby se v žádném z nich neobjevilo záporné číslo. Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby bylo možné po konečně mnoha operacích docílit tabulky plné nul.

(IMO shortlist 1989)

**Úloha 17.** Ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku je napsáno šest nezáporných celých čísel, jejichž součet je  $2003^{2003}$ . Vladimír má povolenou následující operaci: vybrat si jeden vrchol a nahradit číslo v něm napsané za absolutní hodnotou rozdílu čísel napsaných v sousedních vrcholech. Dokažte, že Vladimír dovede provést takovou sekvenci tahů, po které bude ve všech šesti vrcholech napsáno číslo 0.

(USAMO 2003)

**Úloha 18.** Mějme  $n$  krabic  $B_1, B_2, \dots, B_n$  poskládaných do řady. Je v nich dohromady  $n$  míčků.

- (1) Je-li alespoň jeden míček v  $B_1$ , můžeme jej přesunout do  $B_2$ .
- (2) Je-li alespoň jeden míček v  $B_n$ , můžeme jej přesunout do  $B_{n-1}$ .
- (3) Jsou-li alespoň 2 míčky v  $B_k$ , kde  $2 \leq k \leq n-1$ , můžeme jeden z nich přesunout do  $B_{k-1}$  a druhý do  $B_{k+1}$ .

Dokažte, že pro libovolné počáteční rozložení míčků lze docílit toho, aby v každé krabici byl právě jeden míček. (China Girls 2011)

**Úloha 19.** Kubo má tři účty v bance, na každém z nich je celočíselné (kladné) množství peněz. Může dělat převody z účtu na účet pouze tehdy, zdvojnásobí-li tento převod množství peněz na cílovém účtu. Dokažte, že Kubo vždy umí převést všechny své peníze do dvou účtů (tj. ve třetím bude 0). Dovede je vždy všechny převést do jednoho? (IMO shortlist 1994)

**Úloha 20.** Červená Karkulka a Vlk hrají hru. Vlk nejprve na pásek papíru namaluje sto puntíků, z nichž každý je buď modrý, nebo červený. Na začátku každého tahu se odstříhne puntík nejvíce vlevo. Je-li červený, namaluje Vlk na pravý konec řady další modrý nebo červený puntík dle vlastního výběru. V opačném případě udělá totéž Karkulka. Cílem Karkulky je zajistit, aby po nějakém tahu byly všechny puntíky červené. Může se jí to podařit, ať hraje Vlk jakkoliv? (PraSe)

**Úloha 21.** Na tabuli je  $n \geq 2$  přirozených čísel. V každém kroku vybereme dvě z nich a obě nahradíme jejich součtem. Určete všechna čísla  $n$ , pro která je takto vždy možno dospět (v konečném počtu kroků) k  $n$  shodným číslům. (MEMO 2008)

**Úloha 22.** Mějme  $n$  imonů, z nichž každá dvojice může či nemusí být spojená. Můžeme provádět dvě operace:

- (i) Zničit imon, který je spojen s lichým počtem imonů.
- (ii) Zdvojnásobit počet imonů vytvořením kopie ke každému existujícímu imonu. Dva okopírované imony budou spojeny právě tehdy, byly-li spojené jejich vzory. Dále se každý imon spojí se svou kopií. Žádná další spojení během této operace nevzniknou ani nezaniknou.

Dokažte, že lze docílit stavu, kdy nebudou žádné dva imony spojené. (IMO shortlist 2013)

## Algoritmy redukce

Máme složitou úlohu, kterou za pomoci nějakého algoritmu převedeme na jednodušší, aniž bychom přitom porušili její strukturu nebo pointu.

**Příklad.** Mějme uspořádanou množinu šesti celých čísel  $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ . Za tah považujeme operaci, kterou každé z těchto šesti čísel buď zvýšíme nebo snížíme o 1. Ukažte, že existuje konečná posloupnost tahů taková, která převede množinu  $S$  do takového tvaru, aby platilo  $ae f = bdf = cde$ .

**Úloha 23.** Každé správné přátelství je na večírku nutné stvrdit pozváním na skleničku. Co však dělat, když mají účastníci hluboko do kapsy? Pomozte jim a dokažte, že se mohou zvat tak, aby každá dvojice přátel zašla na skleničku právě jednou a přitom aby pro každého člověka platilo, že počet lidí, které pozval, se bude lišit nejvýše o jedna od počtu lidí, kteří pozvali jeho. (PraSe)

**Úloha 24.** Mějme body  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uspořádané na kružnici a bod  $O$  uprostřed. Na každém z bodů  $A_1, A_2, \dots, A_n, O$  je umístěn konečný počet karet,  $n \geq 3$ . Máme povoleny následující operace:

- (1) Pokud jsou na nějakém bodě  $A_i$  alespoň 3 karty, můžeme odebrat 3 karty a dát po jedné z nich do bodů  $A_{i-1}, A_{i+1}, O$ .
- (2) Pokud je alespoň  $n$  karet v bodě  $O$ , můžeme je odtud odebrat a rozdat po jedné do bodů  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Dokažte, že pokud je celkový počet karet alespoň  $n^2 + 3n + 1$  tak můžeme docílit situace, ve které bude v každém vrcholu alespoň  $n + 1$  karet po konečně mnoha krocích. (China 2010)

**Úloha 25.** Mějme konečnou souvislou množinu  $S$  jednotkových čtverců vybraných z rovinné jednotkové mřížky. Tato množina je dokonale pokryta pravouhlými rovnoramennými trojúhelníky s přeponou délky 2 – tyto trojúhelníky se nepřekrývají a nepřesahují mimo  $S$ . Navíc, každá přepona trojúhelníku je rovnoběžná buď s vodorovným nebo svislým směrem. Dokažte, že počet těchto trojúhelníků musí být dělitelný čtyřmi. (USAMTS 2015)

**Úloha 26.** Na matematické soutěži jsou někteří účastníci kamarádi. Kamarádství je vzájemné. Skupinu, ve které se každý dva spolu kamarádí, nazveme *parta*. Jako *velikost* party označme počet jejích členů. Za předpokladu, že největší velikost party je sudá dokažte, že lze účastníky rozdělit do dvou místností tak, aby největší velikost party v jedné místnosti byla stejná jako největší velikost party ve druhé. (IMO 2007)

## Hry, konstrukce a náhodné úlohy

V této části najdete několik her a konstrukčních úloh s poměrně pěkným algoritmickým řešením, které se ale moc nehodí do žádné z předchozích kategorií.

**Úloha 27.** Na stole leží 2020 mincí. Provedeme 2020 tahů, kde v  $k$ -tém tahu otočíme nějakých  $k$  mincí. dokažte, že lze dosáhnout toho, aby všechny mince byly nahoru stejnou stranou. (Čína 1989)

**Úloha 28.** V řadě je  $N$  žárovek očíslovaných postupně 1 až  $N$ . Krokem rozumíme přepnutí tří žárovek, jejichž čísla  $a, b, c$  splňují  $a + c = 2b$ . Určete všechna  $N$ , pro něž lze konečnou posloupností kroků všechny žárovky zhasnout nezávisle na jejich počátečním stavu (iKS 1, C5)

**Úloha 29.** Nechť  $n \geq 1$  je přirozené číslo a nechť  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  jsou kladná celá čísla. Ve skupině  $t_n + 1$  lidí jsou hrány šachové partie. Dva lidé mohou sehrát partii nejvýše jednou. Dokažte, že je možné, aby platily zároveň tyto dvě podmínky:

- Počet her sehraných každou osobou je roven některému z čísel  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .
- Pro každé  $i, 1 \leq i \leq n$ , existuje některá z osob, která sehráje právě  $t_i$  her.

(EGMO 2017)

**Úloha 30.** Máme kruh na jehož obvodu je umístěno  $2n$  mincí. Můžeme provádět následující operaci: vybereme nějakou minci, na které je orel, a otočíme obě sousední mince. Najděte všechny počáteční pozice, pro které je možné se konečnou posloupností tahů dostat do stavu, kdy je pouze na jedné minci orel. (Japonsko 1998)

**Úloha 31.** Zdeněk si myslí číslo od 1 do  $n$ . Jonáše samozřejmě zajímá, jaké číslo si Zdeněk myslí, a tak ho chtěl uhádnout. Jonáš se může zeptat na libovolnou množinu čísel a Zdeněk mu vždy řekne, jestli daná množina obsahuje jeho číslo. Háček je ale v tom, že Zdeněk může lhát, naštěstí vždy maximálně  $k$ -krát po sobě. Jonášovi bude stačit, když najde množinu čísel velikosti nejvýše  $m$  a bude jistě vědět, že se tam Zdeněkovo číslo vyskytuje. Dokažte, že se mu to pro  $m \geq 2^k$  podaří. (IMO 2012)

**Úloha 32.** Mějme krabice  $B_1, B_2, \dots, B_6$  poskládané za sebou. Každá z nich zpočátku obsahuje jednu minci. Máme povoleno následující:

- (1) Vybrat neprázdnou krabici jinou než  $B_6$ , odebrat z ní 1 minci a přidat 2 mince do krabice za ní následující.
- (2) Vybrat neprázdnou krabici jinou než  $B_5$  a  $B_6$ , odebrat z ní 1 minci a prohodit obsahy mincí následujících dvou krabic.

Určete, jestli existuje konečná posloupnost operací povolených typů taková, aby bylo prvních 5 krabic prázdných a  $B_6$  obsahovala přesně  $2010^{2010^{2010}}$  mincí.

(IMO 2010)

**Úloha 33.** Nechť  $k \geq 2$  a  $n \geq k - 1$  jsou daná přirozená čísla. Rado a Matěj hrají hru. Na začátku Rado na tabuli napíše za sebou  $n$  celých čísel. Matěj může v každém kroku zvolit libovolně dlouhý souvislý blok za sebou jdoucích čísel (klidně všechna, nebo naopak jenom jedno). Rado pak buď všechna čísla v tomto bloku zvýší o jedničku, nebo všechna o jedničku sníží. Matěj vyhraje, pokud se na tabuli objeví alespoň  $n - k + 2$  čísel dělitelných  $k$ . Ukažte, že Matěj umí vyhrát v konečném počtu kroků. (iKS 5, C5)

**Úloha 34.** Na sociální síti s 2019 uživateli jsou některé dvojice uživatelů přátelé, přičemž přátelství jsou vždy vzájemná. Vztahy v této síti se mohou měnit opakovaným provedením následující operace:

Tři uživatelé  $A, B, C$  splňující, že  $A$  se přátelí s  $B$  i  $C$  a zároveň že  $B$  a  $C$  nejsou přáteli, změní svá přátelství tak, že  $B$  se spřátelí s  $C$  a zároveň  $A$  ukončí svá přátelství s  $B$  i s  $C$ . Všechna ostatní přátelství zůstanou beze změny.

Na začátku je v síti 1010 uživatelů, z nichž každý má 1009 přátel, a 1009 uživatelů, z nichž každý má 1010 přátel. Ukažte, že existuje vhodná posloupnost uvedených operací, po jejímž provedení nemá žádný uživatel sítě více než jednoho přítele.

(IMO 2019)

## Literatura a zdroje

Tento příspěvek je kópia příspěvku Pepy Minaříka z roku 2020.

- [1] Marian Poljak; *Algoritmy*, sborník iKS, 2017
- [2] Cody Johnson; *Algorithms*, <https://people.bath.ac.uk/masgcs/algorithms.pdf>
- [3] Pranav A. Sriram; *Olympiad Combinatorics*; <https://euclid.ucc.ie/mathenr/IMOTraining/OlympiadCombinatoricsChapter1PSriram.pdf>

# Hinty

**Hint 1.** Zbavujeme se záporných součtů.

**Hint 2.** To snad skoro ani není úloha.

**Hint 3.** Silná indukce.

**Hint 4.** Prostě většinu nějak naházíme na první tři nákladáky.

**Hint 5.** Nešlo by tam něco binárně vyhledat?

**Hint 6.** Může se hodit to nějak seřadit a pak se to jenom rozdělí na správném místě.

**Hint 7.** Postupně vyber všechno co jde, najdi pattern.

**Hint 8.** Stačí projít čísla od 1, když nějaké číslo ještě nikde není, vytvoříme mu novou množinu.

**Hint 9.** Pomůže indukce,  $\frac{n}{2n-1}$  je fajn číslo.

**Hint 10.** Vybereme krabici s největším počtem jablek a krabici s největším počtem banánů. Zbylé krabice setřídíme podle počtu jablek a postupně rozdělujeme do skupin, přičemž vyrovnáváme banány.

**Hint 11.** Zbav se mincí sudé velikostí, mince rozděl na malé a velké. Stejně velké dej do skupin, malé k nim pak přidej.

**Hint 12.** Rozděl fotbalisty do  $N+1$  skupin podle výšky a potom projdi řadu zleva doprava.

**Hint 13.** Vždy když se obarví nějaká přímka, označ nejvýše dva vrcholy.

**Hint 14.** Snižujeme počet nepřátelství v rámci autobusů.

**Hint 15.** Zachovej součet  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , udělej hodně dvojek.

**Hint 16.** Nutná podmínka je jasná, pak to můžeš dělat třeba po řádcích.

**Hint 17.** Modulo 2 se hodí, zadaná operace nemůže zvýšit maximum.

**Hint 18.** Používej druhou a třetí operaci, dokud to jde. Musí tento proces někdy skončit?

**Hint 19.** Chceme snižovat minimum, binárka je docela fajn.

**Hint 20.** Každých 100 tahů se na puntíky podívej jako na číslo ve dvojkové soustavě.

**Hint 21.** Bude-li  $n$  sudé, můžeme čísla sloučit do dvojic. Může se hodit podělit všechna čísla největší mocninou 2, kterou jsou všechna dělitelná a dívat se na součet vzniklých čísel.

**Hint 22.** Nejsou barevné grafy mnohem hezčí? Zase to ale nesmíme přehánět, proto po obarvení počet barev budeme snižovat.

**Hint 23.** Zbav se cyklů, na stromech už je to jednoduché.

**Hint 24.** Nejdřív zkus provádět první operaci, dokud to jde – při jakém stavu to už nepůjde? Když teď hodněkrát provedeme druhou operaci, bude to skoro stačit, ale může se to pokazit. Nepůjde to ale nějak opravit?

**Hint 25.** Stačí to vyřešit jenom pro cykly, ty vyřešíme třeba tak, že je budeme zmenšovat, aniž bychom změnili počet trojúhelníků modulo 4.

**Hint 26.** Nejdřív dej do jedné místnosti největší partu a do druhé zbytek. Potom se to hodí nějak přibližně vyrovnat, aby velikosti největších part v obou místnostech byly už skoro stejné. Konec je třeba dorozebírat.

**Hint 27.** Operace provádíme pozpátku, potom postupně zleva zvyšujeme počet správně otočených mincí.

**Hint 28.** Jde to pro  $N \geq 8$ .

**Hint 29.** Rozmysli si to pro  $n = 2$ , pak to zobecni.

**Hint 30.** Najít nutnou podmínku je snadné, potom stačí ze všech orlů vytvořit souvislý blok a ten následně zmenšovat.

**Hint 31.** Postupně vylučuj možnosti, často se ptej na  $2^k$  a použij binárku.

**Hint 32.** Jde to,  $(x, 0, 0) \mapsto (x - y, 2^y, 0)$ .

**Hint 33.** Díváme se na zbytky, označme nejpravější nenulové číslo  $x$ . Zajímavé je  $(k - x)$ -té nenulové číslo zleva.

**Hint 34.** Buď se můžeme dívat na komponenty, které nejsou úplný graf a mají aspoň jeden vrchol lichého stupně, nebo redukuje na strom.

# Obsah

Čudná geometria (Adam Džavoronok) . . . . .	3
Kombinatorická geometrie (David Hromádka) . . . . .	10
$p$ -valuácie (Jakub Krivošík) . . . . .	21
Kruhová inverze (Michal Pecho) . . . . .	28
Odhady (Zdeněk Pezlar) . . . . .	37
Aritmetické multiplikatívne funkcie (Jakub Šošovička) . . . . .	47
Funkcionálne rovnice a iné (Dominik Rigasz) . . . . .	53
Algoritmy (Martin {Šindelář, Štěpánek}) . . . . .	63

Soustředění podpořili



Second Foundation

