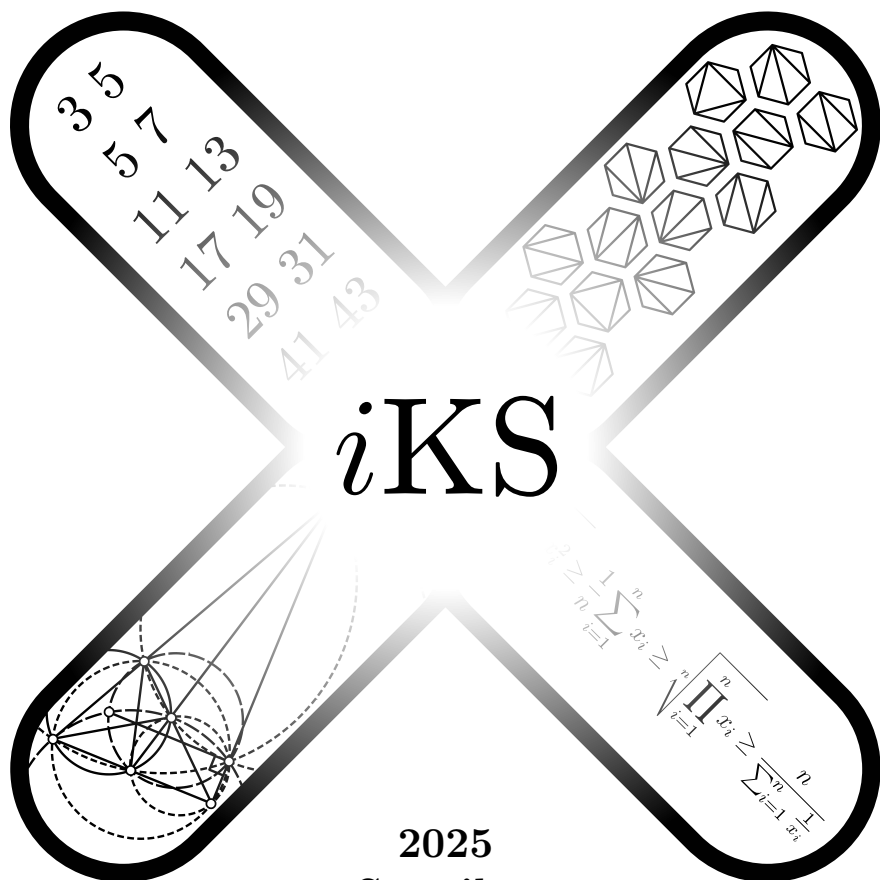




2025
Strmilov

Adam Džavoronok
Michal Pecho
Zdeněk Pezlar
Michal Staník
Matej Vasky

Zabíjení nerovností

Zdeněk Pezlar

Abstrakt. V olympiádě se občas objevují nerovnosti, tak si ukážeme pár způsobů, jak je bušit.

Standardní výbava (s tím jste se mohli setkat)

Věta (vážené AG). Budte $a_1, \dots, a_n$ kladná čísla a $w_1, \dots, w_n$ nezáporná se součtem w . Pak platí

$$w_1 a_1 + \dots + w_n a_n \geq w a_1^{w_1/w} \dots a_n^{w_n/w}.$$

Pro $w_1 = \dots = w_n = \frac{1}{n}$ máme staré dobré AG-čko. Rovnost nastává pro $a_1 = \dots = a_n$.

Věta (Cauchy a Hölder). Budte $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ a $c_1, \dots, c_n$ posloupnosti kladných čísel. Pak platí

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2$$

a rovnost nastane pro a_i/b_i konstantní. Podobně platí

$$(a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n)^3$$

a rovnost nastane pokud a_i/b_i a b_i/c_i jsou konstantní.

Věta. Jsou daná nezáporná čísla a, b, c . Označujme symetrické sumy pomocí multiindexů $[x, y, z] = \sum_{sym} a^x b^y c^z$. Pak platí

- (i) (Muirhead) Jsou-li $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3$ dvě posloupnosti se stejným součtem splňující $\alpha_1 \geq \beta_1$ a $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2$, tak platí $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \geq [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$. Rovnost nastane pro $a = b = c$.
- (ii) (Schur) Pro kladná α, β platí $[\alpha + 2\beta, 0, 0] + [\alpha, \beta, \beta] \geq 2[\alpha + \beta, \beta, 0]$. Rovnost nastane pro $a = b = c$ a $a = b, c = 0$.

Obecné tipy pro řešení těžších nerovností.

- (i) Projížděj metody od nejhloupějších výše – např. AGčko, Cauchy, Jensen, uvv. . .
- (ii) Zkus si tipnout rovnost, bude to při $a = b = c$? Bude to při $a = b, c = 0$? Podle toho dělej odhady.

Následuje pár úloh, které buď jdou hezky trikově, nebo nehezky ubušit. Obě dvě techniky mají svoje místo, je pak třeba poznat, kdy využít co.

Úmluva. Ve všech úlohách navíc hledejte všechny případy rovnosti.

Úloha 1. Buď P polynom s kladnými koeficienty a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Ukažte, že

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + P\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + \dots + P\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2 \geq nP(1)^2.$$

(Moldavské výběrko 2022)

Úloha 2. Pro kladná reálná čísla x, y, z se součinem 1 ukažte

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{(y+1)(z+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

(Shortlist 1990)

Úloha 3. Jsou daná kladná reálná čísla $a_2, \dots, a_n$ se součinem 1. Ukažte, že

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

(IMO 2012)

Úloha 4. Ukažte, že pro kladná reálná a, b, c platí

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Úloha 5. Ukaž, že pro nezáporná reálná a, b, c platí

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + (ab + ac + bc)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Úloha 6 (Na výdrž). Pro kladná reálná čísla ukaž (roznásobením)

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Úloha 7. Pro kladná čísla x, y, z splňující $xyz = 1$ ukažte

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

(IMO 2005)

Úloha 8. Jsou daná kladná reálná a, b, c, d splňující $(a+c)(b+d) = ac+bd$. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

(Shortlist 2020)

Separované nerovnosti a tangent line trick

Představ si svou oblíbenou rozumnou spojitou funkci. Pokud chceme odhadnout funkční hodnotu v okolí nějakého bodu, dobrým nápadem může být ukázat, že funkční hodnoty leží *nad tečnou*. Formálně, můžeme zkusit ukázat

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Taková nerovnost se může hodit v případě, že máme separovanou nerovnost, tj. například ve tvaru $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq g$. Podobně můžeme odhadovat, že funkce leží nad nějakou sečnou. V jakém bodě pak brát tečnu/sečnu? Ideálně v bodě, ve kterém nastane rovnost.

Úloha 9. Pro nezáporná reálná čísla a, b, c se součtem 1 ukažte

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a^2 + a + 1} \geq \frac{1}{3}.$$

Úloha 10. Pro kladná reálná čísla a, b, c ukažte

$$\sum_{cyc} \frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} \leq 8.$$

(USAMO 2003)

Úloha 11. Jsou daná reálná čísla x, y, z splňující $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$. Dokažte, že

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27.$$

(MEMO 2009)

Úloha 12. Pro $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{2})$ platí $\tan x + \tan y + \tan z = 2$. Najděte minimum výrazu $\sum_{cyc} \frac{1}{\cos^2 x}$.

Úloha 13. Reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ všechna vyšší než mínus jedna mají součet n . Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \geq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i^2}.$$

(MEMO 2016)

Smoothing, unsmoothing a posouvání

Hlavní ideou této sekce je rozumně měnit neznámé a sledovat, co se děje s podmínkami v zadání a v dokazovaných nerovnostech. Nejčastější případy, jak proměnné přibližovat/oddalovat:

- (i) Pokud je součet $a_1 + \dots + a_n$ fixní, tak nahradit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorem $(a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon, \dots, a_n)$. Speciální případ: nahradit dvě čísla jejich aritmetickým průměrem.
- (ii) Pokud je součin fixní, to samé dělat s geometrickým průměrem.

O funkci $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde I je interval, řekneme, že je konvexní, platí-li pro všechna $x, y \in I$, $\lambda \in [0, 1]$ následující: $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Pokud je f dvakrát diferencovatelná, tak je konvexní, právě pokud její druhá derivace je kladná na I .

Věta. Nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní funkce a $a < b \in I$. Potom pro $\epsilon > 0$ splňující $a + \epsilon \leq b - \epsilon$, platí že $f(a) + f(b) \geq f(a + \epsilon) + f(b - \epsilon)$.

Tohle posouvání nemusí někdy vést k cíli, neboť nemusí skončit. Tudiž je nutné se ujistit, zda tak nastane v konečném čase.

Úloha 14. Přirozená čísla a, b, c, d mají součet 2025. Jaká je nejvyšší možná hodnota jejich součinu?

Úloha 15. Najděte maximum výrazu $(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ přes všechna $a, b, c \in [0, 1]$.

Úloha 16. Buď $n \geq 2$ a $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$. Ukažte, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n - (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

(Bulharsko 1995)

Úloha 17. Ukažte, že pro libovolná reálná $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ platí

$$\sum_{sym} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leq \sum_{sym} |a_i - b_j|.$$

(Polsko 1999)

Úloha 18. Jsou daná reálná čísla $u_1, u_2, \dots, u_{2025}$ splňující

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2025} = 0 \quad \text{a} \quad u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2025}^2 = 1.$$

Nechť $a = \min(u_1, u_2, \dots, u_{2025})$ a $b = \max(u_1, u_2, \dots, u_{2025})$. Ukažte, že

$$ab \leq -\frac{1}{2025}.$$

(Shortlist 2019)

Úloha 19. Dokaž znovu úlohu 4.

Úloha 20. Ukažte, že platí

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

pro všechna reálná $x_1, \dots, x_n$.

(IMO 2021)

SOS

Úloha 21 (Motivační). Pro kladná reálná čísla a, b ukažte, že

$$a^5 + 2b^5 + 8b^3a^2 \geq 7b^4a + 2a^3b(a+b).$$

SOS je zkratka pro „sum of squares“. Myšlenka je jednoduchá, pokud nerovnost ekvivalentně přepíšeme do tvaru [součet čtverců] ≥ 0 , tak jsme vyhráli. Typický výraz pro SOS je $S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$. Snadné je si rozmyslet, že nerovnost platí pro S_a, S_b a S_c nezáporná.

Cvičení (SOS, fikanější). Rozmyslete si, že pokud b je mezi a, b, c prostřední a

- (i) $S_b \geq 0$
- (ii) $S_b + S_c \geq 0$,
- (iii) $S_a + S_b \geq 0$,

tak i příslušná nerovnost platí.

Úloha 22. Ukažte, že pro kladná a, b, c platí $[4, 0, 0] + 3[2, 2, 0] \geq 4[3, 1, 0]$.

Úloha 23. Dokaž Schurovu nerovnost pomocí SOS.

Úloha 24. Pro nezáporná a, b, c dokažte

$$2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)).$$

Úloha 25. Ukažte pro $k = 4$, že pro všechna kladná a, b, c platí

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + k \frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 9 + k.$$

Bonus: Najdi nevyšší k , pro které nerovnost platí.

Úloha 26. Ukažte, že pro kladná a, b, c platí

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b + c} + \frac{abc}{2(a^3 + b^3 + c^3)} \geq \frac{5}{3}.$$

Úloha 27. Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníka, dokažte

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2abc(a + b + c).$$

Úloha 28. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b + c)^3}} \geq 1.$$

Literatura a zdroje

Tato přednáška mi byla zjevena ve snu.

- [1] Thomas J. Mildorf: *Olympiad Inequalities*.
- [2] Michal Rolínek a Pavel Šalom: *Nerovnosti*.
- [3] Radek Olšák: *Chinese dumbass notation a SOS*.
- [4] Kiran Kedlaya: $A < B$.

Hinty

Hint 2. Roznásob a pomocí součinu homogenizuj.

Hint 3. Jak zapojit součin?

Hint 4. Hölder. A nebo pak Jensen.

Hint 5. Přepiš do multiindexů a použij Shurheada.

Hint 6. No roznásob to :D

Hint 7. Buď chytrá aplikace Cauchyho, nebo to natvrdo roznásob. A nestyď se za to.

Hint 8. Tipni si rovnost a použij vhodně AG-čko, aby rovnost byla zachována.

Hint 9. Kdy nastane rovnost? Odhadni, že funkce leží nad sečnou. Taky jde Jensenem.

Hint 10. Dehomogenizuj a separuj proměnné.

Hint 11. Tipni si rovnost, separuj a v jedné proměnné odhaduj pomocí podmínky ze zadání.

Hint 12. Nejprve vyjádři $\cos^2 x$ pomocí $\tan x$ a pak použij tangent line trick na $\frac{1}{x^2+1}$.

Hint 14. Pokud by nějaká dvě čísla měla velký rozdíl, přibliž je. Co se stane se součinem?

Hint 15. Posouváním převedte na nerovnost v jedné proměnné.

Hint 16. Nerovnost je lineární v každé proměnné. Co to znamená?

Hint 17. Dejme tomu, že nějaká z a_i , b_j jsou maximální mezi všema $2n$ čísly. Co se stane s výrazem, když některá z nich snížíš?

Hint 18. Dokazuj obměnu tvrzení. Zafixuj si a , b a posouvej u_i ke krajům.

Hint 20. Přidej ke všem stranám nějaké t , pak získáš konvexní funkci v t .

Hint 21. Všimni si, že nastane rovnost pro $a = b$, co to znamená?

Hint 25. Uprav obě dvě nerovnosti do SOS tvaru a pak sluč. Odhadni k dosazením $b = c$.

Hint 28. Aplikuj šikovně Hölderovu nerovnost, abys získal nerovnost, kterou uprav do SOS tvaru.

Lineárna algebra v kombinatorike

Michal Staník

Abstrakt. V prvej časti príspevok zavádza niektoré základné pojmy lineárnej algebry a vyslovuje o nich fundamentálne tvrdenia. Ukazuje sa totiž, že je možné ich s prekvapivým úspechom aplikovať na riešenia rôznych úloh stredoškolskej matematiky, najmä kombinatoriky. Druhá časť príspevku obsahuje úlohy vhodné k aplikácii týchto techník.

Začneme definíciami pojmov *teleso* a *vektorový priestor*.

Definícia. Množinu T spolu s binárnymi operáciami „+“ a „ $\cdot$ “ a „význačnými prvkami“ 0 a 1 nazveme (*komutatívnym*) *telesom*, ak pre všetky $x, y, z \in T$ platia nasledujúce vzťahy:

- (1) $x + y = y + x \in T$,
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (3) $x + 0 = x$,
- (4) $x \cdot y = y \cdot x \in T$,
- (5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- (6) $x \cdot 1 = x$,
- (7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
- (8) existuje prvok $-x \in T$ taký, že $x + (-x) = 0$,
- (9) ak $x \neq 0$, tak existuje prvok $x^{-1} \in T$ taký, že $x \cdot x^{-1} = 1$.

Niekedy sa ešte pridáva „axióma netriviality“: $0 \neq 1$.

Bežnými telesami, s ktorými sa budeme stretávať, sú napríklad reálne, racionálne či komplexné čísla (so štandardnými operáciami sčítania a násobenia), ale taktiež aj $\mathbb{Z}_p$ pre prvočíslo p , kde sa sčíta a násobí modulo p .

Cvičenie. Rozmyslite si, že $\mathbb{Z}_n$ s modulárnymi operáciami je teleso práve vtedy, keď n je prvočíslo.

Definícia. Nech T je teleso, V množina, $\mathbf{o}$ jej prvok, „+“: $V \times V \rightarrow V$ a „ $\cdot$ “: $T \times V \rightarrow V$ binárne operácie také, že pre všetky $a, b \in T$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí:

- (1) $\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}$,
- (2) existuje $-\mathbf{v} \in V$ taký, že $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{o}$,
- (3) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,
- (4) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$,
- (5) $a \cdot (b \cdot \mathbf{u}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{u}$,
- (6) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$,
- (7) $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$,

$$(8) (a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}.$$

Potom štvoricu $(V, +, \cdot, \mathbf{o})$ nazveme *vektorovým priestorom nad T* . Prvky V sa nazývajú *vektory*, prvky T sa nazývajú *skaláry*.

Ak si vezmeme usporiadané n -tice prvkov z telesa T a ako operácie použijeme tie z T vykonávané po zložkách, dostaneme tzv. *aritmetický vektorový priestor*. Napríklad z reálnych čísel tak dostaneme známe euklidovské priestory $\mathbb{R}^n$. Inými príkladmi sú napríklad priestor všetkých postupností prvkov T alebo všeobecnejší priestor všetkých funkcií z nejakej množiny M do T .

Cvičenie. Overte, že polynómy stupňa najviac $n \in \mathbb{N}$ tvoria vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

V nasledujúcom bude vždy $\mathbf{V} = (V, +, \cdot, \mathbf{o})$ vektorový priestor nad telesom T .

Definícia. Ak je $\mathbf{V}$ vektorový priestor, $W \subseteq V$ a pre ľubovoľné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ a $a, b \in T$ platí $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in W$, hovoríme, že $\mathbf{W}$ (W s operáciami z $\mathbf{V}$) je *podpriestorom $\mathbf{V}$* .

Napríklad roviny či priamky v 3D sú podpriestormi $\mathbb{R}^3$.

Dostávame sa k pre nás kľúčovým pojmom *lineárna (ne)závislosť* a *generovanie*:

Definícia. Nech $X \subseteq V$. Množinu

$$\langle X \rangle = \{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \mid a_i \in T, \mathbf{v}_i \in X\}$$

nazývame *lineárnym obalom X* . Ak platí $\langle X \rangle = V$, hovoríme, že X *generuje $\mathbf{V}$* .

Lineárny obal X je množina všetkých *lineárnych kombinácií* vektorov z X . Ľahko sa nahliadne, že je to najmenší podpriestor $\mathbf{V}$, ktorý obsahuje X .

Definícia. Nech $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}\}$ je konečná. Ak platí, že kedykoľvek $a_1, a_2, \dots, a_k \in T$ spĺňajú $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$, tak už $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$, hovoríme, že M je *lineárne nezávislá*. V opačnom prípade je *lineárne závislá*.

Cvičenie. Máme skupinu aritmetických vektorov so zložkami 0 a 1. Dokážte, že ak je táto skupina lineárne nezávislá nad $\mathbb{Z}_p$, je lineárne nezávislá nad $\mathbb{Q}$.

Cvičenie. Dokážte, že skupina aritmetických vektorov s racionálnymi zložkami je lineárne nezávislá nad $\mathbb{Q}$ práve vtedy, keď je lineárne nezávislá nad $\mathbb{R}$.

Definícia. Množinu $B \subseteq V$, ktorá je lineárne nezávislá a súčasne generuje $\mathbf{V}$, nazývame *bázou $\mathbf{V}$* .

Cvičenie. Dokážte, že množina $B \subseteq V$ je bázou $\mathbf{V}$ práve vtedy, keď každý vektor z V sa dá jednoznačne zapísať v tvare $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, kde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in B$ a $a_1, a_2, \dots, a_k \in T$.

Tvrdenie. Každý vektorový priestor má nejakú bázu. Všetky bázy daného vektorového priestoru majú rovnakú veľkosť – toto číslo nazývame *dimenziou* priestoru a značíme $\dim \mathbf{V}$.

Cvičenie. Spomeňte si na priestor polynómov stupňa najviac n . Nájdite aspoň dve jeho bázy. Aká je jeho dimenzia?

Cvičenie (ťažké). Máme tabuľku $m \times n$ reálnych čísel (drsnáci majú maticu). Keď sa pozrieme na riadky ako na aritmetické vektory $\mathbf{v}_i$ nad $\mathbb{R}$, môžeme označiť $D_r = \dim(\bigcup \mathbf{v}_i)$ dimenziu nimi generovaného priestoru. Podobne definujeme D_c pre stĺpce. Dokážte, že $D_r = D_c$. Táto hodnota sa nazýva *hodnosť* matice.

Tvrdenie (zásadné). Množina viac než n vektorov v priestore dimenzie n je lineárne závislá. Pre každú množinu menej než n vektorov existuje vektor mimo jej lineárny obal

Definícia. *Skalárny súčin* vektorov $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ a $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ definujeme ako

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n.$$

Skalárny súčin sa správa lineárne (keď niektorý z vektorov prenásobíme konštantou k , znásobí sa aj hodnota skalárneho súčinu k -krát).

Rovnosť tvaru $a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k = \mathbf{w}$ s neznámymi $a_1, a_2, \dots, a_k$ sa dá chápať ako sústava rovníc (jedna rovnica pre každú zložku) a zapísať pomocou matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{v}_{11} & \mathbf{v}_{21} & \cdots & \mathbf{v}_{k1} & \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{22} & \cdots & \mathbf{v}_{k2} & \mathbf{w}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_{1n} & \mathbf{v}_{2n} & \cdots & \mathbf{v}_{kn} & \mathbf{w}_n \end{array} \right),$$

kde $\mathbf{v}_{ij}$ označuje j -tu zložku vektora $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{w}_j$ označuje j -tu zložku vektora $\mathbf{w}$.

- Ak hodnosť *rozšírenej matice* (celá matica vrátane posledného stĺpca s vektorom $\mathbf{w}$) je väčšia ako hodnosť *matice koeficientov* (bez posledného stĺpca), sústava nemá riešenie. Tento prípad nemôže nastať, ak $\mathbf{w}$ je nulový vektor.
- Ak sa hodnosti rozšírenej matice a matice koeficientov rovnajú, riešenie existuje. Ak je ich (spoločná) hodnosť rovná počtu premenných, existuje práve jedno riešenie.
- V opačnom prípade existuje nekonečne veľa riešení. Vieme ich popísať pomocou d voľných premenných (parametrov), kde d je rozdiel počtu premenných a hodnosti. Vektory $(a_1, \dots, a_k)$, ktoré sú riešením, tvoria vektorový podpriestor dimenzie d .

Definícia. Hovoríme, že štvorcová matica je v *hornom trojuholníkovom tvare*, ak pod hlavnou diagonálou má samé nuly.

Cvičenie. Dokážte, že ak je matica sústavy rovníc v hornom trojuholníkovom tvare a na hlavnej diagonále nemá žiadne nuly, sústava má práve jedno riešenie (pre ľubovoľnú voľbu $\mathbf{w}$).

Úlohy

Úloha 1. V obdĺžnikovej divadelnej sále s r radmi po s sedadlách $r > s$ na niektorých miestach sedia ľudia. Dokážte, že môžeme vybrať niekoľko $k \geq 1$ radov tak, aby v každom stĺpci sedadiel bol počet ľudí vo vybraných radoch párny.

Úloha 2. V tabuľke 5×5 sú zapísané celé čísla. Je dovolené vybrať ľubovoľný štvorec 3×3 alebo 2×2 a zväčšiť v ňom všetky čísla o 1. Je vždy možné postupným vykonávaním týchto operácií získať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla deliteľné 2011?

Úloha 3. Nech $a_1, a_2, \dots, a_5, b_1, b_2, \dots, b_5$ sú nie nutne rôzne čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$ také, že $a_i \geq b_i$ pre $1 \leq i \leq 5$. Dokážte, že existujú celé čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, nie všetky nulové, také, že

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}^{\alpha_2} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}^{\alpha_3} \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix}^{\alpha_4} \begin{pmatrix} a_5 \\ b_5 \end{pmatrix}^{\alpha_5} = 1.$$

Úloha 4. V rade je N žiaroviek očíslovaných postupne 1 až N . Krokom rozumieme prepnutie troch žiaroviek, ktorých čísla a, b, c spĺňajú $a + c = 2b$. Určite všetky N , pre ktoré sa dá konečnou postupnosťou takýchto krokov všetky žiarovky zhasnúť nezávisle na ich počiatočnom stave. (C5, 1. ročník iKS)

Úloha 5. Nech $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ sú po dvoch rôzne podmnožiny množiny $M = \{1, \dots, n\}$. Dokážte, že pre nejaké $1 \leq k \leq n$ sú množiny $A_i \setminus \{k\}$ tiež po dvoch rôzne.

Úloha 6. Majme prirodzené čísla k, n spĺňajúce $k < n$ a množinu $S = \{1, \dots, n\}$. Nech $A_1, \dots, A_k$ sú neprázdne podmnožiny S . Dokážte, že je možné ofarbiť niektoré prvky S dvoma farbami – červenou a modrou tak, aby boli splnené nasledujúce podmienky:

- (i) každý prvok S je buď neofarbený, alebo je červený, alebo je modrý,
 - (ii) aspoň jeden prvok S je ofarbený,
 - (iii) každá z množiny A_i je buď celá neofarbená, alebo sa v nej vyskytuje aspoň jeden prvok z každej z dvoch farieb.
- (VJIMC 2009)

Úloha 7 (Lindströмова veta, „baby“ verzia). Ak sú $A_1, \dots, A_m$ podmnožiny množiny $\{1, \dots, n\}$ a $m > n$, potom existujú dve disjunktné množiny $I_1, I_2 \subseteq \{1, \dots, m\}$, z ktorých je aspoň jedna neprázdna a pre ktoré platí

$$\bigcup_{i \in I_1} A_i = \bigcup_{i \in I_2} A_i.$$

Úloha 8 (Lindströмова veta). Ak navyše v predchádzajúcej úlohe $m > n + 1$, potom môžeme navyše požadovať, aby platilo

$$\bigcap_{i \in I_1} A_i = \bigcap_{i \in I_2} A_i.$$

Úloha 9. V Nepárno-párnom meste žije n ľudí a existuje m klubov takých, že každý z nich má nepárny počet členov a každé dva rôzne majú páry počet spoločných členov. Dokážte, že $m \leq n$.

Úloha 10. V meste žije n ľudí a existuje m filmových klubov $F_1, \dots, F_m$ a m divadelných klubov $D_1, \dots, D_m$ takých, že $2 \mid |F_i \cap D_j| \Leftrightarrow i \neq j$. Dokážte, že $m \leq n$.

Úloha 11. Nech p je nepárne prvočíslo a k prirodzené číslo. V meste žije n ľudí a existuje m klubov $K_1, \dots, K_m$ takých, že $p^k \mid |K_i \cap K_j| \Leftrightarrow i \neq j$. Dokážte, že $m \leq n$.

Úloha 12. Dokážte, že $m \leq n$ aj v Párno-nepárnom meste. Ukážte, že pre nepárne n môže nastať rovnosť.

Úloha 13. Nech $n \in \mathbb{N}$ je párne a $A_1, \dots, A_n \subseteq \{1, \dots, n\}$ majú všetky páry počet prvkov. Dokážte, že existujú dve rôzne čísla $1 \leq i, j \leq n$ také, že $A_i \cup A_j$ má tiež páry počet prvkov.

Úloha 14 (Fisherova nerovnosť). V rybárskej dedine žije n rybárov, ktorí tvoria m odborových združení. Každé dve združenia zdieľajú presne k členov. Dokážte, že $m \leq n$.

Úloha 15. Súvislý graf má 1000 vrcholov a 2022 hrán. Koľkými spôsobmi môžeme nejaké hrany vymazať tak, aby každý vrchol výsledného grafu mal páry stupeň?

Úloha 16. Graf G má 42 vrcholov (žiadny izolovaný) a 60 hrán. Radek má 21 kružníc (podgrafov G) a tvrdí, že z nich vie „zlepiť“ ľubovoľný podgraf G , ktorého vrcholy majú všetky stupne párne. „Zlepením“ dvoch grafov vznikne graf, ktorého množina hrán je symetrickým rozdielom množín hrán pôvodných grafov. Dokážte, že G má najviac tri komponenty.

Úloha 17. Rozhodnite, či existujú reálne polynómy $a(x)$, $b(x)$, $c(y)$, $d(y)$ také, že

$$1 + xy + x^2y^2 \equiv a(x)c(y) + b(x)d(y).$$

(Putnam 2003 B1)

Úloha 18. Nech $P(x)$ je nenulový reálny polynóm. Dokážte, že existuje nenulový polynóm $Q(x)$ taký, že polynóm $R(x) = P(x)Q(x)$ má nenulové koeficienty iba u členov s prvočíselnými exponentmi.

Úloha 19. Sedem trpaslíkov po 16 dní pracovalo nasledujúcim spôsobom:

- každý trpaslík celý deň kutal striebro alebo zbieral maliny,
- pre každé dva dni platí, že počas nich aspoň traja trpaslíci robili oboje,
- prvý deň všetci kutali striebro.

Dokážte, že niektorý deň všetci trpaslíci zbierali maliny. (EGMO 2013/6)

Úloha 20. Je daný graf a v každom vrchole rozsvietená žiarovka. V jednom ťahu môžeme vybrať jeden vrchol a prepnúť žiarovku v ňom a vo všetkých vrcholoch s ním spojených hranou. Dokážte, že môžeme konečným počtom ťahov všetky žiarovky zhasnúť.

Úloha 21. Máme množinu 13 závaží s racionálnymi hmotnosťami. Ak odoberieme ktorékoľvek z nich, zvyšných 12 závaží sa dá vždy rozdeliť na dve skupiny po 6 s rovnakou celkovou váhou. Dokážte, že všetky závažia majú rovnakú hmotnosť. Čo ak by boli hmotnosti reálne čísla?

Úloha 22. V meste s n obyvateľmi je m klubov, každý klub má aspoň dvoch členov. Každému obyvateľovi chceme prideliť červený alebo modrý klobúk tak, aby v každom klube bol aspoň jeden obyvateľ s červeným a aspoň jeden s modrým klobúkom.

- a) Dokážte, že ak každý klub má aspoň k členov a klubov je najviac $2k - 1$, tak vhodné priradenie farieb existuje.
- b) Nazvime situáciu *kritickou*, ak neexistuje žiadne vhodné priradenie farieb, ale bude existovať po zrušení ktoréhokoľvek klubu. Dokážte, že pre nepárne $n \geq 2$ existuje kritická situácia.
- c) Dokážte, že v každej kriticknej situácii platí $m \geq n$ za predpokladu, že každý obyvateľ je členom aspoň jedného klubu

Úloha 23. Dokážte, že ak všetky vzdialenosti medzi m bodmi v $\mathbb{R}^n$ sú rovnaké, tak platí $m \leq n + 1$.

Úloha 24. Na matematickej konferencii sa každá dvojica matematikov buď navzájom pozná, alebo nepozná. Každý účastník bude obedovať v jednej z dvoch veľkých jedální. Každý matematik trvá na tom, aby jedol v jedálni, v ktorej má párny počet známych. Dokážte, že počet spôsobov, ako rozdeliť matematikov do jedální je mocninou dvoch (teda tvaru 2^k pre nezáporné celé číslo k). (USAMO 2008)

Literatúra a zdroje

Príspevok je z veľkej časti kópiou príspevku Davida Hrušky z roku 2014. Ďakujem mu za umožnenie jeho použitia.

- [1] David Hruška; *Lineární algebra v kombinatorice*, zborník iKS, 2014.
- [2] László Babai, Péter Frankl: *Linear algebra methods in combinatorics*, Dept. Comput. Sc., University of Chicago, 1992, Preliminary version 2.
- [3] Jiří Matoušek: *Šestnáct miniatur*.
- [4] Jiří Matoušek: *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, American Mathematical Society.
- [5] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum 2010,
- [6] <http://people.cs.uchicago.edu/~laci/CLASS/HANDOUTS-COMB/BaFrNew.pdf>.

Hinty

Hint 1. Vhodne reprezentujte sálu a využite nerovnosť.

Hint 2. Koľko máme (vhodne zvolených) vektorov? Aha, takže to vyjde tesne, alebo...

Hint 3. Zvoľte si ľišiacky vektorový priestor.

Hint 4. Pre koľko najmenej žiaroviek už nagenerujete všetko? Potom použite indukciu.

Hint 5. Napíšte si do tabuľky charakteristické vektory. Nie je tam nejak veľa stĺpcov? Vyjadrite jeden pomocou ostatných a zahodte ho.

Hint 6. Urobte si tabuľku charakteristických vektorov. V lineárnej kombinácii máte kladné a záporné koeficienty.

Hint 7. Závislosť charakteristických vektorov ste už isto objavili, teraz už len nejakú súvislosť so zjednotením. Spomeňte si na úlohu 6.

Hint 8. K štandardným charakteristickým vektorom pridajte ešte „inverzné“. Aká je dimenzia vzniknutého priestoru? Preveďte prieniky na zjednotenia a zopakujte postup z „baby“ verzie.

Hint 9. Dokážte (sporom), že charakteristické vektory sú nezávislé. Za týmto účelom urobte skalárny súčin príslušnej rovnosti s vhodným charakteristickým vektorom.

Hint 10. Analógia predchádzajúcej úlohy.

Hint 11. Skúste pracovať nad vhodnejším telesom.

Hint 12. Šikovne využite tvrdenie úlohy 9.

Hint 13. Sporom. Môžu byť charakteristické vektory nezávislé? Potom použite štandardný trik so skalárnym súčinom a nájdite nejaký pekný spor.

Hint 14. Chceme nezávislosť, skúsme nejaký iný násobiaci trik so skalárnym súčinom a lineárnou kombináciou.

Hint 15. Kružnice grafu spolu s ich „xorovaním“ generujú vektorový priestor. Aká je jeho dimenzia a aký je počet vektorov?

Hint 16. Radek musí mať aspoň toľko kružníc, aká je dimenzia príslušného priestoru kružníc.

Hint 17. Nie, sporom. Vhodným dosadením za y dostaňte na ľavej strane lineárne nezávislé polynómy v x . Čo na to pravá strana?

Hint 18. Predstavte si $P(x)$ a $R(x)$ ako vektory. Ako vyzerajú polynómy $x^k P(x)$ a ako je to s ich (ne)závislosťou? Zväčšujte k , dokým nebudete mať viac voľných premenných (neznámych, ktoré sa stanú koeficientmi R) než podmienok (rovností, ktoré musia platiť, aby $P(x)Q(x)$ spĺňal zadanie).

Hint 19. Každý deň reprezentujte sedemzložkovým vektorom nad $\mathbb{Z}_2$. Čo hovoria podmienky zo zadania? Zvyšok už musíte vymyslieť.

Hint 20. Urobte si tabuľku $n \times n$ (stĺpce sú vypínače, riadky žiarovky) podľa toho, čo čo prepína. Chcete nakombinovať stĺpce na samé jednotky. To vyzerá ako nejaká sústava, nie? Čo sa nesmie stať, aby sústava mala riešenie? Na zvyšok použite vlastnosti tabuľky, ktorá je odvodená z grafu.

Hint 21. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že závažia majú celočíselné hmotnosti, ďalej aj to, že jedno z nich je má hmotnosť 0 a že jedno z nich má nepárnu hmotnosť. Súčet každej 12-tice je párný, ale to platí aj pre súčet (skoro) každej 11-tice. Zostavte sústavu rovníc a ukážte, že všetky majú nulovú hmotnosť.

Hint 22.

a) Priradte farby podľa hodu mincou. Ukážte, že očakávaná hodnota počtu klubov, v ktorých majú všetci členovia klobúk rovnakej farby, je ≤ 1 .

b) Vytvorte dvojčlenné kluby.

c) Predpokladajte, že $m > n$ a využite lineárnu závislosť charakteristických vektorov.

Hint 23. Použite kosínovú vetu a s využitím skalárneho súčinu dokážte, že vektory z jedného bodu k ostatným sú lineárne nezávislé.

Extremálna kombinatorika

Adam Džavoronok

Abstrakt. V tejto pomerne populárnej prednáške si budete môcť odvodiť zopár známych výsledkov z oblasti extrémnej teórie grafov a kombinatoriky. Niektoré myšlienky dôkazov sa pritom vyskytujú aj v olympiádnych úlohách.

Dohovor. V rámci prednášky budeme pracovať s grafom $G = (V, E)$, kde V je množina jeho vrcholov a E množina hrán. Následne stupňom vrcholu rozumieme počet, ktoré z neho vychádzajú.

Definícia. Chromatické číslo grafu je minimálny počet farieb, ktoré musíme použiť na zafarbenie vrcholov grafu, ak každá hrana spája vrcholy rôznych farieb. Označuje sa symbolom $\chi(G)$. Graf G nazveme bipartitný, ak $\chi(G) = 2$.

Definícia. Graf H nazveme podgrafom grafu G ak $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Graf H nazveme indukovaným podgrafom grafu G ak $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.

Definícia. Úplný graf na n vrcholoch budeme značiť K_n , úplný bipartitný graf s partitami o veľkosti s, t ako $K_{s,t}$. Cestu na n vrcholoch zas P_n a cyklus C_n .

V extrémnej teórii grafov nás primárne zaujíma, koľko najviac hrán môže graf mať pri danom počte vrcholov, aby neobsahoval nejaký indukovaný podgraf. Často sa pritom použijú rôzne algebraické odhady ako Jensenova nerovnosť alebo Cauchy-Schwartz.

Turán a Mantel

Úloha 1. Dokážte, že graf na n vrcholoch neobsahujúci K_3 má najviac $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ hrán. Ukážte, že odhad je tesný.

(Mantel)

Úloha 2. Dokážte, že graf s n vrcholmi a m hranami má aspoň $\frac{4m}{3n}(m - \frac{n^2}{4})$ kópií K_3 .

Úloha 3. Dokážte, že graf na n vrcholoch bez trojuholníka s minimálnym stupňom $\frac{2n}{5}$ je bipartitný. Viete konštatovať zlepšenie?

Úloha 4. Dokážte, že graf na n vrcholoch neobsahujúci K_{r+1} má najviac $(1 - \frac{1}{r}) \frac{n^2}{2}$ hrán a ukážte, že odhad je tesný.

(Turán)

Úloha 5. Ukážte, že vaša extrémna konštrukcia je jediná.

Úloha 6. Máme n bateriek, ale z toho iba p funguje. Dialkový ovládač funguje ak sú v ňom obe baterky funkčné. Na koľko najmenej pokusov ho vieme spojazdniť?

Úloha 7. Nech S je množina n bodov v rovine taká, že žiadne dva nie sú než vzdialenosť 1 od seba. Dokážte, že v S nanajvýš $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ párov je od seba vzdialených viac ako $\sqrt{1/2}$.

Úloha 8. Nech u, v sú nezávislo náhodne vybrané vektory z nejakej množiny vektorov $\mathbb{R}^d$. Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí:

$$\Pr(|u + v| \geq x) \geq \frac{1}{2} \Pr(|u| \geq x)^2$$

Vyhýbame sa všetkým grafom

Definícia. Ak je dané kladné celé číslo n a graf H , definujte extrémálne číslo H (na grafoch s n vrcholmi), označené $\text{ex}(n, H)$, ako maximálny možný počet hrán v grafe neobsahujúci H ako podgraf.

Veta (Erdős-Stone-Simonovits).

$$\text{ex}(H, n) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \binom{n}{2}$$

Dôkazov je pomerne dosť ale väčšina z nich je pomerne technických. Výsledok je to ale veľmi zaujímavý. Pre príklad stojí za zmienku, že Petersenov graf a trojuholník majú asymptoticky skoro rovnaké extrémálne číslo.

Úloha 9. Dokážte, že $\frac{\text{ex}(n, H)}{\binom{n}{2}}$ je klesajúca funkcia.

Erdős-Stone-Simonovits nám pre bipartitné grafy iba hovorí že ich extrémálne číslo je $o(n^2)$, čo si na jednoduchom prípade K_2 uvedomíme, že nie je najpresnejší odhad. V ďalšej časti sa budeme zaoberať práve bipartitnými grafmi. Napríklad pre párne cykly sa vie a je pomerne náročné dokázať, že $\text{ex}(n, C_{2k}) = O(n^{1+1/k})$.

Úloha 10. Ak je H_1 podgraf H_2 tak $\text{ex}(n, H_1) < \text{ex}(n, H_2)$

Úloha 11. Dokážte, že $\text{ex}(n, K_{s,t}) = O(n^{2-1/s})$

Úloha 12. Skonstruujte extrémnu konštrukciu pre $K_{2,2}$. Vedeli by ste ju zovšeobecniť?

Úloha 13. Ak je n bodov v rovine tak dokážte, že nanajvýš $2n^{3/2}$ je od seba vzdialených o jednotkovú vzdialenosť.

Úloha 14. Nech T je strom na k vrchoch potom dokážte, že $\text{ex}(n, T) \leq (k-2)n$.

Úloha 15. Ukážte, že $\text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k-2)}{2}n$.

Množinové systémy a hypergrafy

Neformálne hypergraf je zovšeobecnením grafu, v ktorom hrana môže spájať ľubovoľný počet vrcholov. Na rozdiel od bežného grafu hrana spája presne dva vrcholy. Pozrieme sa na zopár výsledkov o hypergrafoch.

Úloha 16. Nájdite maximálny počet podmnožín z množiny n prvkov, že pre každé 2 podmnožiny A, B platí, že $A \cap B \neq \emptyset$. Skúste nájsť, čo najviac „rôznych“ extrémálnych konštrukcií.

Úloha 17. Predpokladajme, že A je systém rôznych r prvkových podmnožín z n prvkov, kde $n > 2r$, a že každé dve podmnožiny majú aspoň jeden spoločný prvok. Ukážte, že $|A| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

(Erdős-Ko-Rado)

Úloha 18. Nájdite maximálny počet podmnožín z množiny n prvkov, že neexistujú 2 podmnožiny A, B také, že $A \subseteq B$.

(Sperner)

Úloha 19. Nech $F \subseteq 2^{[n]}$ je systém podmnožín množiny $[n]$. Ak platí

$$|F| > \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k},$$

potom existuje množina $A \subseteq [n]$ veľkosti $k+1$, ktorú F rozštiepi, t. j. pre každú podmnožinu $B \subseteq A$ existuje $G \in F$ také, že $G \cap A = B$.

(Sauer-Shelah)

Úloha 20. Nech n a k sú dané prirodzené čísla a nech A je množina taká, že

$$|A| \leq \frac{n(n+1)}{k+1}.$$

Pre $i = 1, 2, \dots, n+1$, nech A_i sú množiny veľkosti n také, že

$$|A_i \cap A_j| \leq k \ (i \neq j), \ A = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i.$$

Určte veľkosť A .

Zopár zábaviek z olympiád a folklóru

Úloha 21. Ježkom budeme nazývať graf, v ktorom je jeden vrchol spojený so všetkými ostatnými a neexistujú žiadne ďalšie hrany; počet vrcholov tohto grafu budeme nazývať veľkosť ježka. Graf G je daný na n vrcholoch (kde $n > 1$). Pre každú hranu e označíme symbolom $s(e)$ veľkosť maximálneho ježka v grafe G , ktorý túto hranu obsahuje. Dokážte nerovnosť (súčet sa vykonáva cez všetky hrany grafu G):

$$\sum_e \frac{1}{s(e)} \leq \frac{n}{2}.$$

Úloha 22. Nech n je kladné celé číslo a nech G je jednoduchý neorientovaný graf na n vrcholoch. Nech d_i je stupeň jeho i -tého vrcholu, $i = 1, \dots, n$. Označme $\Delta = \max d_i$. Dokážte, že ak $\sum_{i=1}^n d_i^2 > n\Delta(n - \Delta)$, tak G obsahuje trojuholník

(VJIMC)

Úloha 23. Pri pokuse o kolonizáciu Marsu zaplavilo ľudstvo slnečnú sústavu 50 satelitmi, ktoré medzi sebou vytvorili 225 komunikácií línií (každá línia existuje medzi jednou dvojicou satelitov a žiadne dva satelity medzi sebou nemajú viac ako jednu líniu). Hovoríme, že trojica satelitov je prepojená, ak aspoň jeden z nich má vytvorené komunikačné línie s oboma ostatnými satelitmi. Určte najmenší a najväčší možný počet prepojených trojíc satelitov.

(Celoštátok 2022)

Úloha 24. V šachovom turnaji s n hráčmi hrá každá dvojica hráčov raz a nie sú žiadne remízy. Ukážte, že musí existovať nejaký hráč A taký, že pre každého iného hráča B, buď A porazil B, alebo A porazil nejakého iného hráča C, ktorý zasa porazil B.

Úloha 25. Ak je daných n bodov v rovine, dokážte, že existuje množina $\sqrt{n}$ bodov, že žiadna 3 bodov v tejto množine netvorí rovnostranný trojuholník.

Úloha 26. Uvažujme turnaj s $2n + 1$ tímami, kde každý tím hrá s každým iným tímom presne jedenkrát. Hovoríme, že tri tímy X, Y a Z tvoria cyklickú trojicu, ak X porazí Y , Y porazí Z a Z porazí X . Neexistujú žiadne remízy. Určte minimálny a maximálny možný počet cyklických trojíc.

(Kanada 2006)

Úloha 27. Rovina má špeciálny bod O , ktorý sa nazýva počiatok. Nech P je množina 2021 bodov v rovine taká, že žiadne tri body v P neležia na priamke a žiadne dva body v rovine P neležia na priamke prechádzajúcej počiatkom. Trojuholník s vrcholmi v P je tučný, ak O leží striktne vnútri trojuholníka. Nájdite maximálny počet tučných trojuholníkov.

Úloha 28. Skonstruujte graf bez K_3 s ľubovoľne veľkým chromatickým číslom.

Úloha 29. A country has n signal towers, no three of which are collinear. The towers communicate via straight-line wireless links between each other. The enemy's spy agency wishes to block all pairs of towers from communicating with each other, by placing jammers on the ground between the towers. (Two towers are prevented from communicating if a jammer is located on the line segment between them.) Prove that at least $2n - 3$ jammers are required.

Úloha 30. Kráľ Artuš povolal na svoj dvor $2n$ rytierov. Každý rytier má najviac $n - 1$ nepriateľov medzi ostatnými prítomnými rytiermi. Dokážte, že rytieri môžu sedieť za okrúhlym stolom tak, aby vedľa seba nesesedeli žiadni dvaja nepriatelia.

(Dirac, Moskva 1968)

Úloha 31. Nech G je graf s n vrcholmi neobsahujúci K_4 . Dokážte, že existuje indukovaný podgraf H s aspoň $\sqrt{2n}$ vrcholmi neobsahujúci K_3 .

Úloha 32. V iKSlandii je n miest. Každá dvě města jsou spojena obousměrnou leteckou linkou, která je obsluhována právě jednou ze m leteckých společností. Miško by rád cestoval po iKSlandii, ale protože je chudý student, může si koupit měsíční lístek jen od jedné ze společností. Najděte největší přirozené k takové, že si Miško umí bez ohledu na to, které spoje jsou obsluhovány kterou společností, vybrat jednu z nich a počáteční město tak, aby mohl navštívit alespoň k měst. (iKSko)

Úloha 33. Ukážte, že ak $k \leq \frac{n}{2}$ a F je systém $k \times k$ podmatic matice $n \times n$ takých, že sa ľubovoľné dve pretínajú, potom

$$|F| \leq \binom{n-1}{k-1}^2$$

Úloha 34. Dva body v rovine sa *vidia* ak na úsečke medzi nimi nie je žiaden tretí bod. Umiestnite do roviny aspoň $(\ell - 1)^{\log_2(k-1)}$ bodov tak, že žiadnych ℓ neleží na priamke a žiadnych k sa vzájomne nevidia.

(Big line big clique conjecture)

Úloha 35. The Imomi archipelago consists of $n \geq 2$ islands. Between each pair of distinct islands is a unique ferry line that runs in both directions, and each ferry line is operated by one of k companies. It is known that if any one of the k companies closes all its ferry lines, then it becomes impossible for a traveller, no matter where the traveller starts at, to visit all the islands exactly once (in particular, not returning to the island the traveller started at). Determine the maximal possible value of k in terms of n .

Literatura a zdroje

- [1] Yufei Zhao, *Graph Theory and Additive Combinatorics*
- [2] Po-Shen Loh, *Extremal Combinatorics*, MOP 2013
- [3] Andrzej Grzesik, *Introduction to Extremal Graph Theory*, MBL 2020.
- [4] Martin Balko, *Visibility problems*.

Hinty

- Hint 1.** Aký je maximálny súčet stupňov susediacich vrcholov. Použite následne Cauchy-Schwartz
- Hint 2.** Modifikuj dôkaz Mantela.
- Hint 3.** Bipartitný graf neobsahuje nepárne cykly. Vezmi si ten najmenší.
- Hint 4.** Indukciou z Mantela. Vezmite si najväčší kompletný graf v grafe.
- Hint 5.** Vezmite si dva vrcholy, čo spolu nesusedia. Pokaždí sa niečo ak nahradím jeden tým, čo má viac počet hrán?
- Hint 6.** Pre vašu stratégiu vytvorte graf, kde hrana je medzi netestovanými batériami.
- Hint 7.** Skonstruujte si príslušný graf
- Hint 8.** Opäť skonstruujte si pomocný graf. Vektory sú vrcholy a dva sú spojené ak ich súčet má veľkosť menej ako x .
- Hint 9.** Nech G je extrémálny graf pre F a spočítajte dvojice (e, v) , kde e je hrana G a v je vrchol, ktorý nie je incidentný s e
- Hint 11.** Počítajte „čerešne“ dvoma spôsobmi
- Hint 12.** Uvážte rovnicu $ax + by = 0$ nad $\mathbb{Z}_p$ dvojice (a, b) a (x, y) sú vrcholy.
- Hint 13.** Pozrite sa na $K_{2,3}$
- Hint 14.** Nájdite podgraf s vysokým minimálnym stupňom. T skonstruujte rekurzívne.
- Hint 15.** Podobne ako vyššie
- Hint 16.** Môže byť iba jeden z istej dvojice.
- Hint 17.** Uvážte usporiadanie n prvkov do kruhu.
- Hint 18.** Koľko máme disjunktných „refazcov“ na inklúziu?
- Hint 19.** Indukciou. Rozdeľte množiny pre nejaký prvok x také, čo ho obsahujú a také čo nie.
- Hint 20.** Nakreslite si incidenčný graf a počítajte dvoma spôsobmi za použitia podmienky.
- Hint 21.** Odhadnite $s(e)$
- Hint 22.** Same trick as before
- Hint 23.** Podobné odhady ako sme už využili predtým.
- Hint 24.** Indukcia
- Hint 25.** Monotónne postupnosti hľadajte a využite Dirichleta.
- Hint 26.** Skúste spočítať necyklické trojice.
- Hint 27.** Využite predošlú úlohu
- Hint 28.** Induktívne je to najľahšie, ale viem vám o tom povedať aj viac.
- Hint 29.** Triangulácia

Hint 30. Uvážte najdlhšiu cestu a ukážte, že dokonca vytvára cyklus.

Hint 31. Pozri sa na vrchol s najväčším stupňom.

Hint 32. Uvážte najväčšiu komponentu a počítajte .

Hint 33. Erdő-Ko-Rado

Hint 34. Uvážte vysokorozmernú mriežku.

Hint 35. GLHF. Možno sa zide Dirac alebo Chvátalov uzáver. Už prísť s konštrukciou vie byť úspech.

Isogonály a kamarádi

Michal Pecho

Abstrakt. Isogonal conjugates a práce s nimi je oblíbené téma moderní eukleidovské geometrie. V příspěvku jsou popsána některá základní tvrzení, po kterých následuje několik úloh, které se isogonal conjugates buď zabývají, nebo je přímo využívají.

Definice. Necht ℓ je přímka procházející skrze vrchol V úhlu XVY . Řekneme, že přímka ℓ' je její *isogonála* (slova isogonála a izogonála jsou záměnná), pokud se jedná o obrazy přes osu úhlu XVY .

Definice. Necht bod P leží v rovině trojúhelníku ABC . Pokud se isogonály přímk AP , BP a CP protínají v jednom bodě Q , pak tento bod nazveme *isogonal conjugate*, neformálně též *kamarád*, bodu P vzhledem k $\triangle ABC$.

Tvrzení. Pokud P neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$, pak vzhledem k $\triangle ABC$ má P isogonal conjugate.

Tvrzení (Six feet theorem). Necht P a Q jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$. Necht P_a je projekce bodu P na BC . Analogicky definujme P_b , P_c , Q_a , Q_b a Q_c . Pak P_a , P_b , P_c , Q_a , Q_b a Q_c leží na jedné kružnici, jejíž střed splývá se středem PQ .

Úmluva. Budeme používat *opsiště*, *vepsiště* a *připsiště* jako zkrácený pojem pro střed kružnice opsané, kružnice vepsané a kružnice připsané. Navíc budeme místo „ortocentrum“ používat pojem *kolmiště*.

Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, pak v trojúhelníku ABC bude I , O a H označovat vepsiště, opsiště a kolmiště.

Příklad. V trojúhelníku ABC je I svůj vlastní kamarád. Dále pokud E je připsiště, pak i ono je svým vlastním kamarádem.

Příklad. Body O a H jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$.

Tvrzení. V trojúhelníku ABC označíme body dotyku kružnice vepsané s BC , CA , AB jako D , E , F . Body dotyku kružnic připsaných se stranami BC , CA a AB si označíme jako X , Y , Z . Pak trojice přímk AD , BE a CF se protíná v jednom bodě a stejně tak i trojice přímk AX , BY , CZ .

Definice. Ve výše použitém značení se průsečík AD , BE a CF nazývá *Gergonnův bod*. Pro průsečík AX , BY , CZ se používá označení *Nagelův bod*.

Příklad. Nechť H^- je střed záporné stejnoolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom H^- je isogonal conjugate Gergonnova bodu.

Příklad. Nechť H^+ je střed kladné stejnoolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom H^+ je isogonal conjugate Nagelova bodu.

Příklad (Brocardovy body). Uvnitř $\triangle ABC$ leží dvojice bodů P a Q tak, že

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \phi \quad \text{a} \quad \angle QBA = \angle QCB = \angle QAC = \varphi.$$

Potom tyto dva body jsou isogonal conjugates.

Příklad. Kamarád devítiště (tj. středu kružnice devíti bodů) je průsečík přímk AO_A , BO_B , CO_C , kde O_A , O_B , O_C jsou opsité trojúhelníků BOC , COA , AOB .

OH, oni jsou kamarádi!

Úloha 1. V tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ si označme průsečík úhlopříček jako P . Dále si označme opsité čtyřúhelníku $ABCD$ jako O a opsité trojúhelníků APB , BPC , CPD a DPA jako O_1 , O_2 , O_3 a O_4 . Ukažte, že přímky PO , O_1O_3 a O_2O_4 se protínají v jednom bodě. (Čína 1990)

Úloha 2. Ukažte, že rovnost $IH = IO$ platí právě tehdy, když jeden z úhlů trojúhelníku je roven 60° .

Úloha 3. V $\triangle ABC$ výška a těžnice z B dělí úhel ABC na třetiny. Určete úhly trojúhelníka ABC .

Úloha 4. V $\triangle ABC$ osa úsečky BH protíná strany AB a BC v bodech D a E . Ukažte, že $\angle BOD = \angle BOE$. (Crux)

Úloha 5. V $\triangle ABC$ leží body D a E na stranách AB a BC tak, že čtyřúhelník $ADEC$ je tětiový. Kružnice opsaná $\triangle DBE$ protne stranu AC ve dvou bodech X a Y . Nechť M je střed XY . Ukažte, že $BM \perp AC$. (Baltic Way 2010)

Úloha 6. Kružnice k_1 a k_2 se středy I_1 a I_2 se protínají ve dvou bodech A a B . Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D . Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD . Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3 , který obsahuje bod B . Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L . Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

Úloha 7. V ostroúhlém nerovnoramenném trojúhelníku ABC na výšce BB_0 leží bod X . Přímka AX protne stranu BC v A_1 a přímka CX protne stranu AB v C_1 . Ukažte, že AC_1A_1C je tětíkový čtyřúhelník právě když X je ortocentrum $\triangle ABC$.
(CK MO 2007)

Symediány

Definice. Symediána je isogonála k těžnici. Kamarád těžiště se nazývá Leominův bod.

Tvrzení. B -symediána prochází průsečíkem tečen k opsané v bodech A a C .

Úloha 8. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AC . Dále nechť P je jeho vnitřní bod takový, že $\angle PAC = \angle PCB$. Označme M střed AC . Ukažte, že $\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$.
(Polsko 2000)

Úloha 9. Je dán trojúhelník ABC , v němž $AC = 2AB$. Ke kružnici k jemu opsané sestrojme tečny v bodech A a C a jejich průsečík označme P . Dokažte, že průsečík přímky BP a osy strany BC leží na kružnici k .
(ČR TST 2013)

Úloha 10. Trojúhelník ABC je vepsaný do kružnice ω . Tečny k ω v bodech A a C se protínají v T . Bod S leží na polopřímce AC tak, že $BS \perp BT$. Body A_1 a C_1 leží na polopřímce ST (s C_1 mezi A_1 a S) tak, že $A_1T = AT = C_1T$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a A_1BC_1 jsou podobné.
(USA TST 2007)

Definice. Uvažujme trojúhelník ABC s opsištěm O a kolmištěm H . Jako H_a , H_b a H_c označíme paty kolmic z H na příslušné těžnice a jako O_a , O_b a O_c označíme paty kolmic z O na příslušné symediány.

Tvrzení. H_b leží na následujících křivkách:

- Kružnice nad průměrem BH
- Těžnice
- Kružnice nad průměrem HG , kde G je těžiště
- Kružnice opsaná AHC
- Kružnice dotýkající se AC v A a procházející B . (resp. dotýkající se v C)
- Kružnice opsané $AC'M_B$ a $CA'M_B$, de A' , C' jsou paty kolmic z A a C a M_B je střed AC .

O_b leží na následujících křivkách:

- Kružnice nad průměrem BO
- Symediána
- Kružnice nad průměrem OK , kde K je Lemoinův bod (průsečík symedián)
- Kružnice opsaná AOC
- Kružnice dotýkající se BA v B a procházející C . (resp. dotýkající se v BC v B procházející A)

Tvrzení. O_b je střed spirální stejnolehlosti převádějící BA na BC .

Tvrzení. O_b a H_b jsou kamarádi.

Úloha 11. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . O kružnici k řekneme, že je *šikovní*, pokud prochází bodem B , protíná strany BA a BC (průsečíky označíme postupně X_k, Y_k) a navíc průsečík úseček AY_k a CX_k leží na k . Dokažte, že všechny šikovní kružnice prochází pevným bodem různým od B . (iKS 3 – G5)

Další hrátky s isogonal conjugates

Úloha 12. Elipsa s ohnisky P a Q se dotýká stran $\triangle ABC$. Ukažte, že P a Q jsou isogonal conjugates.

Úloha 13. Uvnitř $\triangle ABC$ leží bod P takový, že pokud si jeho průměty na strany BC, CA, AB si označíme jako D, E, F , pak $DE \perp EF$. Necht' Q je ortocentrum DBF . Ukažte, že P a Q jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$.

Úloha 14. Necht' P a Q jsou kamarádi v trojúhelníku ABC . Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům APC a AQC jsou navzájem obrazy v inverzi přes kružnici opsanou ABC .

Úloha 15. V rovině trojúhelníku ABC leží kružnice k se středem X . Tato kružnice protíná stranu AC v bodech B_1 a B_2 . Kružnici nad průměrem B_1B_2 nazveme k_b . Analogicky vytvoříme kružnice k_a a k_c . Potenční střed k_a, k_b a k_c označme jako Y . Ukažte, že X a Y jsou isogonal conjugates. (zobecněné IMO 2008)

Úloha 16. Necht' M a N jsou kamarádi v trojúhelníku ABC . Ukažte, že

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 17 (General Feuerbach Theorem). Body P a Q jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ a přitom platí, že P, Q a O leží na přímce. Ukažte, že kružnice opsaná projekcím bodů P a Q na strany trojúhelníku se dotýká kružnice devíti bodů.

Úloha 18. Necht' P a Q jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ s kružnicí opsanou Ω . Průsečík BP s Ω různý od B označme D . Přímka DO protne AC a Ω v M a N . Pokud $BA < BC$, ukažte, že $\angle AMP = \angle QNB$. (Zobecněné Rusko 2005)

Úloha 19. Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká strany ABC v bodě E . Koule jemu připsaná vzhledem k vrcholu D se dotýká strany ABC v bodě F . Ukažte, že E a F jsou kamarádi v trojúhelníku ABC . (MKS 33-7-7)

Lemma o isogonále

Lemma. Necht BP , BS a BQ , BR jsou dvě dvojice isogonál v trojúhelníku ABC . Průsečík PR a QS označme jako X , průsečík PQ a SR jako Y . Pak BX a BY jsou isogonály.

Úloha 20. Necht BB' je osa úhlu v trojúhelníku ABC . Buď X libovolný bod na BB' . Průsečík AX a BC , resp. CX a BA , označme A' , resp. C' . Necht AX protíná $B'C'$ v P a CX protíná $B'A'$ v Q . Ukažte, že $\angle PBC = \angle QBA$.

(Turnaj měst 2006)

Úloha 21. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ s $AB \parallel CD$ se protínají v bodě P . Bod Q leží v pásu určeném AB a CD tak, že P a Q leží na opačných stranách od přímky CB , a platí $\angle CQD = \angle AQB$. Ukažte, že $\angle DQP = \angle QAB$.

(IMO Shortlist 2007)

Úloha 22. Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. V trojúhelníku ABC označme jako I a J jeho vepsiště a A -připsiště. V trojúhelníku ACD označme jako K a L jeho vepsiště a A -připsiště. Ukažte, že průsečík přímek IL a JK leží na ose úhlu BCD .

(India Postals 2015)

Úloha 23. Necht $ABCDE$ je konvexní pětiúhelník, ve kterém jsou trojúhelníky ABC , ACD a ADE podobné. Necht P je průsečík úhlopříček BD a CE . Ukažte, že AP , je tečna v trojúhelníku ACD .

(IMO Shortlist 2006)

Úloha 24. Úhlopříčky tětiového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě P . Projekce bodu P na AB a CD označme jako E a F . Necht Q je průsečík CE a BF . Ukažte, že $QP \perp EF$.

(USA TST 2012)

Úloha 25. Necht X je libovolný bod v trojúhelníku na straně AC trojúhelníku ABC . Kružnice opsané trojúhelníkům AXB a BXC protínají strany AB a BC podruhé v bodech P a Q . Necht B' je obraz bodu B přes stranu AC . Průsečík přímek AB' a PX označme Y , průsečík přímek CB' a QX označme jako Z . Ukažte, že se přímky AZ , BX a CY protínají v jednom bodě.

(RMM 2016)

Úloha 26. Necht ABC je různostranný ostroúhlý trojúhelník a M , N , P jsou středy stran BC , CA a AB . Osy stran AB a BC protínají přímku BN v bodech X a Y . Pokud se AX a CY protínají v bodě Z , ukažte, že $BMZP$ je tetivový čtyřúhelník.

(USAMO 2008)

Úloha 27. Necht BH je výška v trojúhelníku ABC a H' je obraz H přes střed AC . Pokud se tečny ke kružnici opsané ABC v bodech A a C protínají v bodě X a kolmice na XH' v bodě H' protínají BA a BC postupně v Y a Z , ukažte, že $\angle ZXC = \angle YXA$.

(Írán TST 2015)

Schovaní kamarádi

Úloha 28 (Pascalova věta). Nechť $ABCDEF$ je tětíkový šestiúhelník. Nechť X , Y , Z jsou postupně průsečíky přímk AC a DB , CF a BE , FD a EA . Ukažte, že X , Y , Z leží na jedné přímce.

Úloha 29. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P . Nechť A' , B' , C' jsou paty kolmic z P na příslušné strany. Kružnice opsaná $\triangle A'B'C'$ protíná stranu BC podruhé v bodě A'' . Na úsečce $A''B'$ nalezneme bod X takový, že $\angle XAC = \angle PAB$. Ukažte, že $\angle AXB = 90^\circ$. (iKS 1 – G3)

Úloha 30. Je dán úhel o velikosti α s hlavním vrcholem A sevřený mezi polopřímkami u_1 a u_2 vycházejícími z A . Uvnitř úhlu u_1u_2 je dán bod B neležící na jeho ose a je dána velikost úhlu β , kde $\alpha < \beta < 180^\circ$. Uvažme všechny možné dvojice bodů X , Y takové, že $X \in u_1$, $Y \in u_2$, A leží mimo úhel XY a $\angle XBY = \beta$. Pak každý z bodů A , B má tu vlastnost, že vidí úsečku XY stále pod stejným úhlem. Ukažte, že existuje třetí bod s touto vlastností. (iKS 4 – G6)

Úloha 31. Je dán trojúhelník ABC a jeho kružnice opsaná. Bod P je středem oblouku BAC . Kružnice nad průměrem CP protíná osu úhlu BAC v bodech K a L , kde $AK < AL$. Bod M je obrazem bodu L v osové souměrnosti podle přímky BC . Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BKM prochází středem BC . (ČPS 2013)

Úloha 32. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že přímka BD nepůlí ani úhel $\angle ABC$, ani $\angle CDA$. Bod P ležící uvnitř $ABCD$ splňuje $\angle PBC = \angle DBA$ a $\angle PDC = \angle BDA$. Ukažte, že $ABCD$ je tětíkový právě tehdy, když $AP = CP$. (IMO 2004)

Úloha 33. Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme (ne nutně podobné) obdélníky $ABDE$, $BCFG$ a $CAHI$, které s daným trojúhelníkem sdílí pouze stranu. Ukažte, že osy úseček HE , DG a FI se protínají v jednom bodě. (MKS 38-2-8)

Úloha 34. Nechť ABC je různostranný ostroúhlý trojúhelník a M , N , P jsou středy stran BC , CA a AB . Osy stran AB a BC protínají přímku BN v bodech X a Y . Pokud se AX a CY protínají v bodě Z , ukažte, že $BMZP$ je tetíkový čtyřúhelník. (USAMO 2008)

Zdroje

Tento příspěvek je kopií příspěvku Radovana Švarca z roku 2019, kterému za jeho použití děkuji,

[1] Michal Rolínek; *Antirovnoběžnost*, PraSe Oldřichov 2012, <https://mks.mff.cuni.cz/library/AntirovnobeznostMR/AntirovnobeznostMR.pdf>

- [2] Michal Rolínek; *Trojúhelník tam, zpátky a ještě dál*, iKS Hostětín 2012,
<http://iksko.org/files/sbornik1.pdf>
- [3] András Hráskó; *The Isogonal Conjugate*
- [4] Yufei Zhao; *Lemmas in Euclidean Geometry*
- [5] Tran Quang Hung, Pham Huy Hoang; *Generalization of a Problem with Isogonal Conjugate Points*
- [6] <https://artofproblemsolving.com/community/c2771h1181729>
- [7] <http://www.artofproblemsolving.com>
- [8] <https://usamo.wordpress.com/2014/11/30/three-properties-of-isogonal-conjugates/>

Hinty

Hint 1. Díky isogonálnosti O s H a tětíovosti $ABCD$ je $O_1P \perp CD$ a analogicky pro ostatní, z čehož plyne, že O_1PO_3O a O_2PO_3O jsou rovnoběžníky.

Hint 2. Buď je $\triangle BIH \cong \triangle BIO$, nebo je $BOIH$ tětíový čtyřúhelník.

Hint 3. Opsiště leží na téžnici, takže ABC je buď rovnoramenný, nebo pravoúhlý - rozeberte.

Hint 4. Ukažte $\triangle BOC \sim \triangle BDH$ a použijte spirální podobnost.

Hint 5. Pokud S je opsiště $\triangle BDE$, pak $BS \perp AC$.

Hint 6. Vyúhlete, že E je opsiště $\triangle ACD$.

Hint 7. Nechť ACA_1C_1 je tětíový. Buď Y kamarád X . Pak Y leží na BO a zároveň je trojúhelník AYC rovnoramenný, takže Y je opsiště.

Hint 8. BA a BC jsou tečny ke kružnici opsané APC .

Hint 9. Dokreslete střed AC a vyúhlete.

Hint 10. Ukažte, že trojúhelníky BMC a BTC_1 jsou podobné, kde M je střed AC .

Hint 11. Je to bod H_b

Hint 12. Pokud se elipsa dotýká AC v D , pak $\angle PDA = \angle QDC$. Překlopte Q podle stran.

Hint 13. Najdi Thaletovku a pak použij Six feet theorem.

Hint 14. Když O , O_P a O_Q jsou opsiště příslušných kružnic, vyúhlete, že $\angle AO_PO = \angle AO_QO$.

Hint 15. Dokreslete středy k_a , k_b a k_c . Chordála je kolmá na jejich spojnici. Střed k leží na osách B_1B_2 a dalších dvou analogických osách.

Hint 16. Dokreslete bod X takový, že BAM a BXC jsou podobné trojúhelníky. Dodělejte pomocí podobností a Ptolemaiovy věty na čtyřúhelník $AMCX$.

Hint 17. Nechť PQ protíná kružnici opsanou $\triangle ABC$ v X a Y . Pak Simsonovy přímky X a Y jsou na sebe kolmé a protínají se právě v našem bodě dotyku.

Hint 18. Dokreslete $D' \in \Omega$ tak, že $DD' \parallel AC$. S trochou úhlení dostaneme $\triangle PAD \sim \triangle AQD'$. Potom dostaneme $\triangle PDM \sim \triangle ND'Q$ a $\triangle AMD \sim \triangle NAD'$.

Hint 19. Vepsaná a připsaná koule jsou stejnohlé podle D . Pomocí toho a stejných tečen najdete shodné trojúhelníky a dopočítejte úhly.

Hint 20. BA' je isogonální s BC' , BX je isogonální s BB' .

Hint 21. QD je isogonální s QA , QC je isogonální s QB .

Hint 22. CJ a CL jsou isogonální v trojúhelníku ICK .

- Hint 23.** Přímký BC a DE jsou tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ACD .
- Hint 24.** PE a PF jsou isogonály v úhlu BPC .
- Hint 25.** Vyúhlete, že $\angle AXZ = \angle ABC = \angle YXC$.
- Hint 26.** Ukažte, že chceme, aby Z ležel na B -symediáně. Vyroberte body R a Q tak, že $RB \perp BC$, $QA \perp BA$, a průsečík AQ a CR je Z . Použijte lemma na BX , BA , BC , BY .
- Hint 27.** Necht P je pata výšky z X a BA . Ukažte, že PAH' je podobný XCB . Z toho vyvodte, že XB a XH' jsou isogonály v CXY .
- Hint 28.** Trojúhelníky BYC a FYE jsou (nepřímo) podobné. Ukažte, že X a Z jsou v těchto trojúhelnících „jakoby“ kamarádi.
- Hint 29.** Dokreslete isogonal conjugate k P a použijte six feet theorem. Doúhlete.
- Hint 30.** Ten bod je isogonal conjugate k B vzhledem k (libovolnému) trojúhelníku XAY . Na dokázání toho, že je to pro všechny ten samý bod, použijte definici isogonal conjugate jako střed kružnice opsané obrazům přes strany.
- Hint 31.** Ukažte, že K a L jsou isogonal conjugates a doúhlete.
- Hint 32.** Body A a C jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle BPD$.
- Hint 33.** Opsiště AEH , BDG a CFI si označme O_A , O_B a O_C . Když H je střed stejno-
lehosti převádějící ABC na $O_AO_BO_C$, pak jeho kamarád v $O_AO_BO_C$ je hledaný bod.
- Hint 34.** Ukažte, že chceme, aby Z ležel na B -symediáně. Ukažte, že bod, ve kterém se protínají kružnice skrz B , které se dotýkají AC v A , resp. v C , je kamarád Z .

Barycentrické souřadnice

Zdeněk Pezlar

Abstrakt. Už jste někdy fakt neměli rádi nějakou geometrickou úlohu? Já taky. V tomhle příspěvku si ukážeme jeden ze způsobů, jak tento malý problém řešit.

O co jde?

Definice. Ať P je bod v rovině trojúhelníka ABC . Pak barycentrickými souřadnicemi X nazveme trojici reálných čísel (x, y, z) takovou, že

$$P = xA + yB + zC, \quad x + y + z = 1.$$

Poznámka. Vzhledem k podmínce $x + y + z = 1$ je tato trojice určená poměry $x : y : z$. Pro jednoduchost budeme občas psát $X = (x : y : z)$ a mínit tím $X = (x/s, y/s, z/s)$, kde $s = x + y + z$.

Tvrzení. Každý bod v rovině $\triangle ABC$ má jednoznačné souřadnice.

Poznámka. Jelikož jsou barycentrické souřadnice stále vektory, chovají se lineárně. Střed úsečky nalezneme průměrováním souřadnic, podobně třetinu, čtvrtinu, středový obraz a tak dále.

Tvrzení. Je-li $P = (x, y, z)$ v rovině trojúhelníka ABC o obsahu 1, pak

$$[BCP] = |x|, \quad [CAP] = |y|, \quad [ABP] = |z|.$$

Paty cevián z P mají navíc souřadnice

$$\left(0, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right), \quad \left(\frac{x}{x+z}, 0, \frac{z}{x+z}\right), \quad \left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}, 0\right).$$

Trocha přípravy

Tvrzení (Vlastnosti skalárního součinu). Jsou-li $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ vektory, pak platí:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, právě když $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Lemma. Je-li ABC vepsán do kružnice o poloměru R umístěné do počátku souřadnic, pak platí

- $\vec{A} \cdot \vec{A} = R^2$.
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}$.

To podstatné

Tvrzení. Rovnice přímky má tvar

$$ux + vy + wz = 0,$$

kde $u, w, w \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

Tvrzení (O kolmosti). Ať $M - N = (x_1, y_1, z_1)$ a $P - Q = (x_2, y_2, z_2)$, pak $MN \perp PQ$ právě tehdy, když

$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + x_2z_1) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0.$$

Tvrzení (Výpočet vzdálenosti). Je-li $P - Q = (x, y, z)$, pak

$$|PQ|^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy.$$

Tvrzení. Rovnice kružnice má tvar

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0,$$

kde $u, v, w \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

Pár dalších vzorců pro fajnšmekry

Tvrzení. Body $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ a $Z = (z_1, z_2, z_3)$ leží v přímce, právě když

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokonce platí

$$[XYZ] = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} [ABC].$$

Tvrzení. Přímký $u_ix + v_iy + w_iz$ pro $i = 1, 2, 3$ procházejí jedním bodem, právě když

$$\det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tvrzení. Přímký $u_ix + v_iy + w_iz$ pro $i = 1, 2$ jsou rovnoběžné, právě když

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Tvrzení. [Conway Formula] V rovině ABC je bod P . Označme φ a ψ orientované úhly PBC a BCP . Pak

$$P = (-a^2 : S_\gamma + S_\psi : S_\beta + S_\varphi),$$

kde $S_\xi = 2[ABC] \cot \xi$.

Příklady k seznámení

Úloha 1. Je dán trojúhelník ABC . Určete souřadnice následujících bodů:

- 1) těžiště, vepsíště, připsíště.
- 2) středy stran, body dotyku s kružnicí vepsanou, body dotyku s připsanými.
- 3) průsečíky rovnoběžek se stranami vedenými vepsíštěm s obvodem trojúhelníka.
- 4) kolmiště, opsiště.
- 5) švrk, antišvrk.
- 6) kamarád bodu $X = (x, y, z)$.

Úloha 2. Je dán trojúhelník ABC . Určete rovnice následujících přímek:

- 1) strany $\triangle ABC$, střední příčky.
- 2) osy úhlů (vnějších i vnitřních), těžnice, symediány, tečny k opsané ve vrcholech.
- 3) osy stran, výšky.
- 4) strany dotykového trojúhelníka.
- 5) Eulerova přímka.

Úloha 3. Je dán trojúhelník ABC s běžným značením. Určete rovnice následujících kružnic:

- 1) opsaná, BGC , BIC .
- 2) AM_bM_c , AEF (dotyky s vepsanou).
- 3) kružnice devíti bodů.
- 4) kružnice vepsaná.

Úloha 4. Je dán trojúhelník ABC s běžným značením. Určete následující vzdálenosti:

- 1) AG, BG, CG .
- 2) AI, BI, CI .
- 3) IG .
- 4) $I_b I_c$ (přípsiště).

Skutečné úlohy

Úloha 5 (Cevova/Menalova věta). V trojúhelníku ABC leží na přímkách BC , CA a AB body D , E a F . Buď

$$k = \frac{BD \cdot CE \cdot AF}{CD \cdot AE \cdot BF},$$

kde délky jsou orientované. Ukažte, že $k = -1$ právě když D , E a F leží na jedné přímce, a $k = 1$ právě když se AD , BE a CF protínají v jednom bodě

Úloha 6 (Stewartova věta). V trojúhelníku ABC buď X bod na AC . Označme vzdálenosti AX , XC a BX postupně jako m , n a x . Pak

$$b(x^2 + mn) = a^2m + c^2n.$$

Úloha 7. V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme O střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD . Dokažte, že přímky OS a CT jsou rovnoběžné. (Celostátko 2013)

Úloha 8. Buď ABC trojúhelník s kružnicí vepsanou ω . Body dotyku kružnice připsaných s úsečkami BC a AC si označíme postupně X a Y . Buď P průsečík AX a BY . Kružnice ω protíná úsečku AX ve dvou bodech, bližší z nich k A označíme Q . Ukažte, že $AQ = XP$. (USAMO 2001)

Úloha 9. Buď ABC různostranný trojúhelník s kružnicí opsanou k . Tečny ke k v bodech A a B se protínají v bodě L_c , tečny ke k v bodech A a C se protínají v bodě L_b . Dále buďte I_b , I_c středy kružnic připsaných po řadě stranám AC , AB . Dokažte, že přímky $L_b I_b$, $L_c I_c$, a BC prochází jedním bodem. (Prase 2024)

Úloha 10. Čtyřstěn $ABCD$ má tu vlastnost, že součet obsahů stěn ABC a ABD je stejný jako součet obsahů stěn CDA a CDB . Ukažte, že středy hran AC , AD , BC , BD a střed koule vepsané leží v jedné rovině. (iKS 3 2013/2014)

Úloha 11. Bod P leží uvnitř $\triangle ABC$ a paty jeho příslušných cevian na AB , BC a CA jsou postupně D , E a F . Ukažte, že

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC]$$

právě tehdy, když P leží na jedné z těžnic.

(USA TST 2003)

Úloha 12. V trojúhelníku ABC protínají osy úhlů ve vrcholech A , B a C protilehlé strany postupně v bodech D , E , F . Ukažte, že $BDEF$ je tětiový čtyřúhelník právě tehdy, když

$$\frac{b}{a+c} = \frac{c}{b+a} + \frac{a}{c+b}.$$

(Mongolsko TST 2000)

Úloha 13. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník. Označme jako M , N a P postupně středy BC , CA a AB . Nechť osy stan AB a AC protínají AM postupně v bodech D a E . Přímký BD a CE se protínají v bodě F ležící uvnitř ABC . Dokažte, že $ANFP$ je tětiový čtyřúhelník.

(USAMO 2008)

Úloha 14. Buď ABC trojúhelník splňující $b+c=3a$. Buď I vepisťe a X , Y dotyky kružnice vepsané se stranami AB a AC . Nechť K a L jsou obrazy bodů D a E podle I . Dokažte, že B , C , K a L leží na jedné kružnici.

(Shortlist 2005)

Úloha 15. Nechť A_1 je v trojúhelníku ABC střed čtverce, který má dva vrcholy na úsečce BC a po jednom na úsečkách AB a CA . Analogicky zadefinujeme B_1 a C_1 . Ukažte, že přímký AA_1 , BB_1 a CC_1 se protínají v jednom bodě.

(Shortlist 2001)

Úloha 16. Buď D pata A -symediány na BC . Skrze D nakresleme rovnoběžky s AB a AC a jejich průsečík s AC a AB označme postupně jako B_1 a C_1 . Dokažte, že BCB_1C_1 je tětiový a označme jeho střed jako O_a . Podobně zadefinujeme O_b a O_c . Ukažte, že AO_a , BO_b a CO_c se protínají v jednom bodě.

(WOOT 2012)

Úloha 17. Je dán trojúhelník ABC . Na jeho stranách AB a AC jsou postupně vybrány body X a Y . Nechť Z je průsečík přímký BY a CX . Dokažte nerovnost

$$[BZX] + [CZY] > 2[XYZ],$$

kde $[DEF]$ označuje obsah trojúhelníku DEF .

(Celostátko 2020)

Úloha 18. V daném trojúhelníku $\triangle ABC$ je rozdíl délek každé dvojice jeho stran alespoň $d > 0$. Nechť G a I jsou těžiště a vepisťe trojúhelníku $\triangle ABC$ a r jeho poloměr vepsané kružnice. Ukažte, že platí nerovnost

$$[AIG] + [BIG] + [CIG] \geq \frac{2}{3}dr,$$

kde $[XYZ]$ označuje obsah trojúhelníku $\triangle XYZ$.

(Celostátko 2015)

Úloha 19. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC , uvnitř které je zvolen bod D . Nechtě E , F jsou po řadě takové body na stranách AB , AC , že platí $\angle BED = \angle DFC > 90^\circ$. Dokaž, že přímka AD je chordálou kružnice ABF a AEC . (Celostátko 2020)

Úloha 20. Nechtě ABC je trojúhelník a bod J je střed připsané kružnice trojúhelníku $\triangle ABC$ ležící naproti vrcholu A . Tato kružnice se dotýká strany BC v bodě M a dotýká se přímk AB a AC v bodech K a L , respektive. Přímk LM a BJ se protínají v bodě F a přímk KM a CJ se protínají v bodě G . Nechtě S je průsečík přímk AF a BC a T je průsečík přímk AG a BC . Dokažte, že bod M je středem úsečky ST . (IMO 2012)

Úloha 21. V trojúhelníku ABC leží bod A_1 na straně BC a bod B_1 na straně AC . Nechtě P a Q jsou body na úsečkách AA_1 a BB_1 , respektive, takové, že PQ je rovnoběžné s AB . Nechtě P_1 je bod na přímce PB_1 takový, že bod B_1 leží přísně mezi P a P_1 a platí $\angle PP_1C = \angle BAC$. Podobně nechtě Q_1 je bod na přímce QA_1 takový, že bod A_1 leží mezi Q a Q_1 a platí $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Dokažte, že body P, Q, P_1 a Q_1 leží na jedné kružnici. (IMO 2019)

Úloha 22. V trojúhelníku ABC se kružnice připsané dotýkají úseček AB a BC v bodech X a Y . Buď I' obraz vepsiště ABC podle středu AC . Ukažte, že $BXI'Y$ je tětiový právě tehdy, když $AB \perp BC$. (Sharygin 2012)

Úloha 23. Nechtě ABC je ostroúhlý trojúhelník a nechtě P a Q jsou dva body na jeho straně BC . Sestrojíme bod C_1 tak, aby konvexní čtyřúhelník $APBC_1$ byl tětiový, aby platilo $QC_1 \parallel CA$ a aby body C_1 a Q ležely na opačných stranách přímky AB . Podobně sestrojíme bod B_1 tak, aby konvexní čtyřúhelník $APCB_1$ byl tětiový, aby platilo $QB_1 \parallel BA$ a aby body B_1 a Q ležely na opačných stranách přímky AC . Dokažte, že body B_1, C_1, P a Q leží na jedné kružnici. (USAMO 2005)

Literatura a zdroje

Príspevek byl s malými změnami převzat od Rada Švarce. Tímto mu děkuji.

- [1] Schindler M., Chen. E., *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*
- [2] Yiu P., *Introduction to the Geometry of the Triangle*

Hinty

Hint 1.

- 1) $(1 : 1 : 1), (a : b : c), (-a : b : c)$ atp.
- 2) $(1/2, 1/2, 0)$ atp., $(0, s - c, s - b)$ atp., $(0, s - b, s - c)$ atp. $2s = a + b + c$.
- 3) $(a : 0 : b + c)$.
- 4) $(S_c S_b : S_a S_c : S_b S_a), (a^2 S_a : b^2 S_b : c^2 S_c)$, kde $S_a = b^2 + c^2 - a^2$.
- 5) jako středy mezi vepsišti / připsišti.

6) $(a^2/x, b^2/y, c^2/z)$.

Hint 2.

- 1) $x = 0$, atp, $x = 1/2$ atp.
- 2) $y : b = \pm z : c$ atp., $y = z$, atp. $y/b^2 = \pm z/c^2$. (Pamatujte, že tečny jsou exsymediány.)
- 3) $a^2(z - y) + x(c^2 - b^2) = 0$, $a^2(z - y) + (1 - x)(b^2 - c^2) = 0$.
- 4) $(s - a)x - (s - b)y - (s - c)z = 0$.
- 5) $u : v : w = S_B(S_C - S_A) : S_C(S_A - S_B) : S_C(S_A - S_B)$.

Hint 3.

- 1) $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$, $v = w = 0$, $3u = a^2 + b^2 + c^2$, $v = w = 0$, $u = bc$.
- 2) $u = 0$, $v = c^2/2$, $w = b^2/2$.
- 3) $u = S_A/2$, $v = S_B/2$, $w = S_C/2$.
- 4) $u = (s - a)^2$, $v = (s - b)^2$, $w = (s - c)^2$.

Hint 4. Prostě to dosadte do rovnice pro vzdálenost. Moc se s tím neupravujte, jde hlavně o to, že takto jdou ony vzdálenosti pohodlně vyjádřit.

Hint 5. Vyjádřete si $D = (0, d, 1 - d)$, $E = (1 - e, 0, e)$ a $F = (f, 1 - f, 0)$. Pro Cevovu větu si uvědomte, že přímka BE je parametrizovaná jako $x = \frac{e}{1-e}z$ a podobně pro ostatní. Pro Menelaovu větu si uvědomte, že přímka DF se parametrizuje jako $(1 - d)(1 - f)x - (1 - d)fy + dfz = 0$.

Hint 6. Souřadnice X určete pomocí m a n . Následně spočtete vzdálenost BX .

Hint 7. Dívejte se na věc z pohledu trojúhelníku ABD . Vyjádřete si všechny body a ukažte, že vektory OS i CT jsou násobkem vektoru $(2BD : -BD + CA - AB : -BD - CA + AB)$.

Hint 8. Označte Q' bod takový, že AQ' a PX jsou stejné vektory a ukažte, že vepsíště je střed Q a dotyku vepsané.

Hint 9. Přímky spočítej pomocí determinantu.

Hint 10. Nejtěžší je rozmyslet si, jak funguje barycentrika ve 3D. No, minimálně ty základní věci dost podobně :D

Hint 11. Váhy (x, y, z) bodu P chápejte skutečně jako hmotné body. Poměry obsahů přepište do poměrů úseček a ty do x, y, z . Pak uhodněte faktorizaci.

Hint 12. Ze tří bodů najděte rovnici kružnice a čtvrtý dosadte.

Hint 13. Najděte souřadnice F a ověřte, že leží na kružnici. Pro kontrolu $F = (p, q, r)$, kde $p + q + r = 1$ a $r/p = c^2/(c^2 + b^2 - a^2)$ a $q/p = b^2/(b^2 + c^2 - a^2)$.

Hint 14. Ze tří bodů najděte rovnici kružnice (přejděte k $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$) a ukažte, že za dané podmínky čtvrtý vyhovuje (dosazením, faktorizovat netřeba). Pro kontrolu $K = (xz : yz : (y + x)^2)$ a $L = (xy : (z + x)^2 : yz)$.

Hint 15. Nafoukněte každý z čtverců tak, aby jedna jeho strana splývala se stranou trojúhelníka. Pak použijte Conweyův vzorec.

Hint 16. K první části buď stačí něco tušit o antirovnoběžnosti, nebo se prostě spočítá, že vše leží na kružnici $a^2yz + b^2zx + c^2xy = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}x(x + y + z)$. Ke druhé stačí určit podíl B a C souřadnic bodu O_a (Ceva!). Ten najdete jako průsečík dvou os úseček. Vyjde $y/z = S_C/S_B$.

Hint 17. Začni X kem pak Y, Z .

Hint 18. To se spočítá. Nezapomeň na vztah poloměru vepsané a obsahu.

Hint 19. Body E a F spočítej pomocí podobnosti.

Hint 20. Vyjadři si všechny hezké body a ono to půjde.

Hint 21. Nejprv trochu syntetiky pak bary masterclass

Hint 22. Sestavte rovnici kružnice a dosadte do ní I' . Ze vzniklé identity faktorizujte $b^2 + c^2 - a^2$.

Hint 23. Zkuste spočítat (ABP) a dál bod C_1 .

Kruté vety v teórii čísel

Matej Vasky

Abstrakt. V príspevku preberieme niekoľko ťažkých tvrdení z teórie čísel a ukážeme si niekoľko úloh, v ktorých sa dajú použiť. Budeme sa zaoberať Betrandovým postulátom, Dirichletovou, Zsigmondyho a Mihailescovou vetou.

Príspevok je kópiou príspevku od Rada Švarca z roku 2016. Týmto mu ďakujem za umožnenie jeho použitia.

Bertrandov postulát

Veta (Bertrandov postulát). Pre každé prirodzené $n > 1$ existuje prvočíslo p také, že $n < p < 2n$.

Úloha 1. Ukážte, že ak p_i označuje i -té prvočíslo, potom

$$\frac{p_n + p_{n+2}}{p_{n+1}} > \frac{3}{2}.$$

Úloha 2. Ako *pekné* číslo nazveme také prirodzené n , že vždy, keď pre prirodzené m platí $1 < m < n$ a $(m, n) = 1$, potom m je prvočíslo. Nájdite všetky pekné čísla.
(Estónsko TST 1997)

Úloha 3. Nájdite všetky n , pre ktoré je $n!$ druhou mocninou celého čísla.

Úloha 4. Existuje n také, že pre všetky $t \geq n$ platí, že medzi t a t^2 leží aspoň 2020 prvočísel?

Úloha 5. Dokážte, že každé prirodzené číslo sa dá zapísať ako súčet navzájom rôznych nezložených čísel.

Úloha 6. Dokážte, že čísla v množine $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vieme popárovať tak, že súčet každého páru je prvočíslo.

Úloha 7. Nech

$$a_n = \sum_{i=n}^{2n} \frac{(2i+1)^n}{i}.$$

Ukážte, že a_n nikdy nie je celé číslo.

Úloha 8. Nájdite všetky prirodzené n , pre ktoré je počet kladných deliteľov čísla $[1, 2, \dots, n]$ mocninou dvojky. (Estónsko TST 2004)

Úloha 9. Určite všetky prirodzené k , pre ktoré existuje nekonečne mnoho prirodzených n takých, že

$$n + k \nmid \binom{2n}{n}.$$

(Čína 2015)

Úloha 10. Určite všetky prirodzené x, y , pre ktoré platí

$$x! + y! = x^y.$$

(MEMO 2007)

Úloha 11. Nech F_i je i -té Fibonacciho číslo (začínajúce $F_1 = F_2 = 1$). Nech

$$a_n = \left\lfloor \sum_{i=1}^n \sqrt{F_i} \right\rfloor \quad \text{a} \quad b_n = \left\lfloor \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i} \right\rfloor.$$

Ukážte, že $a_n = b_n$ len pre konečne mnoho hodnôt n .

Dirichletova veta

Veta (Dirichletova veta). Ak a je prirodzené číslo, b celé číslo a $(a, b) = 1$, potom je v aritmetickej postupnosti $an + b$ nekonečne mnoho prvočísel.

Úloha 12. Existujú prirodzené čísla a a b také, že kedykoľvek sú p a q rôzne prvočísla väčšie než 1000, potom aj $ap + bq$ je prvočíslo? (Peterburg 1996)

Úloha 13. Nech S je množina všetkých prevrátených hodnôt prirodzených čísel. Potom pre každé $k > 2$ ukážte, že v S existuje k -členná nekonštantná aritmetická postupnosť taká, že k nej nevieme pridať žiadny ďalší prvok z S tak, aby postupnosť zostala aritmetická. (Veľká Británia 1997)

Úloha 14. Dokážte, že ak s, a a b sú prirodzené čísla a $(a, b) = 1$, potom existuje nekonečne mnoho n takých, že $an + b$ je súčinom s rôznych prvočísel.

Úloha 15. Nech m je kladné nepárne číslo. Ukážte, že existuje nekonečne veľa kladných n takých, že $mn + 1 \mid 2^n - 1$. (Mongolsko TST 2008)

Úloha 16. Pre každé prirodzené n ukážte, že existuje prirodzené k také, že

$$p_{k-1} < p_k - n < p_k + n < p_{k+1}.$$

(AMM E4772)

Úloha 17. Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s racionálnymi koeficientami také, že ak p je prvočíslo, potom aj $P(p)$ je prvočíslo. (AMM E1632)

Úloha 18. Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s celočíselnými koeficientami také, že ak p a q sú rôzne prvočísla, potom $P(p)$ a $P(q)$ sú nesúdeliteľné čísla. (Mathematical Reflection O318)

Úloha 19. Dokážte, že pre každú dvojicu prirodzených čísel m, n existuje prirodzené k také, že všetky čísla $\varphi(k), \varphi(k+1), \dots, \varphi(k+m)$ sú deliteľné n . (AMM E4524)

Úloha 20. Dokážte, že existuje nekonečná množina S po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel také, že pre ľubovoľné $n \in S$ neexistuje žiadna trojica nenulových celých čísel x, y, z také, že $(n, xyz) = 1$ a $x^n + y^n + z^n = 0$. (AMM 1978)

Úloha 21. Ukážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n takých, že číslo $n^4 + 1$ má prvočíselného deliteľa väčšieho než $2n$. (MKS 30–2–8)

Úloha 22. Ukážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n takých, že číslo $n^2 + 1$ má prvočíselného deliteľa väčšieho než $2n + \sqrt{2n}$. (IMO 2008)

Zsigmondyho veta

Veta (Zsigmondyho veta). Nech $a > b$ sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Ak $n > 1$, potom:

- Existuje prvočíslo p také, že $p \mid a^n - b^n$ a pre $1 \leq i < n$ platí $p \nmid a^i - b^i$. Výnimkou sú prípady $(a, b, n) = (2, 1, 6)$ a $(a, b, n) = (a, 2^k - a, 2)$ pre nejaké prirodzené k .
- Existuje prvočíslo q také, že $q \mid a^n + b^n$ a pre $1 \leq i < n$ platí $q \nmid a^i + b^i$. Výnimkou je prípad $(a, b, n) = (2, 1, 3)$.

Urobme dohodu – ak sa v hinte objaví niečo, čo s úlohou absolútne nesúvisí, znamená to, že príklad sa dá vyriešiť len triviálnou aplikáciou veta a hint by teda znel jedine „proste priamočiaro použi vetu“.

Úloha 23. Ukážte, že postupnosť $a_n = 3^n - 2^n$ neobsahuje tri členy tvoriace geometrickú postupnosť. (Rumunsko TST 1994)

Úloha 24. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel (a, b, p) , kde p je prvočíslo a $2^a + p^b = 19^a$. (Taliansko TST 2003)

Úloha 25. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (a, n) také, že vždy, keď prvočíslo p delí $a^n - 1$, existuje prirodzené $m < n$ také, že $p \mid a^m - 1$. (USA TST 2012)

Úloha 26. Nájdite všetky nezáporné celé riešenia rovnice $3^m - 5^n = a^2$.

Úloha 27. Nájdite všetky nezáporné celé riešenia rovnice $5^m - 3^n = a^2$. (Balkán 2009)

Úloha 28. Nech $p < q$ sú nepárne prvočísla. Dokážte, že $2^{pq} - 1$ má aspoň tri rôzne prvočíselné delitele. (Poľsko 2010)

Úloha 29. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (x, y) také, že pre nejaké prvočíslo $p^x - y^p = 1$. (MO 1996)

Úloha 30. Nájdite všetky päťice prirodzených čísel (a, n, p, q, r) , pre ktoré platí $a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1)$. (Japonsko 2011)

Úloha 31. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel (a, m, n) , pre ktoré platí $a^m + 1 \mid (a + 1)^n$. (ISL 2000)

Úloha 32. Nájdite všetky štvorice prirodzených čísel (x, r, p, n) , také, že p je prvočíslo, $n, r > 1$ a $x^r - 1 = p^n$. (MOSP 2001)

Úloha 33. Nájdite všetky prirodzené riešenia rovnice

$$(a + 1)(a^2 + a + 1) \dots (a^n + a^{n-1} + \dots + 1) = a^m + a^{m-1} + \dots + 1.$$

Úloha 34. Nech $b, m, n \in \mathbb{N}$, $b > 1$ a $m \neq n$. Predpokladajme, že $b^m - 1$ a $b^n - 1$ majú rovnaké množiny prvočíselných deliteľov. Ukážte, že $b + 1$ je mocninou dvojky. (ISL 1997, Čína TST 2005)

Úloha 35. Nech A je konečná množina prvočísel a $a > 1$ prirodzené číslo. Ukážte, že existuje iba konečne veľa prirodzených n takých, že všetky prvočíselné delitele čísla $a^n - 1$ ležia v A . (Problems from the Book)

Úloha 36. Nájdite všetky šesticie prirodzených čísel (a, b, c, p, q, r) , také, že p, q, r sú prvočísla a $p^{2a} = q^b r^c + 1$. (Srbsko TST 1977)

Úloha 37. Nájdite všetky prirodzené n , pre ktoré majú n a $2^n + 1$ rovnakú množinu prvočíselných deliteľov. (iKS 3–3)

Úloha 38. Patrik miluje prvočísla. Niektoré miluje veľmi, iné viac, ale má niekoľko prvočísel, ktoré miluje najviac. Všetky tieto prvočísla si schoval do konečnej neprázdnej množiny P . K narodeninám by si od vás prial také prirodzené číslo n , ktoré sa dá zapísať ako $a^p + b^p$ pre nejaké $a, b \in \mathbb{N}$ (kde p je prvočíсло) práve vtedy, keď $p \in P$. Rozhodnite, či môžete jeho pranie splniť pre každú množinu P .

(iKS 5–3)

Mihailescova veta

Veta (Mihailescova veta). Ak pre prirodzené čísla a, b, m, n platí $a^m - b^n = 1$, potom $m = 1$ alebo $n = 1$, alebo $(a, b, m, n) = (3, 2, 2, 3)$.

Úloha 39. Ukážte, že $n^7 + 1$ nikdy nie je štvorec.

(India TST)

Úloha 40. Prirodzené čísla $x > 2$, $y > 1$ a z spĺňajú rovnicu $x^y + 1 = z^2$. Nech p , resp. q je počet rôznych prvočíselných deliteľov x , resp. y . Ukážte, že potom $p \geq q + 2$.

(Rusko 2005)

Úloha 41. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (x, y) také, že pre nejaké prvočíсло $p^x - y^p = 1$.

(MO 1996)

Úloha 42. Nájdite všetky štvorice prirodzených čísel (x, r, p, n) , také, že p je prvočíсло, $n, r > 1$ a $x^r - 1 = p^n$.

(MOSP 2001)

Úloha 43. Koľko najmenej rôznych prvočíselných deliteľov môže mať výraz $19^{4n} + 4$ pre $n \geq 1$?

(Turecko juniori 2014)

Úloha 44. Nájdite všetky prvočísla p také, že $p(2^{p-1} - 1) = a^k$ pre nejaké prirodzené a a $k > 1$.

(iKS 2–1)

Literatúra a zdroje

[1] Rado van Švarc; *Kruté vety v $\mathbb{N}$* , iKS 2016

[2] *Art of Problem Solving*, <https://artofproblemsolving.com/community>

Hinty

Hint 1. Vynásobte dvomi a použite Bertrandu.

Hint 2. Ukážte, že pre $i \geq 4$ je $p_1 p_2 \cdots p_i > p_{i+1}^2$.

Hint 3. Uvážte p medzi $\frac{n}{2}$ a n .

Hint 4. $n = 2^{2020}$.

Hint 5. Indukcia.

Hint 6. Indukcia.

Hint 7. Preveďte na spoločného menovateľa.

- Hint 8.** Vadí nám, keď je tam nejaké prvočíslo dvakrát.
- Hint 9.** Pre $k > 1$ nájdeme prvočíslo p , také, že $k < p < 2k$ a volíme $n = p^i + p - k$.
- Hint 10.** Keď $x > y$, zvol' prvočíslo medzi $\frac{x}{2}$ a x .
- Hint 11.** $p_{i+2} < p_{i+1} + p_i$.
- Hint 12.** Hľadajte prvočísla s rozdielom, ktorý je násobkom $a + b$.
- Hint 13.** Nech $a_1 = \frac{1}{(kn)!}$ a $d = \frac{n}{(kn)!}$.
- Hint 14.** Indukcia.
- Hint 15.** Zvoľte dostatočne vysoké prvočíslo $p = \varphi(m)k + 1$ a potom $n = \frac{2^p - 2}{m}$.
- Hint 16.** Zvoľte prvočíslo $p \equiv (q - 1)! - 1 \pmod{q!}$, kde q je dosť veľké prvočíslo.
- Hint 17.** Nech $Q(x)$ je $P(x)$ prenásobený tak, že má celočíselné koeficienty. Potom nech $m_i = Q(p)n_i + p$, kde p je prvočíslo také, že $p \nmid Q(p)$.
- Hint 18.** Zvoľte p veľké, uvažte prvočíslo r také, že $r \mid P(p)$ a vezmite $q = rk + p$.
- Hint 19.** Uvedomte si, že ak prvočíslo p delí a , potom $p - 1 \mid \varphi(a)$.
- Hint 20.** Ak už vyberieme čísla $n_1, \dots, n_k$, vezmeme prvočíslo $p \equiv -1 \pmod{4n_1n_2 \cdots n_k}$ a pridáme $n_{k+1} = \frac{p(p-1)}{2}$.
- Hint 21.** Zvoľte $p = 8k + 1$, g ako primitívny prvok modulo p a $n = g^k$.
- Hint 22.** Zvoľte $p = 20k + 1$, vezmite najmenšie n , ktoré spĺňa $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$ a uvažte jeho vzdialenosť od $\frac{p-1}{2}$.
- Hint 23.** Nech pre $x < y < z$ je $(3^y - 2^y)^2 = (3^x - 2^x)(3^z - 2^z)$ a pozrite sa na prvočísla $3^z - 2^z$.
- Hint 24.** Americkí vedci zistili, že 21,3857 % štatistík je presnejších, než si môžu dovoliť.
- Hint 25.** Waterboarding v Guantanamo Bay znie fakt cool, keď ani o jednom z toho nevie, čo to je.
- Hint 26.** Modulo 4 zistíme, že m je párne. Rozložte rozdiel štvorcov.
- Hint 27.** Modulo 3 zistíme, že m je párne. Rozložte rozdiel štvorcov.
- Hint 28.** $2^p - 1 \mid 2^{pq} - 1$, $2^q - 1 \mid 2^{pq} - 1$.
- Hint 29.** Keby som dostal korunu vždy, keď ma dievča považuje za neatraktívneho, mal by som toľko peňazí, že by ma dievčatá považovali za atraktívneho.
- Hint 30.** V Škótsku žije aspoň jedna ovca, ktorá je biela aspoň z jednej strany.
- Hint 31.** Štúdia zistila, že ženy, ktoré trpia ľahkou nadváhou, žijú dlhšie než muži, ktorí sa o tom zmienia.
- Hint 32.** Zmysel pre čierny humor je ako nohy. Niektorí ľudia ich majú, iní nie.
- Hint 33.** Využite vzorec na výpočet súčtu geometrickej postupnosti.
- Hint 34.** Aj tie najdlhšie cesty sa začínajú jedným malým krokom. Rovnako sa začína aj pád do priekopy.
- Hint 35.** Kanadský psychológ predáva za 20 dolárov knihu, ktorá vás naučí, ako otestovať IQ vášho psa. Ak si ju kúpite, váš pes je chytrejší než vy.
- Hint 36.** $p^a + 1$ a $p^a - 1$ sú (skoro) nesúdeliteľné.
- Hint 37.** Uvažte prvočíslo p , ktoré delí $2^n + 1$ a využite malú Fermatovu vetu.
- Hint 38.** Ak S je súčin všetkých prvočísel z P , zvoľte 2^{S+1} .
- Hint 39.** Pýtal som sa severokórejských matematikov, ako sa im žije v ich domovine. Vraj si nemôžu sťažovať.
- Hint 40.** Ži každý deň, ako by to bol tvoj posledný. Raz budeš mať pravdu.
- Hint 41.** Môj dedko má levie srdce a doživotný zákaz vstupu do zoo.

Hint 42. Čo majú spoločné alkoholik a pedofilný nekrofil? Obaja majú radi studenú dvannástku.

Hint 43. $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$.

Hint 44. Rozlož zátvorku.

Obsah

Zabíjení nerovností (Zdeněk Pezlar)	3
Lineárna algebra v kombinatorike (Michal Staník)	10
Extremálna kombinatorika (Adam Džavoronok)	18
Isogonály a kamarádi (Michal Pecho)	25
Barycentrické souřadnice (Zdeněk Pezlar)	33
Kruté vety v teorii čísel (Matej Vasky)	41