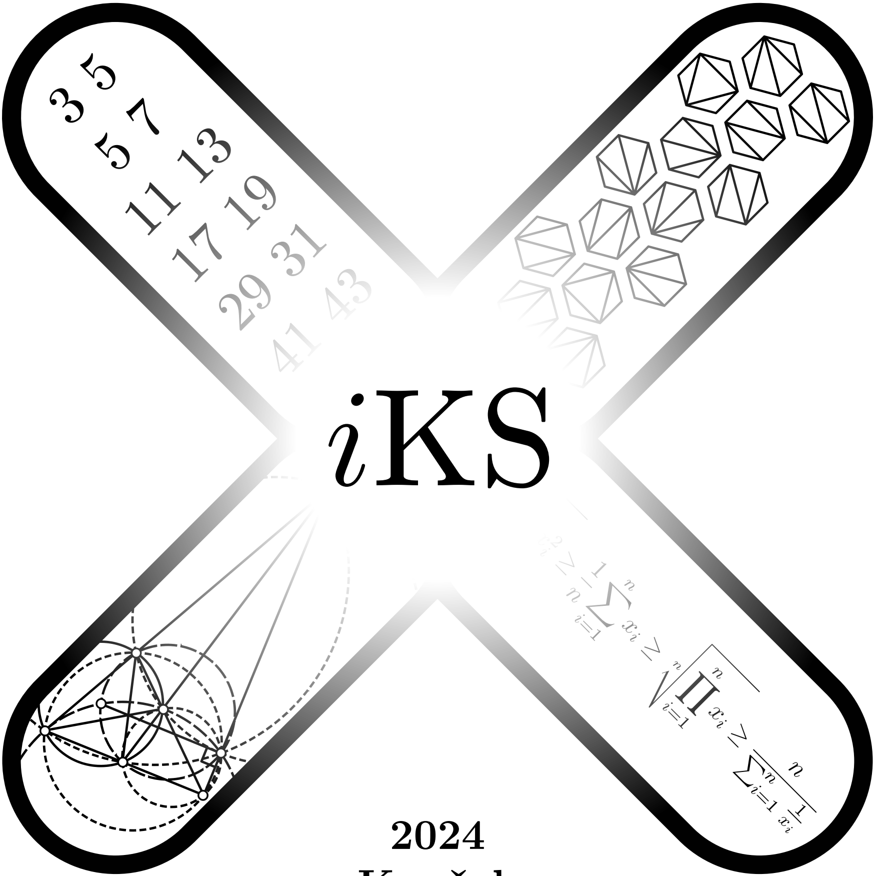

*i*KS

2024

Kunžak

Adam Džavoronok
Martin Kopčány
Josef Minařík
Magdaléna Mišinová
Radek Olšák
Zdeněk Pezlar
Michal Staník
Jakub Šošovička

Obsah

Cifry

Adam Džavoronok

Abstrakt. Príspevok je zameraný na riešenie úlohy z olympiádnej teórie čísel týkajúcich sa cifier a ciferného zápisu čísla, prevažne v desiatkovej sústave. Jeho cieľom je oboznámiť čitateľa s rôznymi metódami a heuristikami ako k takýmto úlohám pristupovať.

Návrat do základnej školy

Definícia. Pod ciferným zápisom kladného celého čísla n v sústave so základom p pre $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ rozumieme $(k+1)$-ticu cifier $a_0, a_1, \ldots, a_k$ spĺňajúcu

$$\sum_{i=0}^{k} p^i a_i = n, \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \quad a_k \neq 0.$$

Zapisujeme $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}_p$.

Cvičenie. Rozmyslite si, že ciferný zápis v každej sústave so základom $p \geq 2$ je jednoznačný.

Definícia. Ciferným súčet čísla $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}_p$ v p-čkovej sústave je $\sum_{i=0}^{k} a_i$.

S týmito definíciami ste sa už pravdepodobne stretli už na základnej škole. Je dôležité si avšak všimnúť, že ciferný zápis čísla nemá v podstate nič spoločné s prirodzeným číslom, keď sa na neho pozrieme s číselno-teoretického hľadiska. Skrátka nehovorí nič o deliteľoch, či je to prvočíslo, či je to štvorec... Pár súvislostí tam predsa je tak si nejaké základné veci povieme. Začneme asi jedinou vetou, ktorú budeme používať a ani tú nie často.

Veta. $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ ak a, n sú nesúdeliteľné.

Často sa zaobídeme iba s použitím Dirichletovho princípu, kedy nám bude stačiť ukázať existenciu exponentu s požadovanou vlastnosťou. V skutočnosti to ukazuje dva rôzne prístupy – kombinatorický (že z Dirichleta exponent existuje) a číselno-teoretický (že vieme cez kongruencie dokázať, že je to presne $\varphi(n)$). Niektoré úlohy tu budú aj viac kombinatorické, no niekde kombinatorika nebude stačiť. Voľba konkrétneho a, n závisí od úlohy ale pochopiteľne jedno z nich bude p (sústava v ktorej pracujeme) prípadne jej mocnina.

Teraz si spomeňme základné kritéria deliteľnosti v desiatkovej sústave.

Tvrdenie. Číslo je deliteľné 2^k alebo 5^k práve vtedy, keď jeho posledné k-číslie je.

Tvrdenie. Nech $S(n)$ je ciferný súčet čísla n. Potom $S(n) \equiv n \pmod 9$.

Podobne sa dajú odvodiť aj kritéria deliteľnosti pre iné čísla, keby sme sa na ne dívali v iných sústavách. Tej teórie nie je veľa. Dokonca občas môže pomôcť spomenúť si, ako sme násobili a odčítavali na základnej škole a pozrieť sa na to v inej sústave.

Pytagoriáda

Poznámka. Pokiaľ nie je explicitne napísané inak, pracujeme s dekadickým zápisom čísla.

Úloha 1. Hovoríme, že kladné celé číslo d je spravodlivé, ak počet 2021-ciferných palindrómov, ktoré sú násobkami d, je rovnaký ako počet 2022-ciferných palindrómov, ktoré sú násobkami d. Je v množine $\{1, 2, \ldots, 34, 35\}$ viac čísel, ktoré sú spravodlivé, alebo tých, ktoré nie sú? (celoštátko 2022)

Úloha 2. Vedeli ste, že $6^5 + 1 = 7777$? Dokážte, že pre $n > 5$ obsahuje ciferný zápis $6^n + 1$ aspoň 2 rôzne cifry.

Úloha 3. Dokážte, že každému dostatočne veľkému prirodzenému číslu ide zmazať niekoľko prvý a posledných cifier tak, že vznikne násobok čísla 2023.

(Kanada 2011)

Úloha 4. Nech m, n sú prirodzené čísla také, že m má d cifier a $d < n$. Vypočítajte ciferný súčet $(10^n - 1)m$. (Hong Kong 1994)

Úloha 5. Pre prirodzené číslo a definujme a' ako číslo, ktoré dostaneme, keď a prečítame odzadu. Nech a_1 je prirodzené číslo a zároveň platí $a_{n+1} = a_n + a'_n$. Dokážte, že a_7 nie je prvočíslo. (celoštátko 2006)

Úloha 6. Vypočítajte ciferný súčet $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdots (10^{2^n} - 1)$v závislosti od n.

Úloha 7. Dokážte, že existuje n-ciferné číslo deliteľné 5^n, ktoré má všetky cifry nepárne. (USAMO 2003)

Úloha 8. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa dá zapísať ako súčet 2002 čísel s rovnakým ciferným súčtom a aj ako súčet 2003 čísel s rovnakým ciferným súčtom. (Rusko 2002)

Úloha 9. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (m, n) také, že

$$\underbrace{111\ldots1}_{m \text{ jednotiek}} \times \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ jednotiek}}$$

je palindróm (Brazília 2005)

Úloha 10. Pre každé kladné celé číslo k označme $P(k)$ počet všetkých kladných celých $4k$-ciferných čísel, ktoré možno zostaviť z cifier 2, 0 a ktoré sú deliteľné číslom 2020. Dokážte nerovnosť:

$$P(k) \geq \binom{2k-1}{k}^2$$

a určte, pre ktoré k nastáva rovnosť. (celoštátko 2020)

Úloha 11. Ciferný súčet čísla N je 100, ciferný súčet čísla $5N$ je 50. Dokážte, že N je párne. (výberko 2006)

Úloha 12. Funkcia f je definovaná na kladných celých číslach a platí pre ňu:

- $f(1) = 1$, $f(3) = 3$,
- $f(2n) = f(n)$,
- $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$,
- $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$

pre všetky kladné celé čísla n. Určte počet kladných celých čísiel menších ako 2024 takých, že $f(n) = n$. (IMO 1988)

Úloha 13. Určte, či existuje nekonečná postupnosť nenulových číslic $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a kladné celé číslo N také, že pre každé celé číslo $k > N$ je číslo $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ štvorcom. (IMOSL 2013)

Za desatinnou čiarkou

Občas sa vyskytuje nie len ciferný zápis prirodzeného čísla, ale aj čísla racionálneho. Zaujímavé sú periodické zápisy, teda také v ktorých sa nejaká k-tica cifier opakuje do nekonečna.

Tvrdenie. $\overline{0, a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots} = \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}}{10^k - 1}$

Cvičenie. Rozmyslite si, že každé racionálne číslo $\frac{p}{q}$ má konečný desatinný rozvoj alebo periodický s periódou nanajvýš $q-1$.

Cvičenie. Kedy má desatinný rozvoj racionálneho čísla $\frac{p}{q}$ periódu práve $q-1$. Vo všeobecnosti, čomu sa rovná dĺžka periódy?

Cvičenie. Ak racionálne číslo $\frac{p}{q} = \overline{0, a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots}$, čomu sa potom rovná $\overline{0, a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots}$?

Nás bude tešiť využitie výsledkov predchádzajúcich cvičení v úlohách s celými číslami.

Úloha 14. Nech $n \in \mathbb{N}$. Zoberme si n-ciferné číslo $A = \overline{a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, ktorého cifry $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sú nenulové a zároveň nie sú všetky rovnaké. Označme ďalej pre $1 \leq k < n$ ako A_k číslo, ktoré vznikne po zrotovaní cifier A o k pozícii, teda $A_k = \overline{a_{n-k-1} \dots a_1 a_0 a_{n-1} \dots a_{n-k}}$. Nájdite všetky A také, že každé A_k je deliteľné číslom A. (KMS 2022/23)

Úloha 15. Zistite, aká dlhá (počet cifier) je neperiodická časť desatinného zápisu $\frac{1}{n}$ v závislosti od n. (India 2015)

Úloha 16. Nech a, b sú také racionálne čísla, že dĺžka periódy v desatinnom zápise ab aj $a + b$ je T. Dokážte, že dĺžka periódy v zápisoch$a$, b nie je väčšia ako T. (Rusko 2006)

Úloha 17. Prirodzené číslo n nazveme *chutné*, ak pre ľubovoľné dve prirodzené čísla a, b také, že $a + b = n$ platí, že aspoň jeden zo zlomkov $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ má konečný desatinný rozvoj. Existuje nekonečne veľa chutných čísel?

Úloha 18. Miško napísal čísla 1/80!, 1/81!, …, 1/99! na 20 nekonečných kusov papiera ako desatinné zlomky (na poslednom je napísané: $\frac{1}{99!} = 0{,}00\dots0010715\dots$, 155 núl pred 1). Šošo chce z jedného z dielikov bez čiarky vyrezať N po sebe idúcich číslic. Pre ktoré maximálne N to môže urobiť tak, aby Miško nemohol uhádnuť, z ktorého dielika Šošo svoj útržok vystrihol? (Rusko 2007)

Úloha 19. Ak sú dané kladné celé čísla m a n, dokážte, že existuje kladné celé číslo c také, že čísla cm a cn majú rovnaký počet výskytov každej nenulovej číslice. (USAMO 2013)

Úloha 20. Pre každý $1 \leq i \leq 9$ a $T \in \mathbb{N}$ definujte $d_i(T)$ ako celkový počet výskytov číslice i pri zápise všetkých násobkov 1829 od 1 do T vrátane. Ukážte, že existuje nekonečne veľa $T \in \mathbb{N}$ takých, že medzi $d_1(T)$, $d_2(T)$, …, $d_9(T)$ sú presne dve rôzne hodnoty. (IMOSL 2022)

Úloha 21. Racionálne číslo nazveme *krátkym*, ak má vo svojom desatinnom rozšírení konečný počet číslic. Pre kladné celé číslo m hovoríme, že kladné celé číslo t je m-krátke, ak existuje číslo $c \in \{1, 2, 3, \dots, 2017\}$ také, že $\frac{10^t-1}{c \cdot m}$ je krátke, a také, že $\frac{10^k-1}{c \cdot m}$ nie je krátke pre ľubovoľné $1 \leq k < t$. Nech $S(m)$ je množina m-krátkych čísel. Uvažujme $S(m)$ pre $m = 1, 2, \dots$ Aký je maximálny počet prvkov v $S(m)$? (IMOSL 2017)

Konštrukčné úlohy

Cifry ponúkajú veľa priestoru na pekné úlohy, kedy máme rozhodnúť, či čísel s nejakou vlastnosťou je nekonečne alebo iba konečne veľa. Často sa pritom využijú iba čisto konštrukčné dôkazy. Využiteľné prístupy sú:

- „Experimentálne“: vymýšľanie konštrukcii s nejakými vlastnosťami, skúšanie vecí.
- „Obmedzovacie“: pridávanie obmedzení, čo môže zosilniť alebo zoslabiť úlohu ale môže uľahčiť dôkaz.

Oba tieto prístupy si často vyžadujú zručnosti v N-ku, aby ste mohli vyvodiť správne pozorovania. (Globálne to vyzerá ako riešenie C-čka, ale lokálne riešite N-ko.) Môže sa stať, že niekedy chcete využiť tvrdenie, ktoré je zjavne pravdivé ($n^2 + 1$ je nekonečne často prvočíslo), ale buď sa dá ťažko dokázať alebo je otvorené. Ak to neviete posúdiť, musíte skúsiť niečo iné. (Zatiaľ čo v kombinatorike sa jednoduché pravdivé tvrdenia zvyčajne ľahko dokazujú.)

Medzi osvedčené taktiky môže byť voľba čísla s veľa 0, deliteľmi alebo použiť Čínsku zvyškovú vetu alebo Eulerovu vetu. Najdôležitejšie je nebáť sa míňať prirodzenými číslami. Je ich dosť.

Úloha 22. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k existuje také prirodzené číslo n, že v zápise čísla 2^n sa nachádza blok práve k za sebou idúcich núl. (CPS 2006)

Úloha 23. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n existuje kladné celé číslo, ktoré má presne n číslic, žiadna z nich nie je 0 a toto číslo je deliteľné svojím ciferným súčtom. (IMOSL 1998)

Úloha 24. Nech $S(n)$ je ciferný súčet n. Dokážte, že existuje 2012 rôznych prirodzených čísel $n_1, \ldots, n_{2012}$ takých, že $S(n_1) + n_1 = \cdots = S(n_{2012}) + n_{2012}$. (India 2012)

Úloha 25. Kladné celé číslo n je *Mozartovo*, ak dekadická reprezentácia postupnosti $1, 2, \ldots, n$ obsahuje každú číslicu párny početkrát. Dokážte, že všetky Mozartove čísla sú párne a Mozartových čísel je nekonečne veľa. (MEMO 2016)

Úloha 26. Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n takých, že n^2 zapísané v 4-kovej sústave obsahuje iba číslice 1 a 2. (MEMO 2021)

Úloha 27. Kladné celé číslo nazývame *iKSkove*, ak vieme získať priemer číslic v dekadickom zápise tak, že za najľavejšiu číslicu vložíme desatinnú čiarku. Rozhodnite, či existuje len konečný počet *i*KSkových čísel . (MEMO 2022)

Úloha 28. Rozkývané číslo je také, v ktorom sa striedajú nulovú nenulové cifry, pri čom posledná cifra je nenulová. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nedelia žiadne rozkývané číslo. (IMOSL 1994)

Úloha 29. Striedavým číslom nazveme také prirodzené číslo, v ktorom každé dve susedné cifry majú rôznu paritu. Nájdite všetky prirodzené n, ktoré majú nejaký striedavý násobok. (IMO 2004)

Úloha 30. Pre prirodzené n definujeme $s(n)$ ako ciferný súčet n.Existuje kladná reálna konštanta c taká, že pre všetky prirodzené n máme $\frac{s(n)}{s(n^2)} \leq c$. (Argentína TST 2007)

„Bez cifier" a asymptotika

Ak sa zamyslíme nad definíciou ciferného zápisu tak nám môže pripomínať polynóm v premennej p, čo sa už vyskytlo v zopár úlohách.

Úloha 31. Rozhodnite, pre ktoré kladné celá čísla a, b splňujúce $a \geq 2b$ existuje nekonštantný polynóm $P(x)$ s koeficientami z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ splňujúci $P(b) \mid P(a)$. (iKS–13–N5)

Úloha 32. Alica si môže vybrať ľubovoľný polynóm $p(x)$ ľubovoľného stupňa s nezápornými celočíselnými koeficientmi. Bob sa môže spýtať na funkčnú hodnotu polynómu v ľubovoľnom bode. Na koľko najmenej otázok vie Bob určiť tento polynóm? (folklór)

Úloha 33. Hovoríme, že množina S celých čísel je koreňová, ak pre ľubovoľné kladné celé číslo n a ľubovoľné nenulové $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$ sú všetky celočíselné korene polynómu $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ tiež v S. Nájdite všetky koreňové množiny celých čísel, ktoré obsahujú všetky čísla tvaru $2^a - 2^b$ pre kladné celé čísla a a b. (IMOSL 2019)

V neposlednom rade vyskytujú sa často úlohy, kde je potrebné vhodne odhadnúť ciferný súčet analytickými ale aj číselno-teoretickými úvahami.

Tvrdenie. $S(n) \leq \lceil 9 \log_{10}(n) \rceil$.

Úloha 34. Určte $S(S(S(4444^{4444})))$. (IMO 1975)

Úloha 35. Pre ľubovoľné kladné celé číslo k označte súčet číslic k v jeho desiatkovej reprezentácii ako $S(k)$. Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s celočíselnými koeficientmi tak, že pre ľubovoľné celé kladné číslo $n \geq 2016$ $P(n)$ je kladné celé číslo a $S(P(n)) = P(S(n))$. (IMOSL 2016)

Úloha 36. Dokážte, že $S\left(2^{2^{2 \cdot 2023}}\right) > 2023$.

(Baltic Way 2023)

Úloha 37. Nech a_n je súčet číslic kladného celého čísla n a nech b_n je priemer a_1, a_2, …, a_n. Dokážte, že postupnosť b_1, b_2, … dosahuje všetky kladné celé čísla. (AOPS)

Literatura a zdroje

[1] Martin „Vodka“ Vodička: *Úlohy o cifrách*, zborník *i*KS, 2015.
[2] Evan Chen: *Construction NT*.
[3] http://www.artofproblemsolving.com

Hinty

Hint 1. Kritéria deliteľnosti.
Hint 2. Sporom. Aká nutne by bola tá 1 cifra?
Hint 3. Dirichlet.
Hint 4. Odpočítajte to ako na základnej škole.
Hint 5. Deliteľnosť 11.
Hint 6. Indukcia.
Hint 7. Indukcia.
Hint 8. Modulo 9.
Hint 9. Násobte ako na základnej škole.
Hint 10. Odinterpretujte kritérium deliteľnosti 2020 a kombinačné číslo, zvyšok je kombinatorika.
Hint 11. Pozrite sa na ciferný súčet $10N$.
Hint 12. Binárka.
Hint 13. Nie. Rozdiel dvoch štvorcov musí byť deliteľný $10k$. Dokážte, že sú nepárne a po čase deliteľné veľkou mocninou 5. Potom, ale boli aj na začiatku a už za chvíľu máte spor.
Hint 14. Vhodne si prepíšte zadanú podmienku do deliteľností.
Hint 15. Skúste cez nejakú deliteľnosť povedať, kedy má zlomok nejakú periodickú a nejakú neperiodickú časť.
Hint 16. Skúste cez nejakú deliteľnosť povedať, kedy má zlomok nejakú periodickú a nejakú neperiodickú časť.
Hint 17. Ukážte, že dostatočne veľké prvočísla nie sú chutné.
Hint 19. Skúste nájsť súvis s cvičeniami.
Hint 20. Skúste nájsť súvis s cvičeniami a pozrite sa na „precyklené“ čísla.
Hint 21. Horný odhad je jednoduchý. Na to, že funguje je dôležité sa pozrieť ako sa správa rád 10-ky u zložených čísel a následne urobiť nejaké odhady.
Hint 22. Aspoň k ich zvládnete, potom násobením odstráňte prebytočné.
Hint 23. Nech je jeho ciferný súčet 2^n.
Hint 24. Indukcia, pridávajte niečo na začiatok už nájdených čísel. Ideálne niečo, k čomu keď veľa prirátate, tak klesne ciferný súčet.
Hint 25. 220 a 22220 sú Mozartove čísla.
Hint 26. Induktívna konštrukcia.
Hint 27. Je ich konečne veľa. Zamyslite sa ako by ste také čísla konštruovali a čo musia spĺňať a urobte nejaké odhady.
Hint 28. . Hľadajte v peknom tvare, napr. $10101\ldots101$. Pre mocniny 2 riešte zvlášť a pre súčin nepárneho a mocniny 2 to nejako nakombinujte, lebo pre mocninu 2 sú podstatné len posledné cifry.
Hint 29. Rovnaký ako hint o jeden vyššie.
Hint 30. Nie. Po chvíli hrania by ste mohli prísť na čísla typu $5 \cdot 10^n - 1$. No problém je v tom, že aj po umocnení ostane veľa cifier 9. Skúste nahradiť nejaké cifry 9 ciframi 8, teda odčítať ďalšie mocniny 10. Umocnite a zariaďte, aby v druhej mocnine nevznikali 9, t.j. aby sa neodčítala 1 od cifry 0.
Hint 31. Trochu upravte deliteľnosti a polynóm.

Hint 32. Ide to na 2.
Hint 33. Uvažuj sústavu so základom $k \in S$.
Hint 34. Odhadneme logaritmom a modulo 9.
Hint 35. Skús dosadiť $n = 9 \cdot 10^e$.
Hint 36. Aké dlhé môžu byť 0-vé bloky.
Hint 37. Platí silnejšie ale ľahšie dokázateľné tvrdenie: Nech $(a_n)_{n\geq 1}$ je nerastúca postupnosť kladných celých čísel taká, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, kde $b_n = a_n/n$. Potom $(1/b_n)_{n\geq 1}$ dosiahne všetky kladné celé čísla.

Postupnosti

Martin Kopčány

Abstrakt. V matematických súťažiach sa často vyskytujú úlohy s postupnosťami, ktoré sa snažia byť čo najviac rôznorodé. Keď však vyriešime veľa úloh zameraných na postupnosti, získame potrebný cvik a intuíciu na správne myšlienky. Taktiež zistíme, že niektoré princípy sa pri riešení týchto úloh predsa len opakujú a keď sa stretneme druhýkrát s takouto úlohou, máme ju skoro zadarmo. Preto si v tomto príspevku ukážeme najčastejšie používané triky na postupnosti a taktiež veľa zaujímavých úloh.

Užitočné prístupy

- Vypísať si prvých pár členov a odpozorovať pattern.
- Indukcia.
- Vyjadriť n-tý člen explicitne.
- Upraviť si rekurentný vzorec do krajšieho tvaru.
- Zadefinovať si novú postupnosť, napr. $b_n = \frac{1}{a_n}$ ak rekurentný vzorec má zložitý menovateľ alebo keď obsahuje $\sqrt{\text{Výraz}(a_n)}$, tak $b_n = \sqrt{\text{Výraz}(a_n)}$.
- Pozrieť sa na diferencie alebo prefixové súčty

$$d_n = a_n - a_{n-1}, \qquad S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

- Pozrieť sa na najväčší/najmenší člen (prípadne ukázať, že sa rovnajú).
- Dokázať rastúcosť/klesajúcosť, periodickosť, skúmať podpostupnosti…

Příklad. Môžeme si všimnúť, že keď vyberieme každé druhé Fibonacciho číslo $1, 2, 5, 13, 34, \ldots$, tak spĺňajú lineárnu rekurenciu $F_{n+1} = 3F_n - F_{n-1}$ a zároveň kvadratickú rekurenciu $F_n^2 + 1 = F_{n-1}F_{n+1}$. Predstavme si, že by sme mali túto postupnosť zadanú len pomocou kvadratickej rekurencie $F_{n+1} = \frac{F_n^2+1}{F_{n-1}}$. Ako by sa z nej dala odvodiť tá pekná lineárna? Takto:

$$1 = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-2}F_n - F_{n-1}^2,$$
$$\frac{F_{n+1} + F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-2}}{F_{n-1}} = \frac{F_1 + F_3}{F_2} = 3.$$

Pozorování (Teleskopická suma). Občas sa hodí použiť nasledujúcu identitu:

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}).$$

Příklad.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} kk! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1.$$

Lemma (Abelova sumácia). Majme postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel. Označme $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Potom platí

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}).$$

Příklad. Majme prirodzené číslo n a postupnosť rôznych prirodzených čísel a_1, a_2, $\dots$, a_n. Ukážte, že platí:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(IMO 1978)

Zadefinujme si $A_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a všimnime si, že platí $A_k \geq 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, keďže a_1, a_2, $\dots$, a_k sú rôzne prirodzené čísla. Potom platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} &= \frac{A_n}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \\
&\geq \frac{n(n+1)}{2n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Manipulácie s rekurentne zadanými postupnosťami

Úloha 1. Nájdite všetky reálne čísla a_0 také, že postupnosť daná $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ pre $n \geq 0$ je rastúca. (Britská MO 1980)

Úloha 2. Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Dokážte, že pre všetky n platí

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 1.$$

(Rumunsko TST 2003)

Úloha 3. Nech postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ kladných reálnych čísel spĺňa

$$a_{k+1} \geq \frac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

pre všetky $k \geq 1$. Dokážte, že $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$ pre všetky $n \geq 2$.

(ISL 2015 A1)

Úloha 4. Postupnosť reálnych čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je daná rekurentne

$$a_0 = -1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Dokážte, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \geq 1$. (ISL 2006 A2)

Úloha 5. Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú dané predpisom $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ a pre všetky $n \geq 1$ platí

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}.$$

Dokážte, že $a_{2008} < 5$. (Rusko MO 2008)

Úloha 6. Majme postupnosť reálnych čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n$ definovanú vzťahom $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$ pre $1 \leq k \leq n$. Dokážte, že $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$. (Fínsko 1980)

Dokazovanie celočíselnosti

Úloha 7. Postupnosť je daná nasledovne:

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1} a_{n+2} + 5}{a_n}, \; n \in \mathbb{N} \qquad \text{a} \qquad a_1 = a_2 = 1, \; a_3 = 2.$$

Dokážte, že všetky členy tejto postupnosti sú celé čísla.

Úloha 8. Máme rekurentne danú postupnosť

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} - 3a_{n+1}a_n + 17a_n - 16}{3a_{n+1} - 4a_{n+1}a_n + 18a_n - 17}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

s počiatočnými hodnotami $a_0 = a_1 = 2$. Dokážte, že a_n tvaru $1 + \frac{1}{m^2}$ pre $n \in \mathbb{N}_0$, kde $m \in \mathbb{N}$.

Úloha 9. Nech $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$ a

$$Q_n(x) = \frac{(Q_{n-1}(x))^2 - 1}{Q_{n-2}(x)}$$

pre všetky $n \geq 2$. Ukážte, že ak n je prirodzené číslo, tak $Q_n(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami. (Putnam 2017 A2)

Úloha 10. Majme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ danú rekurentne:

$$a_1 = c, \qquad a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2 - 1)(a_n^2 - 1)}.$$

Dokážte, že ak c je prirodzené číslo, tak všetky členy postupnosti budú prirodzené. (KMS 16/17-Z3-10)

Úloha 11. Zistite, či existujú kladné celé čísla a, b také, že všetky členy postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_1 = 2010$, $x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}$$

sú celé čísla. (IberoAmerican MO 2010)

Úloha 12. Rozhodnite, či existuje nekonečná postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ prirodzených čísel, ktorá spĺňa

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

pre všetky prirodzené n. (EGMO 2015)

Abelova sumácia a nerovnosti

Úloha 13. Pre dve dané reálne postupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \quad \text{pre ľubovoľné } x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

je ekvivalentné s

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \text{a zároveň} \quad \sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i \quad \text{pre všetky } 1 \leq k \leq n-1.$$

Úloha 14. Nech $\{a_k\}_{k=1}^n$ a $\{b_k\}_{k=1}^n$ sú dve reálne postupnosti, pričom $\{a_k\}$ je nezáporná a klesajúca. Predpokladajme, že $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$ pre všetky k. Dokážte, že $\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n b_i^2$.

Ďalšie nerovnosti a rekurencie

Úloha 15. Máme postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$ nezáporných čísel. Pre všetky prirodzené m, n platí $a_{n+m} \leq a_n + a_m$. Potom dokážte

$$a_n \leq ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) a_n.$$

(Čína 1997)

Úloha 16. Postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$ spĺňa nerovnosť $|a_{k+m} - a_k - a_m| \leq 1$ pre všetky k, m. Dokážte, že pre všetky prirodzené k, m platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left|\frac{a_k}{k} - \frac{a_m}{m}\right| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{m}.$$

(Rakúsko-Poľsko 1980)

Úloha 17. Nech $a_1, a_2, a_3, \dots$ je postupnosť nezáporných reálnych čísel, pre ktorú platí $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0$ a $\sum_{j=1}^k a_j \leq 1$ pre všetky $k \geq 1$ Dokážte, že $0 \leq a_k - a_{k+1} \leq \frac{2}{k^2}$ pre $k \geq 1$. (ISL 1988)

Úloha 18. Pre postupnosť danú vzťahom $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n - na_n^2$ dokážte, že $a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{3}{2}$ pre všetky $n \geq 1$.

Úloha 19. Majme ohraničenú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ spĺňajúcu

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2007} \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Dokážte, že $a_n < \frac{1}{n}$ pre $n \geq 1$. (Čína MO 2007)

Úloha 20. Nech $\{a_k\}_{k=1}^n$ je postupnosť kladných reálnych čísel. Dokážte:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} < 2\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

Ľahšie zábavky

Úloha 21. Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ danú predpisom $a_n = \lfloor n\sqrt{2003} \rfloor$ pre všetky $n \geq 1$. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla m, p existuje m členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vytvárajúcich geometrickú postupnosť s kvocientom p.

(Rumunsko TST 2003)

Úloha 22. Postupnosť kladných celých čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná tak, že a_1 je ľubovoľné prirodzené číslo a pre $n \geq 1$ máme $a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$ ak a_n je deliteľné 5, $a_{n+1} = \lfloor a_n\sqrt{5} \rfloor$ ak a_n nie je deliteľné 5. Dokážte, že od nejakého člena je postupnosť rastúca.

(Rusko MO 2003)

Úloha 23. Nech $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ je neohraničená postupnosť celých čísel. Zaveďme postupnosť $\{b_n\}$, pričom $b_n = m$, ak a_m je prvý člen postupnosti väčší alebo rovný n. Je dané $a_{19} = 85$. Aká je najväčšia možná hodnota súčtu $a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{85}$? (USAMO 1985)

Úloha 24. Nech $a_1, a_2, \ldots$ je postupnosť celých čísel s nekonečne veľa kladnými členmi a nekonečne veľa zápornými členmi. Predpokladajme, že pre všetky prirodzené čísla n čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ majú n rôznych zvyškov po delení n. Dokážte, že každé celé číslo sa v postupnosti nachádza práve raz. (ISL 2005 N2)

Úloha 25. Postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je daná nasledovne: $x_0 = a$, $x_1 = 2$,

$$x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1 \quad \text{pre } n \geq 2.$$

Nájdite všetky celé čísla a také, že $2x_{3n} - 1$ je štvorec pre všetky $n \geq 1$.

(Baltic Way 2005)

Strednejšie príklady

Úloha 26. Postupnosť reálnych čísel $a_0, a_1, \ldots$ je daná nasledovne. Člen a_0 je ľubovoľné reálne číslo a pre $n \geq 0$ platí $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor \cdot \{a_n\}$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí najväčšie celé číslo menšie rovné od x a $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Dokážte, že $a_n = a_{n+2}$ pre všetky dostatočne veľké n. (ISL 2006 A1)

Úloha 27. Ukážte, že existuje nekonečná ohraničená postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že pre každé dve rôzne prirodzené čísla m, n platí $|a_m - a_n| \geq \frac{1}{m-n}$.

(Rusko MO 1978)

Úloha 28. Uvažujme postupnosť $x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}$ celých čísel a postupnosť $d_1, d_2, \dots, d_k$ prirodzených čísel za predpokladov

$$n_0 = d_1 > d_2 > \cdots > d_k \qquad \text{a} \qquad \mathrm{NSD}(d_1, d_2, \dots, d_k) = 1.$$

Pre všetky $n \geq n_0$ definujme

$$x_n = \left\lfloor \frac{x_{n-d_1} + x_{n-d_2} + \cdots + x_{n-d_k}}{k} \right\rfloor.$$

Dokážte, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je od niektorého člena konštantná.

(USA TST 2011)

Úloha 29. Máme danú postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pre všetky $1 \leq i \leq n$ definujme

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}$$

a nech $d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

(a) Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ platí

$$\max\left\{|x_i - a_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\} \geq \frac{d}{2}. \tag{$*$}$$

(b) Ukážte, že existujú také reálne čísla $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, že v $(*)$ nastáva rovnosť.

(IMO 2007 P1)

Úloha 30. Nech $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel. Ukážte, že existuje práve jedno prirodzené číslo n, pre ktoré platí

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

(IMO 2014 P1)

Úloha 31. Postupnosť prirodzených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje všetky prirodzené čísla aspoň raz. Pre každé dve rôzne prirodzené čísla m, n postupnosť spĺňa

$$\frac{1}{1998} < \left|\frac{a_n - a_m}{n - m}\right| < 1998.$$

Dokážte, že $|a_n - n| < 2000000$ pre všetky prirodzené n.

(Rusko MO 1999)

Ťažšie a zaujímavé úlohy

Úloha 32. Postupnosť $x_1, x_2, \dots$ je definovaná ako $x_1 = 1$ a $x_{2k} = -x_k$, $x_{2k+1} = (-1)^{k+1}x_k$ pre $k \geq 1$. Dokážte, že

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$$

pre všetky $n \geq 1$. (ISL 2010 A4)

Úloha 33. Predpokladajme, že postupnosti $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ a $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ reálnych čísel spĺňajú nasledujúce podmienky:

(i) $a_i + a_{i+1} \geq 0$ pre $0 \leq i \leq 2n-1$,

(ii) $a_{2j+1} \leq 0$ pre $0 \leq j \leq n-1$,

(iii) $\sum_{k=2p}^{2q} b_k \geq 0$ pre všetky $0 \leq p \leq q \leq n$.

Dokážte, že $\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i a_i b_i \geq 0$ a zistite, kedy nastáva rovnosť. (Čína TST 2010)

Úloha 34. Pre prirodzené n máme danú postupnosť $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$, kde $\varepsilon_i = 0$ alebo $\varepsilon_i = 1$. Ďalej sú dané postupnosti $a_0, \dots, a_n$, $b_0, \dots, b_n$ spĺňajúce $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = b_1 = 7$,

$$a_{i+1} = \begin{cases} 2a_{i-1} + 3a_i, & \text{ak } \varepsilon_i = 0, \\ 3a_{i-1} + a_i, & \text{ak } \varepsilon_i = 1, \end{cases} \qquad \text{pre všetky } i = 1, \dots, n-1,$$

$$b_{i+1} = \begin{cases} 2b_{i-1} + 3b_i, & \text{ak } \varepsilon_{n-i} = 0, \\ 3b_{i-1} + b_i, & \text{ak } \varepsilon_{n-i} = 1, \end{cases} \qquad \text{pre všetky } i = 1, \dots, n-1.$$

Dokážte $a_n = b_n$. (ISL 2009 C3)

Úloha 35. Nech $a_1, a_2, \dots$ je postupnosť reálnych čísel a s je prirodzené číslo, pričom platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\} \quad \text{pre všetky } n > s.$$

Ukážte, že existujú prirodzené čísla $l \leq s$ a N také, že $a_n = a_l + a_{n-l}$ pre všetky $n \geq N$. (IMO 2010 P6)

Úloha 36. Predpokladajme, že $s_1, s_2, s_3, \dots$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel, ktorej podpostupnosti

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{aj} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

sú obe aritmetické postupnosti. Dokážte, že postupnosť $s_1, s_2, s_3, \dots$ je sama o sebe aritmetická postupnosť. (IMO 2009 P3)

Literatura a zdroje

Tento príspevok je kópiou príspevku Tomáša Sásika z *i*KS 2020 zborníku.

[1] Tomáš Sásik: *Postupnosti*, zborník *i*KS, 2020.

Hinty

Hint 1. Vyjadrite n-tý člen explicitne.
Hint 2. Uvažujte postupnosť prevrátených hodnôt. Indukciou ukážte súčet. (Dokonca je to „známa“ Sylvestrova postupnosť.)
Hint 3. Z nerovnosti v zadaní odhadnite člen a_k nejakým výrazom tak, aby sa dala použiť teleskopická suma. ($\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \implies \frac{d}{c} \geq \frac{b}{a}$)
Hint 4. Zoberme si dve po sebe idúce rekurencie zo zadania a chceli by sme sa nejako zbaviť jediného záporného člena a_0.
Hint 5. Skombinovať postupnosti / zadefinovať si jednoduchšie post. Je výhodné mať rovnaké menovatele.
Hint 6. $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = ?$
Hint 7. Vyjadriť konštantu 5 dvomi spôsobmi, porovnať a upraviť do vhodného tvaru pre získanie jednoduchšej rekurencie.
Hint 8. Zoberme postupnosť m-iek, tipnime rekurenciu a dokážme indukciou.
Hint 9. Rovnako ako úloha 7.
Hint 10. Výraz pod odmocninou vyjadríme pomocou predchádzajúceho člena.
Hint 11. Výraz pod odmocninou vyjadríme pomocou predchádzajúcich členov. Iný postup: rovnicu prenásobíme vhodným členom.
Hint 12. Zbaviť sa odmocniny, deliteľnosť.
Hint 13. Abelova sumácia.
Hint 14. Abelova sumácia + Cauchy-Schwarzova nerovnosť.
Hint 15. Označme $n = km + r$, využite $a_{pq} \leq pa_q$.
Hint 16. Prenásobme km, potom indukcia trebárs na súčet $k + m$.
Hint 17. Uvažujte postupnosť diferencií. Môže sa hodiť $\frac{k^2}{2} \leq \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + k$.
Hint 21. $a_{np} \approx pa_n$.
Hint 22. Ako vyzerá a_{n+2}, keď je post. rastúca?
Hint 23. Čo sa stane, keď zväčšíme niektorý člen o 1?
Hint 24. Čo sa stane, keď sa niektoré dva členy zo začiatku postupnosti líšia o veľa?
Hint 25. Pomôže dvojnásobné použitie rekurencie. Pre jednoduchšiu prácu je vhodné zadefinovať mierne inú postupnosť.
Hint 26. Uvažujte postupnosť $\lfloor a_n \rfloor$, následne post. $\{a_n\}$.
Hint 27. Stačí nájsť tak, aby platilo $|a_m - a_n| \geq \frac{c}{m-n}$ pre ľubovoľnú konštantu c: Aritmetická s diferenciou $\sqrt{2}$.
Hint 28. Dokážte, že je periodická.
Hint 29. Čo zač je vlastne d?
Hint 30. Pozrite sa na $\sum_{k=0}^{n} a_k - na_n$.
Hint 31. Dokážte, že ak $m > n$ a $a_m \leq a_n$, tak $m - n < 2000000$.
Hint 32. Zosumujte prvých $4k$ členov, potom použite indukčný predpoklad.
Hint 33. Predefinujte si a-čka na kladné. Použiť Abelovu sumáciu na prvých k členov + silná indukcia. Iný prístup: modifikovať postupnosť a-čiek pomocou najmenšieho + silná indukcia.
Hint 34. Chceli by sme vzťah medzi a-čkami a b-čkami bez ε. Máme dve rovnice, takže jednej premennej sa vieme zbaviť. Potom teleskopicky sčítať a ono to vyjde.

Hint 35. Uvažujme postupnosť $b_n = a_n - n\frac{a_l}{l}$, ktorá spĺňa pôvodnú rekurenciu. Jej podpostupnosti $\{b_{kl+r}\}$ sú záporné, neklesajúce, a preto nadobúdajú len konečne veľa hodnôt.
Hint 36. Dokážte, že postupnosť diferencií je konštantná, lebo je ohraničená a maximum sa rovná minimu.

Pravděpodobnostní metoda

Josef Minařík

Abstrakt. Nejdříve si zopakujeme základy teorie pravděpodobnosti a potom si ukážeme, jak můžeme s její pomocí něco dokázat. Zjistíme, že se občas vyplatí využít pravděpodobnost i v případech, kdy se v zadání úlohy nic náhodného neobjevuje.

Definice

V této části si zadefinujeme několik základních pojmů z teorie pravděpodobnosti. Většinu z nich asi znáš, ale může se hodit si některé z nich zopakovat. Zadefinujeme si jenom konečné pravděpodobnostní prostory, protože nám na skoro všechno budou stačit. Diskrétní prostory (které můžou být nekonečné) fungují ve většině ohledů stejně, jenom je potřeba si dát pozor na nějaké technické detaily. Se spojitými prostory je to ještě o něco složitější, ale obvykle stačí napsat místo sumy integrál a všechno víceméně funguje.

Definice. *Pravděpodobností prostor* je dán konečnou *množinou elementárních jevů* Ω a funkcí $\mathrm{P} : \Omega \to \mathbb{R}^+$ splňující

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega) = 1.$$

Definice. *Jev* A je podmnožina množiny elementárních jevů Ω. *Pravděpodobnost* jevu A definujeme jako

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathrm{P}(\omega).$$

Definice. Jevy A a B nazveme *nezávislé*, jestliže $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

Definice. *Náhodná veličina* je funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Každému elementárnímu jevu tedy přiřadíme reálné číslo.

Definice. *Střední hodnota* náhodné veličiny X je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathrm{P}(\omega).$$

Definice. Indikátor jevu A je náhodná veličina I_A, která nabývá hodnoty 1 v případě, že A nastane, a hodnoty 0 jinak.

Základní nástroje

V této sekci je zmíněno několik triviálních pozorování a tvrzení, která budeme potřebovat k řešení většiny úloh.

Pozorování. Jestliže má jev nenulovou pravděpodobnost, musí někdy nastat.

Pozorování. Jestliže pro reálné číslo a a náhodnou veličinu X platí $\mathbb{E}(X) \geq a$, veličina X musí někdy nabývat hodnoty aspoň a.

Tvrzení (union bound). Pro jevy $A_1, \ldots, A_n$ platí

$$\mathrm{P}\left(\bigcup A_i\right) \leq \sum \mathrm{P}(A_i).$$

Pozorování. Pro jev A a jeho indikátor I_A platí $\mathbb{E}(I_A) = \mathrm{P}(A)$.

Tvrzení (linearita střední hodnoty).

- Pro náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ platí

$$\mathbb{E}\left(\sum X_i\right) = \sum \mathbb{E}(X_i).$$

- Pro reálné číslo a a náhodnou veličinu X platí

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X).$$

Může se hodit

Následující tvrzení mohou být užitečná v některých úlohách.

Definice. Náhodné veličiny X a Y jsou *nezávislé*, jestliže pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{P}(X \leq x \wedge Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq x) \cdot \mathrm{P}(Y \leq y).$$

Tvrzení. Pro nezávislé náhodné veličiny X a Y platí

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

Tvrzení (Markovova nerovnost). Pro kladné reálné a a nezápornou náhodnou veličinu X platí

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Tvrzení (Lovászovo lokální lemma). Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou náhodné jevy s pravděpodobností nejvýše p. Dále nechť je každý jev A_i závislý na nejvýše d jiných. Pokud $ep(d+1) \leq 1$, pak je pravděpodobnost, že nenastane žádný z jevů A_i, nenulová.

Spíš se nebude hodit, ale je to zajímavé

Tyhle věty už jsou trochu silnější, ale pro většinu olympiádních úloh nejsou potřeba nebo je jejich použití zbytečně složité.

Definice. *Rozptyl* náhodné veličiny X je

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Tvrzení. Pro nezávislé náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ platí

$$\mathrm{Var}\left(\sum X_i\right) = \sum \mathrm{Var}(X_i).$$

Tvrzení (Čebyševova nerovnost). Pro kladné reálné a a náhodnou veličinu X s konečným rozptylem platí

$$\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Tvrzení (Chernoffova nerovnost). Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny nabývající pouze hodnot 0 a 1. Označme $X = \sum X_i$. Potom pro všechna nezáporná reálná a platí

$$\mathrm{P}(X \geq \mathbb{E}(X) + a) < e^{-\frac{a^2}{2(\mathrm{Var}(X) + a/3)}}.$$

Příklady

Příklad. Mějme množinu M a nějaký systém jejích k-prvkových podmnožin S. Dokaž, že pro $|S| < 2^{k-1}$ je možné M obarvit dvěma barvami tak, aby žádná podmnožina nebyla jednobarevná.

Řešení. Množinu M obarvíme náhodně (každý prvek má první barvu s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Každá podmnožina z S má pravděpodobnost 2^{1-k}, že bude jednobarevná. Pravděpodobnost, že žádná z nich není jednobarevná je podle union boundu tedy aspoň $1 - |S| \cdot 2^{1-k} > 0$.

Příklad. Dokaž, že každý graf obsahuje bipartitní podgraf s aspoň polovinou hran.

Řešení. Mějme graf $G = (V, E)$, a uvažme náhodné rozdělení vrcholů do množin V_1 a V_2. Pravděpodobnost, že hrana $e = \{u, v\}$ povede mezi množinami V_1 a V_2, je $\frac{1}{2}$. Nyní uvážíme pro každou hranu $e \in E$ indikátor I_e, jeho střední hodnota je $\frac{1}{2}$. Z linearity střední hodnoty potom platí

$$\mathbb{E}\left(\sum I_e\right) = \frac{|E|}{2}$$

a tvrzení je dokázáno.

Příklad. Mějme množinu M a nějaký systém jejích k-prvkových podmnožin S. Dokaž, že pokud se každý prvek $m \in M$ vyskytuje v nejvýše $\frac{2^{k-3}}{k}$ množinách, lze M obarvit dvěma barvami tak, aby žádná podmnožina z S nebyla jednobarevná.

Řešení. Množinu M obarvíme náhodně, nechť A_R je jev značící jednobarevnost $R \in S$. Zjevně $\mathrm{P}(A_R) \leq 2^{1-k}$, označme p, a závisí na méně než 2^{k-3}, označme d, dalších jevech. Platí $ep(d+1) = \frac{e}{4} < 1$, takže tvrzení platí z Lovászova lokálního lemmatu.

Příklad. Pro všechna přirozená m dokaž

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{2^{2m-1}}{2\sqrt{m}+1}.$$

Řešení. Označme X součet $2m$ nezávislých náhodných veličin nabývajících hodnot 0 a 1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Platí $\mathbb{E}(X) = m$ a $\mathrm{Var}(X) = \frac{m}{2}$. Podle Čebyševovy nerovnosti

$$P(|X - m| < \sqrt{m}) \geq \frac{1}{2}.$$

Dostáváme, že součet prostředních $2\lfloor\sqrt{m}\rfloor + 1$ kombinačních čísel je aspoň 2^{2m-1}, takže jsme hotovi, protože $\binom{2m}{m}$ je největší z nich.

Rozcvička

V této sekci najdeš několik jednoduchých úloh. Pokud ses už s pravděpodobností a střední hodnotou setkal(a) někdy dřív, klidně je přeskoč.

Cvičení. Máme dokonale náhodně zamíchaný balíček 52 karet a postupně otočíme 5 karet z vrchu balíčku. Jaká je pravděpodobnost, že 4. otočená karta bylo eso?

Cvičení. Hoďme n krát spravedlivou mincí, jaká je pravděpodobnost, že padne lichý počet orlů?

Cvičení. Majda hodila n krát spravedlivou mincí, Lenka $n+1$ krát. Jaká je pravděpodobnost, že Lence padl orel víckrát než Majdě?

Cvičení. Dokaž, že střední hodnota počtu pevných bodů v náhodné permutaci je 1.

Cvičení. Pomocí linearity střední hodnoty nahlédni

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = \frac{n}{2} \cdot 2^n$$

Cvičení. Dokaž, že házíme-li mincí, na které padá panna s pravděpodobností $p > 0$, než poprvé padne panna, je střední hodnota počtu hodů rovna $\frac{1}{p}$.

Úlohy

Úlohy by v jednotlivých sekcích měly být seřazeny (velmi subjektivně) podle obtížnosti.

Standardní pravděpodobnostní metoda

Úloha 1. V jazykové škole je 500 učitelů, kteří vyučují dohromady $2n$ jazyků, přičemž každý učitel ovládá alespoň n jazyků. Ukaž, že můžeme vybrat nejvýše 14 jazyků tak, aby každý učitel mluvil alespoň jedním z nich.

Úloha 2. Je dána množina M a systém jejích k-prvkových podmnožin S, kde $|S| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^k$. Dokaž, že je možné množinu M rozdělit na M_1 až M_4 tak, aby všechny podmnožiny v S měly neprázdný průnik s množinami M_1 až M_4.

Úloha 3. V matematické soutěži řešilo 200 studentů šest úloh. Víme, že každou úlohu vyřešilo alespoň 120 studentů. Dokaž, že můžeme vybrat dvojici studentů tak, aby dohromady vyřešili všechny úlohy.

Úloha 4. Na školní výlet jede 90 dětí, přičemž každé z nich má alespoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokaž, že děti můžeme rozdělit do tří 30-členných skupin tak, že každé dítě bude mít ve své skupince alespoň jednoho kamaráda.

Úloha 5. Dokaž, že v grafu na $2^{\frac{n}{2}-1}$ vrcholech nemusí existovat klika ani nezávislá množina velikosti n.

Úloha 6. Mějme množinu M. Pepa, Radek, Matěj a Lenka si každý obarvili její prvky červeně, modře a zeleně. Dokaž, že se někteří dva orgové shodli na obarvení aspoň šestiny prvků.

Úloha 7. Dokaž, že můžeme prvky množiny $\{1, \dots, 1987\}$ obarvit čtyřmi barvami tak, aby žádná aritmetická posloupnost o 10 prvcích nebyla jednobarevná.

(Shortlist 1987)

Úloha 8. Nechť X je množina posloupností 0 a 1, kde žádná není prefixem jiné. Dokaž, že

$$\sum_{p \in X} \frac{1}{2^{|p|}} \leq 1,$$

kde $|p|$ značí délku posloupnosti p.

Úloha 9. Nechť A je množina n zbytků modulo n^2. Dokaž, že existuje n-prvková množina zbytků B taková, že

$$\left|\left\{a + b \bmod n^2 \mid a \in A, b \in B\right\}\right| \geq \frac{1}{2} n^2.$$

(Shortlist 1999 C4)

Úloha 10. Dokaž, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje neprázdná množina bodů v rovině taková, že libovolný její bod má vzdálenost 1 od právě n jiných bodů.

(IMO 1971)

Úloha 11. Dokaž, že v grafu na n vrcholech s průměrným stupněm d existuje nezávislá množina velikosti aspoň $\frac{n}{2d}$.

Úloha 12. Řekneme, že permutace množiny $\{1, \dots, 2n\}$ je *roztomilá*, pokud se některé dva po sobě jdoucí prvky liší právě o n. Ukaž, že roztomilých permutací je alespoň tolik co neroztomilých. (IMO 1989)

Úloha 13. Množinu nazveme *bezsoučtovou*, pokud v ní neleží součet žádných dvou jejích prvků. Dokaž, že pro každou množinu přirozených čísel A existuje její bezsoučtová podmnožina $B \subseteq A$ splňující $|B| > \frac{|A|}{3}$. (USA TST 2001)

Střední hodnota

Úloha 14. Dokaž, že graf na $2n$ vrcholech a m hranách obsahuje bipartitní podgraf o aspoň $m \cdot \frac{n}{2n-1}$ hranách.

Úloha 15. Nechť $p_n(k)$ značí počet permutací na n prvcích s právě k pevnými body. Dokaž, že

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

(IMO 1987)

Úloha 16. Dokaž, že umíme vrcholy grafu obarvit třemi barvami tak, aby nejvýše třetina hran vedla mezi vrcholy stejné barvy.

Úloha 17. Ukaž, že existuje obarvení úplného grafu na n vrcholech, které obsahuje nejvýše

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

jednobarevných úplných podgrafů na k vrcholech.

Úloha 18. Nechť je dán bipartitní graf, jehož obě partity mají n vrcholů, s aspoň $n^2 - n + 1$ hranami. Dokaž, že v něm existuje perfektní párování.

Úloha 19. Dokaž, že existuje orientovaný úplný graf (turnaj) na n vrcholech, kde je aspoň $\frac{n!}{2^{n-1}}$ orientovaných hamiltonovských cest.

Úloha 20. Tulák má kabát o povrchu 1 a na něm pět záplat o obsahu $\frac{1}{2}$. Ukaž, že se některé dvě záplaty musí překrývat na oblasti obsahem alespoň $\frac{1}{5}$.

Úloha 21. Mějme $n > 1$ reálných čísel, jejichž součet je nula, a zároveň je alespoň jedno z nich nenulové. Ukaž, že je můžeme označit $a_1, \ldots, a_n$ tak, aby platilo $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 < 0$. (BAMO 2004)

Úloha 22. Na Matfyzu se sešlo n informatiků a matematiků, přičemž každý matematik zná alespoň jednoho informatika. Ukaž, že můžeme vybrat takovou skupinu matfyzáků o velikosti alespoň $\frac{n}{2}$, aby uvnitř ní každý matematik znal lichý počet informatiků. (MKS 38-2s-3)

Úloha 23. Dokaž, že pro komplexní čísla $z_1, \ldots, z_n$ splňující $\sum |z_i|^2 = 1$ existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$ taková, že

$$\left| \sum \alpha_i z_i \right| \leq 1.$$

(Rumunsko 2004)

Úloha 24. Nechť jsou $v_1, \dots, v_n$ vektory z $\mathbb{R}^n$ délky 1. Dokaž, že existují $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$ takové, že

$$\left|\sum \alpha_i v_i\right| \leq \sqrt{n}.$$

Nerovnosti

Úloha 25. Ve Wonkově továrně na čokoládu je na výběr ze 320 příchutí čokolády. Při procházce továrnou si každé z pěti dětí smělo ochutnat 160 příchutí. Protože bylo naspěch, každé dítě si vybralo náhodných 160 příchutí nezávisle na ostatních dětech. Dokaž, že příchutí, které si žádné dítě nevybralo, je alespoň dvacet s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

Úloha 26. Kuba se živí psaním scénářů romantických seriálů. Právě píše scénář, ve kterém je deset postav, přičemž pro každou dvojici z nich si Kuba hodil férovou mincí, aby se rozhodl, zda se do sebe daní dva lidé zamilují. Jeden člověk tak může být zamilován do libovolného počtu jiných lidí. Každí tři různí lidé, kteří se do sebe navzájem zamilují, tvoří milostný trojúhelník. Dokažte, že počet milostných trojúhelníků je alespoň 30 s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

(MKS 38-3s-2)

Úloha 27. V počátku souřadnicové soustavy je 4^n prasátek. Každé z nich udělá n kroků, v jednom kroku se prasátko pohne o 1 v jednom ze čtyř základních směrů. Každá dvě prasátka provedou jinou posloupnost kroků. Dokaž, že existuje $n \geq 1$ takové, že 99% prasátek skončí ve čtverci o straně $0.01n$ se středem v počátku.

Úloha 28. Dokaž, že pro nezápornou náhodnou veličinu X platí

$$\mathrm{P}(X = 0) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}.$$

Úloha 29. PraSestán má n^2 obyvatel a zrovna probíhají volby. Bude zvoleno nejvýše n hlavních PraSat, volby probíhají následovně. Každé PraSe napíše tajně na papír číslo od 1 do n. Zvoleni budou všichni, kdo napsali nejméně časté číslo (pokud je nejméně častých čísel více, vybere se z nich jedno náhodně). Bohužel se desetina obyvatel rozhodla, že bude podvádět, a předem se domluvila, jaké číslo kdo z nich napíše. Dokaž, že je nepravděpodobné (s rostoucím n jde pravděpodobnost do 0), že bude podvodníci budou tvořit více než pětinu hlavních PraSat.

Lovászovo lokální lemma

Úloha 30. Dokaž, že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje obarvení čísel 1 až $c \cdot \frac{2^k}{k}$ dvěma barvami neobsahující jednobarevnou aritmetickou posloupnost délky k.

Úloha 31. Na jednotkové kružnici je vybráno $11n$ různých bodů. Jsou obarveny n barvami tak, že každá barva je použita právě jedenáctkrát. Dokaž, že umíme vybrat jeden bod od každé barvy tak, aby žádné dva vybrané body nesousedily.

Úloha 32. Je dán graf, kde mají všechny vrcholy stupeň aspoň 50 a nejvýše 100. Dokaž, že tento graf lze obarvit 100 barvami tak, aby sousedé libovolného vrcholu měli aspoň 20 různých barev.

Úloha 33. Nechť je dán orientovaný graf s minimálním výstupním stupněm δ a maximálním vstupním stupněm Δ. Dokaž, že pro

$$k \leq \frac{\delta}{1 + \ln(1 + \delta\Delta)}$$

v našem grafu existuje orientovaný cyklus, jehož délka je násobkem k.

Literatura a zdroje

[1] Evan Chen; *Expected Uses of Probability*, 2014.
[2] Danil Koževnikov, Vašek Rozhoň; *Pravděpodobnost*, PraSečí seriál, 2018/2019.
[3] Noga Alon, Joel H. Spencer; *The Probabilistic Method*, 2000.
[4] Ravi Boppana; *Unexpected Uses of Probability*, 2005.

Hinty

Hint 1. Vyber nezávisle 14 jazyků.
Hint 2. Uvaž náhodné rozdělení a ukaž, že je s nenulovou pravděpodobností dobré.
Hint 3. Vyber náhodnou dvojici studentů a ukaž, že s nenulovou pravděpodobností vyřešili všechny úlohy.
Hint 4. Jaká bude pravděpodobnost, že dítě nemá ve své skupince kamaráda, pokud skupinky vytvoříme náhodně?
Hint 5. Uvaž náhodný graf, potom použij triviální odhad na kombinační čísla.
Hint 6. Na barvě každého prvku se shodli aspoň 2 lidé.
Hint 7. Uvaž náhodné obarvení, jaká je pravděpodobnost, že je daná aritmetická posloupnost jednobarevná?
Hint 8. Vygeneruj náhodnou posloupnost 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že je nějaký prvek X jejím prefixem?
Hint 9. Prostě do B hladově přidávej prvky (vždycky uvaž náhodný).
Hint 10. Uvaž náhodnou množinu vektorů na jednotkové kružnici a součty podmnožin.
Hint 11. Vyber náhodně nějakou větší množinu a pak z ní něco smaž.
Hint 12. Jaká je pravděpodobnost, že se číslo na pozici i a $i+1$ liší o n? Spočítej to samé pro dvě různé pozice a použij maličkou inkluzi a exkluzi.
Hint 13. Modulo prvočíslem tvaru $3k+2$ je $\{k+1,\ldots,2k+1\}$ bezsoučtová. Co takhle prvky A něčím vynásobit?
Hint 14. Postupuj podobně jako v ukázkové úloze, ale uvaž jiné náhodné rozdělení.
Hint 15. Použij cvičení.
Hint 16. Rozděl to náhodně a použij střední hodnotu.
Hint 17. Spočítej střední hodnotu počtu jednobarevných klik.
Hint 18. Co když vrcholy prostě popárujeme náhodně? Jaká bude střední hodnota počtu párů, mezi kterými povede hrana?
Hint 19. Uvaž náhodný turnaj a sečti indikátory přes všechny permutace.
Hint 20. Odhadni střední hodnotu veličiny „počet záplat nad dvěma" v náhodném bodě.
Hint 21. Uvažuj náhodnou permutaci. Jaká potom bude střední hodnota a_1a_2? Výraz $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$ může být zajímavý.
Hint 22. Náhodně vyber informatiky a potom doplň matematiky.
Hint 23. Vyber α_i náhodně, uvaž čtverec levé strany a využij $|z|^2 = z\overline{z}$.
Hint 24. Může se hodit $|\sum u_i|^2 = \sum\sum u_i \cdot u_j$. Zvol α_i náhodně a spočítej střední hodnotu čtverce délky jejich součtu.
Hint 25. Markovova nerovnost, jaká je střední hodnota počtu nevybraných příchutí?
Hint 26. Markovova nerovnost, kolik je tam ve střední hodnotě trojúhelníků?
Hint 27. Použij Čebyševovu nerovnost v obou směrech.
Hint 28. Čebyševova nerovnost pro vhodnou veličinu.
Hint 29. Čebyševova nerovnost pro vhodnou veličinu.
Hint 30. Použij LLL.
Hint 31. Jako špatné jevy použij, že jsou vybrané body i a $i+1$.
Hint 32. Použij LLL a odhadni kombinační čísla.
Hint 33. Graf obarvi náhodně barvami 1 až k, co budou špatné jevy?

Podobnosti spirální i jiné

Majda Mišinová

Abstrakt. V geometrii umíme měřit velikosti úhlů a délky úseček. Podobné trojúhelníky umí vzít informace o úhlech a vrátit informaci o úsečkách a naopak. V této přednášce nebude moc teorie, spíš počítejte s hodně počítáním. Samozřejmě by to nebyla přednáška o podobnostech, kdyby se nezmínila spirální podobnost.

Podobnosti všelijaké

Když nebudeš vědět, co dělat, můžeš zkusit:

a) úhlit a vyjadřovat si poměry délek,
b) dokreslit nějaký bod, aby vznikly podobné trojúhelníky,
c) zamyslet se nad tím, jaká podobnost nebo shodnost by ti pomohla úlohu vyřešit.

Úloha 1. Mějme čtverec $ABCD$ o délce strany 1. Na stranách BC a CD leží postupně body E a F splňující $|\angle EAF| = 45°$. Dokažte, že obvod trojúhelníku ECF je 2. (PraSe 41–3p–6)

Úloha 2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|BC| = |AD|$ a $AB \nparallel CD$. Označme M a N postupně středy stran BC a AD. Dokažte, že osy úseček AB, CD a MN prochází jedním bodem.

Úloha 3. Lichoběžník $ABCD$ splňuje $BC \parallel AD$ a $|\angle CBA| = 90°$. Na straně AB leží bod M takový, že $|\angle CMD| = 90°$. Dále AK a BL jsou postupně výšky v trojúhelnících AMD a BMC. Dokažte, že se přímky AK, BL a CD protínají v jednom bodě.

Úloha 4. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Na polopřímkách AD a AB leží postupně body P, Q tak, že $|AP| = |BC|$ a $|AQ| = |CD|$. Dokažte, že přímka AC půlí úsečku PQ.

Úloha 5. Nechť je ABC rovnoramenný trojúhelník s $|AB| = |AC|$. Na polopřímce opačné k CB leží bod D a přímka AD protíná kružnici opsanou ABC podruhé v bodě K. Bod E je umístěn tak, aby $ACDE$ byl rovnoběžník. Kružnice, která se dotýká AB v bodě A a DE v bodě E, protíná přímku AD podruhé v bodě L. Dokažte, že $|AK| = |DL|$. (PraSe 40–3j–5)

Úloha 6. Na stranách AB a AD kosočtverce $ABCD$ leží body E a F takové, že $|AE| = |DF|$. Průsečík BC a DE označíme P, průsečík CD a BF označíme Q. Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce. (Rumunsko 2004)

Úloha 7. V trojúhelníku ABC označme M, N, P po řadě středy stran BC, CA, AB a G jeho těžiště. Nechť kružnice opsaná trojúhelníku BGP protíná přímku MP v bodě K různém od P a kružnice opsaná trojúhelníku CGN protíná přímku MN v bodě L různém od N. Dokažte, že $|\angle BAK| = |\angle CAL|$. (MO 72–A–III–5)

Úloha 8. Nechť ABC je takový ostroúhlý trojúhelník, že $|AB| < |AC|$. Osa strany BC protíná stranu AC v bodě D. Na kratším oblouku AC kružnice opsané trojúhelníku ABC leží bod P takový, že $DP \parallel BC$. Střed strany AB označme M. Dokažte, že $|\angle APD| = |\angle MPB|$. (MEMO 2019–T–5)

Úloha 9. Zkonstruuj trojúhelník, máš-li zadané délky dvou jeho stran a těžnici na třetí stranu.

Úloha 10. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\angle PAB| = |\angle BCA|$ a $|\angle CAQ| = |\angle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (IMO 2014–P4)

Úloha 11. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Na základně BC zvolme libovolný bod X. Dále nechť Y, Z jsou body po řadě na stranách AB, AC splňující $|\angle BXY| = |\angle CXZ|$. Rovnoběžka s YZ procházející bodem B protne úsečku XZ v bodě T. Ukažte, že trojúhelník ABC je osově souměrný podle přímky AT. (PraSe 40–2p–6)

Úloha 12. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC na jehož základně BC leží takový bod D, že $|BD| < |CD|$. Bod symetrický s B podle přímky AD označíme E. Dokažte

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|CD| - |BD|}.$$

(Polsko 2008)

Úloha 13. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník takový, že $|BC| < |AB|$ a $|BC| < |CA|$. Body P a Q různé od B a C leží postupně na stranách AB a AC tak, že $|BQ| = |BC| = |CP|$. Střed kružnice opsané trojúhelníku APQ označíme T, průsečík výšek trojúhelníku ABC označíme H. Přímky BQ a CP se protínají v bodě S. Dokažte, že T, H a S leží na jedné přímce. (EGMO 2022–P1)

Úloha 14. Bod D leží na straně BC ostroúhlého trojúhelníku ABC. Body E, F ležící ve stejné polorovině od BC jako A splňují $DE \perp BE$, $CF \perp DF$, DE je tečna kružnice opsané ACD a DF je tečna kružnice opsané ABD. Dokažte, že A, D, E, F leží na jedné kružnici. (MEMO 2021–I–3)

Úloha 15. Nechť Ω je kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Těžnice z B a C postupně protínají Ω v D a E. Tečny k Ω v bodech D a E postupně protínají AC a AB v X a Y. Dokažte, že XY je tečna Ω. (MEMO 2022–T–5)

Úloha 16. Kružnice procházející vrcholem A rovnoběžníku $ABCD$ protíná úsečky AB, AC, AD postupně v bodech P, Q, R. Dokažte $|AP| \cdot |AB| + |AR| \cdot |AD| = |AQ| \cdot |AC|$. (Polsko 2000)

Úloha 17. Nechť ABC je trojúhelník s tupým úhlem u vrcholu A. Průsečíky vnější osy úhlu u A s výškami z B a C označíme postupně E a F. Nechť M a N jsou postupně body na úsečkách EC a FB takové, že $|\angle EMA| = |\angle BCA|$ a $|\angle ANF| = |\angle ABC|$. Dokažte, že body A, F, N, M leží na jedné kružnici. (EGMO 2021–P3)

Úloha 18. Nechť $ABCDE$ je konvexní pětiúhelník takový, že $|BC| = |DE|$. Předpokládejme, že uvnitř $ABCDE$ je bod T splňující $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ a $|\angle TBA| = |\angle AET|$. Přímky CD a CT protínají přímku AB postupně v bodech P a Q. Přímky CD a DT protínají přímku AE postupně v bodech R a S. Předpokládejme, že čtveřice bodů P, B, A, Q a R, E, A, S leží na přímkách v tomto pořadí. Dokažte, že body P, S, Q, R leží na jedné kružnici. (IMO 2022–P4)

Úloha 19. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť body Q, A, B, P leží na jedné přímce v tomto pořadí tak, že AC a BD jsou postupně tečny kružnic opsaných trojúhelníkům ADQ a BCP. Středy BC a AD postupně označíme M a N. Dokažte, že tečny v bodech A a B postupně ke kružnicím opsaným ANQ a BMP se protínají na přímce CD. (IMO SL 2022/G3)

Podobnosti spirální

Definice. *Spirální podobnost* je geometrické zobrazení vzniklé složením otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určeno středem spirální podobnosti O, orientovaným úhlem otočení $\overrightarrow{\omega}$ a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.

Tvrzení (spirální podobnosti chodí po dvou). Nechť spirální podobnost se středem O převádí $A \mapsto C$ a $B \mapsto D$. Pak jednoznačně určená spirální podobnost, která převádí $A \mapsto B$ a $C \mapsto D$, má též střed v O. Úhel otočení a koeficient se může lišit.

Tvrzení (existence a jednoznačnost). V rovině jsou dány body A, B, C, D takové, že $ABDC$ (v tomto pořadí!) není rovnoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí $A \mapsto C$, $B \mapsto D$.

Tvrzení (konstrukce středu a existence). Buď $ABB'A'$ čtyřúhelník takový, že se přímky AB a $A'B'$ protínají v bodě Q. Potom druhý průsečík O kružnic opsaných trojúhelníkům QAA' a QBB' je střed spirální podobnosti

$$\mathcal{S}\left(O, \angle\overrightarrow{AOA'}, \frac{|AB|}{|A'B'|}\right),$$

která zobrazuje $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$.

Úloha 20. V rovině jsou dány různě velké, stejně orientované, podobné trojúhelníky ABC a $A_0B_0C_0$. Středy úseček AA_0, BB_0, CC_0 označme po řadě A_1, B_1, C_1. Ukažte, že i trojúhelník $A_1B_1C_1$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

Úloha 21 (Klouzání). Po třech různoběžných přímkách se pohybují rovnoměrně body A, B a C. Dokažte, že pokud jsou ve dvou různých časech trojúhelníky ABC podobné, pak jsou podobné v každém okamžiku.

Úloha 22. Na kružnici ω je dána tětiva BC. Bod A se hýbe po delším oblouku BC. Bod ležící M na úsečce AB splňuje $|AM| = 2|MB|$. Průmět M na AC označíme K. Dokažte, že K se hýbe po pevné kružnici.

Úloha 23 (Ptolemaiova věta). Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označíme-li délky jeho stran AB, BC, CD, DA po řadě a, b, c, d a délky úhlopříček AC, BD po řadě e, f, pak platí $ac + bd = ef$.

Úloha 24. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník takový, že $|\angle ABC| + |\angle CDE| + |\angle EFA| = 360°$ a

$$\frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FA|} = 1.$$

Dokažte

$$\frac{|BC|}{|CA|} \cdot \frac{|AE|}{|EF|} \cdot \frac{|FD|}{|DB|} = 1.$$

(IMO SL 1998)

Úloha 25. Rovnoběžník $ABCD$ splňuje $|\angle DAB| < 90°$. Nechť $E \neq B$ a $F \neq D$ jsou body postupně na přímkách BC a CD takové, že $|AE| = |AB|$ a $|AF| = |AD|$. Kružnice opsaná trojúhelníku CEF protíná přímky AE a AF podruhé v bodech P a Q. Dokažte, že A, obraz P podle DE a obraz Q podle BF leží na jedné přímce.

(MEMO 2022–I–3)

Úloha 26. Body A_1, B_1, C_1 postupně leží na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Druhý průsečík kružnic opsaných ABC a AB_1C_1 označíme A_2. Obraz A_1 podle středu strany BC označíme A_3. Obdobně definujeme B_2, C_2, B_3, C_3. Dokažte, že trojúhelníky $A_2B_2C_2$ a $A_3B_3C_3$ jsou podobné. (IMO SL 2006–G9)

Úloha 27. Nechť I je střed kružnice vepsané ostroúhlého trojúhelníku ABC. Body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA a AB postupně označíme D, E a F. Přímka EF protíná kružnici opsanou ABC v bodech P a Q tak, že F leží mezi E a P. Dokažte, že $|\angle DPA| + |\angle AQD| = |\angle QIP|$. (IMO SL 2019–G6)

Literatura a zdroje

[1] Adéla Karolína Žáčkova: *Spirální podobnost*, Meziměstí 2022.

[2] Titu Andrescu, Michal Rolínek, Josef Tkadlec: *106 Geometry Problems from the AwsomeMath Summer Program.*

[3] Titu Andrescu, Michal Rolínek, Josef Tkadlec: *107 Geometry Problems from the AwsomeMath Year-Round Program.*

Hinty

Hint 1. Dokresli bod X na prodloužení strany CD tak, aby $|DX| = |BE|$. Potom ukaž AEF a AXF jsou podobné.
Hint 2. Označ si stejně dlouhé úsečky.
Hint 3. Protni AK s CD v bodě X a zjisti $\frac{|CX|}{|XD|}$.
Hint 4. Dokresli P' tak, aby A byl střed PP'. Najdi podobné trojúhelníky a ukaž $AX \parallel PQ$.
Hint 5. Ukaž, že jsou trojúhelníky AKC a DLE shodné.
Hint 6. Stačí dokázat podobnost PBA a ADQ. K tomu si pomůžeme dalšími podobnými trojúhelníky.
Hint 7. Ukaž, že BKP a CLN jsou podobné.
Hint 8. Dokresli obraz P v souměrnosti podle D. Označ ho Q, pak AQD a ABP jsou podobné.
Hint 9. Překlop podle středu strany, jejíž délku neznáš.
Hint 10. Inspiruj se předchozí úlohou, abys našel trojúhelník podobný CAN.
Hint 11. Průsečík BT s XY označ U a ukaž, že BXU a CXT jsou podobné.
Hint 12. Dokresli D' na BC takový, že $|CD'| = |CD| - |BD|$. Pak stačí ukázat podobnost dvou trojúhelníků. Všimni si, že A je střed kružnice opsané BEC.
Hint 13. Dokresli rovnoběžku s BC skrz A a protni jí s BQ a CP. Stejnolehlost se středem S to dodělá.
Hint 14. Dokresli bod G tak, aby čtveřice bodů A, B, D, E a A, C, G, F byly podobné (musíš ukázat, že to jde).
Hint 15. Ukaž, že bod dotyku je průsečík těžnice A s Ω, označ ho G. Předefinuj X jako průsečík tečen z G a D. Vyúhli podobnost OGX' a MAB.
Hint 16. Použij Ptolemaiovu (ne)rovnost. Uvědom si, že pak už stačí dokázat, že trojúhelníky PQR a ADC jsou podobné.
Hint 17. Průměty E na AB a AC označ D a X. Průsečík EC a Thaletovou kružnicí nad BC označ Z. Dokaž, že čtyřúhelníky $BDXZ$ a $CFAM$ jsou podobné.
Hint 18. Ukaž, že trojúhelníky TBQ a TES jsou podobné. Pak ukaž, že $CDQS$ je tětivový.
Hint 19. Ukaž, že trojúhelníky QAD a BCD jsou podobné. Dokresli střed CD, označený třeba R. Opiš ABR kružnici a protni jí s CD.
Hint 20. Dokresli střed spirálky, která na sebe ty trojúhelníky zobrazuje. Spirálka chodí po dvou a těžnice se v podobnosti zobrazí na těžnici.
Hint 21. Tohle je jen zobecnění předchozí úlohy.
Hint 22. Ukaž, že všechny trojúhelníky BAK jsou podobné. Tedy K je obraz A v pevné spirální podobnosti.
Hint 23. Spirálka se středem A. Přikresli si bod P na úhlopříčce BD tak, aby $|\angle BAP| = |\angle CAD|$. Vyjádři si poměry podobných trojúhelníků.
Hint 24. Dokresli bod X tak, aby dvojice trojúhelníků EDX, EFA a CDX, CBA byly podobné. Spirálka chodí po dvou.
Hint 25. Bod A bude střed nějaké spirálky. Jak ho zkonstruuješ?
Hint 26. Bod A_2 je střed nějaké spirálky. Ukaž, že AC_3B_3 a A_2BC jsou podobné. Doúhli to.

Hint 27. Najdi střed spirálky zobrazující EF na BC, označ ho S. Chceš ukázat, že SPI a SDQ jsou podobné. Ukaž, že SD prochází A-Švrkem (angle bisector theorem). Dokresli průsečík SI s EF (K) a s kružnicí opsanou ABC (L) a hledej rovnoběžky (spirálka pomůže). Ukaž, že SPK a SMQ jsou podobné.

Method of Animation

Radek Olšák

Abstrakt. Ukážeme si jak se dají řešit geometrické úlohy tak, že pouze ověříme, že platí v degenerovaných případech. A to nám pak s pomocí dvojpoměrů dokáže, že platí vždy.

Definice (Držák dvojpoměrů). Držákem $\mathcal{D}$ dvojpoměrů myslíme libovolné jedno z následujících

- Množinu bodů na přímce s jedním nevlastním bodem ∞.
- Množinu přímek procházejících jedním bodem.
- Množinu bodů na kuželosečce (nejčastěji kružnici).

Definice (Co pro nás je dvojpoměr). Mějme čtyři různé prvky držáku $a, b, c, d \in \mathcal{D}$. Mějme funkci, která této uspořádané čtveřici přiřadí reálné číslo bez nuly. Toto číslo budeme značit (a, b, c, d). Taková funkce je dvojpoměr právě když splňuje následující vlastnosti:

- (**Cykličnost**).
$$(a, b, c, d) = \frac{1}{(b, c, d, a)}.$$
- (**Prohazování**).
$$(a, b, c, d) = \frac{1}{(a, d, c, b)}.$$
- (**Jednoznačnost**). Mějme různé $a, b, c \in \mathcal{D}$. Pak pro dané $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje právě jedno $x \in \mathcal{D}$ takové, že $(a, b, c, x) = r$.
- (**Zachování linearitou**). Libovolné lineární zobrazení roviny ϕ (například spirální podobnost) zachová dvojpoměr, tedy
$$(a, b, c, d) = (\phi(a), \phi(b), \phi(c), \phi(d)).$$
- (**Promítání na přímku**). Nechť A, B, C, D jsou různé body na přímce a P bod mimo ní, pak
$$(A, B, C, D) = (PA, PB, PC, PD).$$
- (**Promítání na kružnici**). Nechť A, B, C, D, P jsou různé body na kružnici, pak
$$(A, B, C, D) = (PA, PB, PC, PD).$$

Definice (Projektivní zobrazení). Zobrazení f z držáku $\mathcal{D}_1$ do držáku $\mathcal{D}_2$ nazýváme projektivní pokud zachovává dvojpoměry, tedy

$$(a, b, c, d) = (f(a), f(b), f(c), f(d)).$$

Lemma. Složení projektivních zobrazení je projektivní.

Lemma. Pro bijektivní projektivní zobrazení je jeho inverz také projektivní.

Užitečná projektivní zobrazení

- Promítnutí skrz pevný bod z jedné přímky na druhou.
- Promítnutí z bodu na kuželosečce.
- Prostřelení skrz pevný bod P. Nalezení druhého průsečíku PX s danou kuželosečkou, po které se hýbe X.
- Nechť A leží na přímce a ω je kuželosečka, která se ji dotýká. Pak zobrazení z A do druhého bodu dotyku na ω je projektivní.
- Podobná zobrazení jsou projektivní.
- Inverze je projektivní.

Lemma (Steinerova kuželosečka). Mějme držák $\mathcal{D}_P$ přímek procházejících bodem P a držák přímek $\mathcal{D}_Q$ procházejících bodem Q. Dáme mějme projektivní zobrazení $\phi : \mathcal{D}_P \to \mathcal{D}_Q$. Pak pro všechny přímky $p \in \mathcal{D}_P$ platí, že průsečíky $p \cap \phi(P)$ tvoří kuželosečku.

Seriálové úlohy

Úloha 1 (Unlikely Concurrence). Mějme trojúhelník ABC. Označme body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC postupně X, Y. Dokaž, že XY, střední příčka vzhledem k vrcholu C a osa úhlu u vrcholu A prochází jedním bodem. Následně označ tento bod R a dokaž, že $|\sphericalangle CRA| = 90°$.

Úloha 2 (Existence kamaráda). Říkáme, že body P, Q jsou *kamarádi* v ABC, pokud $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle QAC|$, $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle QBC|$ a $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle QCA|$. Dokaž, že každý bod P, který neleží na stranách trojúhelníka ABC, má kamaráda.

Úloha 3 (Pascalova věta). Mějme tětivový šestiúhelník $ABCDEF$. Označme $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CD \cap FA$. Dokaž, že X, Y, Z leží na jedné přímce.

Úloha 4 (Jacobi). Mějme trojúhelník ABC. Sestrojme body X, Y, Z tak, že $|\sphericalangle YAC| = |\sphericalangle ZAB|$, $|\sphericalangle ZBA| = |\sphericalangle XBC|$ a $|\sphericalangle YCA| = |\sphericalangle XCB|$. Dokaž, že AX, BY, CZ prochází jedním bodem.

Úloha 5 (Blanchet). V trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu A. Na stranách AC a AB jsou postupně body E, F takové, že přímky BE a CF se protínají na AD v bodě G. Dokaž, že $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle FDA|$.

Úloha 6 (Butterfly). Mějme kružnici ω a na ní tětivu AB se středem M. Na ω zvolme body K_1, L_1. Označme K_2 průsečík K_1M s ω různý od K_1. Obdobně definujme bod L_2. Nechť $X = K_1L_1 \cap AB$ a $Y = K_2L_2 \cap AB$. Pak $|XM| = |YM|$.

Úloha 7 (Kariya). Mějme trojúhelník ABC a I označme jeho vepsiště. Pak označme D_A, D_B, D_C paty I na strany a, b, respektive c. Body X, Y, Z leží postupně na polopřímkách ID_A, ID_B, ID_C tak, že $|IX| = |IY| = |IZ|$. Dokaž, že přímky AX, BY, CZ prochází jedním bodem.

Úloha 8. Mějme trojúhelník ABC. Označíme I jeho vepsiště a ω jeho kružnici opsanou. Přímka AI protne ω podruhé v bodě D. Mějme body E ležící na oblouku BDC a F ležící na BC takové, že

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CAE| < \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|.$$

Dále označme G střed IF. Dokaž, že průsečík přímek EI a DG leží na ω.

(IMO 2010/2)

Úloha 9. Mějme trojúhelník ABC s vepsištěm I. Kružnice vepsaná se dotýká strany BC v D. Body P, Q leží postupně na BI, CI tak, že $|\sphericalangle PAQ| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$. Dokaž, že $|\sphericalangle QDP| = 90°$.

Úloha 10. Uvažme rovnostranný trojúhelník ABC a v něm bod P. Označme A_1 překlopené P podle BC. Analogicky B_1 překlopené P podle AC a C_1 překlopené P podle AB. Dokaž, že přímky AA_1, BB_1, CC_1 prochází jedním bodem.

Úloha 11. Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník s $AB \parallel CD$. Kružnice k procházející body A a B protíná AD v X a AC v Y. Tečna ke k z bodu B protíná CD v bodě Z. Ukaž, že X, Y a Z leží na jedné přímce. (PraSe 38 Myš-Maš/6)

Úloha 12. Mějme trojúhelník ABC. Označme M, N středy stran AB, AC. Na tečně ke kružnici opsané ABC v bodě A zvolme bod X. Označme ω_B kružnici procházející MB dotýkající se přímky MX. Analogicky ω_C je kružnice skrz body NC dotýkající se NX. Dokaž, že ω_B a ω_C se protínají na BC.

Úloha 13. Mějme P, Q kamarády v ABC. Označme X patu Q na BC. Kružnice nad průměrem AP protíná opsanou ABC v K různém od A. Přímka AQ protíná opsanou ABC v T různém od A. Dokaž, že T, X, K leží na přímce.

Úloha 14. Hedvika našla v rovině kružnici k a bod P vně k. Z bodu P nakreslila dvě tečny ke k, body dotyku pojmenovala A a B. Bod Q umístila tak, aby A byl střed úsečky PQ. Následně přišel Tonda a na úsečce AB nakreslil bod L. Kružnice opsaná trojúhelníku PLB protnula k podruhé v bodě T. Ukaž, že ať už byl Tonda jakkoli zákeřný, vždy platí $|\sphericalangle PBT| = |\sphericalangle QLA|$. (PraSe 38 Tečny/7)

Úloha 15. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P, Q takové, že platí $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle QBC|$, $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle QCA|$ a $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle QAB|$. Nechť jsou O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníků PBC a QBC. Dokaž, že platí $|\sphericalangle BAO_1| = |\sphericalangle CAO_2|$. (*i*KS 9. ročník G5)

Úloha 16. Mějme čtyřúhelník $ABCD$ takový, že $|\sphericalangle BAD| + 2|\sphericalangle BCD| = 180°$. Označme E průsečík osy $\sphericalangle BAD$ s BD. Osa AE protíná BC a CD v X a Y. Dokaž, že A, C, X, Y leží na jedné kružnici.

Úloha 17. Mějme trojúhelník ABC. Na straně BC zvolme bod D. Na ose úhlu BAC zvolme bod I. Přímky BI, AI protínají kružnici opsanou ABD postupně v bodech P, Q. Analogicky přímky CI a AI protnou kružnici opsanou ACD v bodech R, S. Dokaž, že přímky RS, PQ, BC prochází jedním bodem.

Úloha 18. Mějme bod P na straně AB v trojúhelníku ABC. Na stranách AC a BC zvolíme S a T tak, aby $|AP| = |AS|$ a $|BP| = |BT|$. Kružnice opsaná PST protne AB a BC znovu v Q a R. Přímky PS a QR se protnou v L. Ukaž, že přímka CL půlí PQ.

Úloha 19. Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme H ortocentrum ABC. Dále na AB a BC zvolme P, Q tak, aby $PH \parallel AD$ a $QH \parallel CD$. Dokaž, že kolmice na PQ skrz bod H prochází ortocentrem ACD.

Úloha 20. V trojúhelníku ABC označme A' a B' paty výšek z A a B. Na kružnici opsané ABC na oblouku ACB je bod D. Dále $P = AA' \cap BD$ a $Q = BB' \cap AD$. Dokaž, že střed PQ leží na $A'B'$.

Úloha 21. V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná se středem I dotýká stran AC a AB v bodech E, F. Obrazy bodů E, F ve středové symetrii přes I označme G, H. Buď Q průsečík GH a BC a M střed BC. Dokaž, že jsou přímky IQ a IM na sebe kolmé. (Taiwan TST 2014)

Úloha 22. Na straně BC v trojúhelníku ABC mějme body P, Q tak, že platí $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle QAC|$. Osa úhlu ABC protíná AP a AQ postupně v bodech M a L. Osa úhlu ACB protíná AP a AQ postupně v K, N. Dokaž, že BC, MN a KL prochází jedním bodem.

Úloha 23. Mějme pevný bod D a pevné přímky k, l, které procházejí společným bodem A. Na přímkách k, l jsou postupně body X a Y takové, že $|\angle XDA| = |\angle YDA|$. Dokaž, že přímka XY prochází pevným bodem.

Úloha 24. Na stranách BC a AC trojúhelníka ABC leží po řadě body A_1 a B_1. Body P a Q jsou zvoleny postupně uvnitř úseček AA_1 a BB_1 tak, že přímka PQ je rovnoběžná se stranou AB. Dále P_1 je bod na přímce PB_1, pro nějž platí, že B_1 leží uvnitř úsečky PP_1 a zároveň $|\sphericalangle PP_1C| = |\sphericalangle BAC|$. Podobně bod Q_1 leží na přímce QA_1 tak, že A_1 leží uvnitř úsečky QQ_1 a zároveň platí $|\sphericalangle CQ_1Q| = |\sphericalangle CBA|$. Dokaž, že body P, Q, P_1, Q_1 leží na jedné kružnici. (IMO 2019/2)

Úloha 25. Mějme trojúhelník ABC. Na straně BC leží bod P. Kružnice nad průměrem BP protne podruhé kružnici opsanou APC v Q. Přímka PQ a AC se protínají v M. Označme H ortocentrum trojúhelníka ABP. Dokaž, že když se P hýbe na BC, tak přímky HM prochází pevným bodem.

Literatura a zdroje

[1] Zack Chroman, Gopal K. Goel, Anant Mudgal; *The Method of Animation*, 2019, https://artofproblemsolving.com/community/c6h1952595p14062313.

[2] Vladyslav Zveryk; *The Method of Moving Points*, 2019, https://artofproblemsolving.com/community/q1h1884540p12835147.

[3] yayups; *Moving points tutorial*, 2019, https://artofproblemsolving.com/community/c473124h1763266_moving_points_tutorial.

[4] Lenka Kopfová, Radek Olšák; *Projektivní geometrie*, PraSečí seriál, 2019/2020.

Hinty

Hint 1. Hýbej s C po AC. Střední příčka je rovnoběžná se stranou.
Hint 2. Hýbej s P po AP.
Hint 3. Hýbej třeba s A po kružnici opsané. Existují právě tři z ostatních bodů takové, že když se jim A rovná, věta je triviální.
Hint 4. Hýbej s X po BX.
Hint 5. Hýbej s G po výšce.
Hint 6. Hýbej s K_1 po kružnici.
Hint 7. Přímky AX, BY, CZ budou mít všechny stupeň 1, takže stačí čtyři případy.
Hint 8. Rozhýbej E po ω. vezmi $E = B$, $E = C$, $E = D$.
Hint 9. Hýbej s P po BI. Pro třetí případ vyber P vepsiště menšího trojúhelníka.
Hint 10. Najdi vhodnou přímku, po které P hýbat, aby se zachovala přímka AA_1.
Hint 11. Hýbej s D po CD.
Hint 12. Označ D průsečík ω_C a BC. Všimni si, že $|\sphericalangle XND| = |\sphericalangle ACB|$. Takže zobrazení z X do D se dá vnímat jako rotace o pevný úhel.
Hint 13. Označte X' průsečík KT a BC. Zafixujte ABC a bod T. Hýbejte s Q po AT. Ukažte, že $Q \mapsto X$ a $Q \mapsto X'$ jsou projektivní.
Hint 14. Převeď podmínku o úhlech na $LQ \parallel AT$.
Hint 15. Hýbej s P po PB. Jako třetí bod zvol P na ose ACB a tuhle konfiguraci vyřeš znovu hýbáním.
Hint 16. Označ I vepsiště BAD. Hýbej s C po kružnici opsané BID.
Hint 17. Hýbej s I po AI. Najdi dva triviální případy a za třetí zvol nevlastní bod. Pak rozhýbej D.
Hint 18. Uvědom si, že I je opsiště PST. Pata na AB je pak středem PQ. Hýbej s P po AB. Dokaž, že se přímky CD, PS a QR protínají v jednom bodě.
Hint 19. Zafixuj A, B, C, P a hýbej s Q po BC. Uvaž $Q = B$, $Q = BC_\infty$ a $PQ \parallel AC$.
Hint 20. Hýbej s P po AA'. Definuj Q' jako průsečík BB' a vystejnolehlené $A'B'$ z P koeficientem 2.
Hint 21. Hýbej s A po AB.
Hint 22. Najdi zobrazení zobrazující $B \mapsto C$, $M \mapsto N$ a $L \mapsto K$.
Hint 23. Najdi projektivní zobrazení zobrazující X na Y.
Hint 24. Dokresli průsečíky X, Y přímky PQ s CB a CA. Pak Q_1CQX je tětivový. Převeď tětivovost PQP_1Q_1 pomocí nových kružnic a mocnosti na průsečík přímek. Hýbej s B_1 po CA.
Hint 25. Zobrazení z P do M je projektivní. Dokresli kružnici opsanou a dobře tohle zobrazení definuj.

Polynomy

Zdeněk Pezlar

Abstrakt. Polynomy jako funkce díky svému jednoduchému tvaru vykazují mnoho pěkných a zajímavých vlastností. Podíváme se na jejich chování v různých tělesech a číselných oborech $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$. Podíváme se jim v tomto příspěvku na zub.

Definice. Množinu polynomů s koeficienty nad R značíme jako $R[x]$, kde $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Cool věty

Věta (Základní věta algebry). Polynom s komplexními koeficienty stupně n má přesně n kořenů včetně násobností.

Tvrzení. Nechť P a Q jsou polynomy nad $\mathbb{C}$ stupně n, které se shodují v $n+1$ bodech. Pak se jako polynomy rovnají.

Tvrzení. Nechť P má k-násobný kořen x. Pak jeho derivace P' má $k-1$-násobný kořen x.

Lemma. Pokud P je reálný polynom a θ jeho kořen, pak i $\overline{\theta}$ je jeho kořen a tyto kořeny mají stejnou násobnost.

Důsledek. Každý reálný polynom lze vyjádřit jako součin reálných lineárních a kvadratických polynomů.

Na rozjezd

Úloha 1. Pro navzájem různá reálná a, b, c zjednodušte

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

Úloha 2. Pro navzájem různá reálná a, b, c dokažte

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0.$$

Úloha 3. Najděte všechny polynomy takové, že $P(x^2+1) = (P(x)+1)^2$ platí pro každé reálné x a navíc $P(2024) = 2023$. (Výběrko 2022)

Úloha 4. Ať $P \in \mathbb{R}[x]$ je polynom splňující $P(\sin x) = P(\cos x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že existuje reálný polynom Q takový, že $P \equiv Q(x^4 - x^2)$.

Úloha 5. Buď P nezáporný reálný polynom. Dokažte, že existuje g,$h \in \mathbb{R}[x]$ takové, že $P \equiv g^2 + h^2$.

Úloha 6. Nabývá-li polynom stupně n celočíselné hodnoty v $n+1$ po sobě jdoucích celočíselných hodnotách, tak už nabývá celočíselné hodnoty v celém $\mathbb{Z}$.

Kořeny

Každý polynom má dle základní věty aritmetiky komplexní kořen. Ač nám úloha často předhodí polynom splňující vlastnosti pro reálná čísla, pro čísla komplexní ji splňuje taktéž. Tento trik je velmi silný.

Úloha 7. Dokažte, že nerozložitelný polynom nemá vícenásobný kořen.

Úloha 8. Najděte exponenty, aby platilo:

(i) $x^k - 1 \mid x^n - 1$,
(ii) $x^2 + x + 1 \mid (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$,
(iii) $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} - x^n + 1$,
(iv) $x^2 - x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$,
(v) $x^2 - x + 1 \mid x^{2n} - x^n + 1$.

Úloha 9. Najděte všechny reálné polynomy takové, že $P(x^2) = P(x)P(x+2)$. (Taiwan)

Úloha 10. Najděte všechny reálné polynomy takové, že $P(x^2) = P(x)P(x+1)$.

Úloha 11. Reálné polynomy P a Q mají (až na násobnost) stejné množiny kořenů. Totéž platí i pro dvojici polynomů $P+1$ a $Q+1$. Dokažte, že $P \equiv Q$.

Úloha 12. Nechť P je polynom stupně $n > 1$ s n různými kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dokažte:

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \cdots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$$

(Polsko 1979)

Úloha 13. Najdi všechny reálné polynomy takové, že polynom $P(x^2+x+1)$ dělí polynom $P(x^3-1)$. (Indie 2018)

Úloha 14. Najděte všechna reálná a, b taková, že existují reálné polynomy P, Q splňující

$$P(x^2)Q(x+1) - P(x+1)Q(x^2) = x^2 + ax + b.$$

(Korea Winter Camp 2021)

Úloha 15. Najděte všechny polynomy s reálnými koeficienty takové, že platí

$$\frac{P(x)}{yz} + \frac{P(y)}{xz} + \frac{P(z)}{xy} = P(x-y) + P(y-z) + P(z-x)$$

pro libovolná reálná x, y, z splňující $2xyz = x + y + z$. (USAMO 2019)

Úloha 16. Najděte všechny reálné polynomy P splňující

$$P\left(x\sqrt{2}\right) = P\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$$

pro všechna reálná $|x| \leq 1$. (USA TSTST 2014)

Úloha 17. Nechť $f \in \mathbb{Z}[x]$ se stupněm n, jehož koeficienty jsou ± 1. Navíc platí $(X-1)^{2^k} \mid f$. Dokažte, že $n \geq 2^{k+1} - 1$.

Úloha 18. Nechť $P(x)$ je monický polynom s celočíselnými koeficienty takový, že všechny jeho kořeny leží na jednotkové kružnici. Ukažte, že všechny kořeny $P(x)$ jsou odmocniny z jedničky.

Koeficienty a stupně

Úloha 19. Najdi všechny polynomy P stupně 2024 takové, že $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pro $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2024\}$.

Úloha 20. Najděte všechny polynomy s koeficienty v množině $\{\pm 1\}$, které mají všechny kořeny reálné. (Putnam 1968)

Úloha 21. Pro dané n najděte všechny polynomy $P \in \mathbb{R}[x]$ takové, že

$$P(x)P(x^2)\cdots P(x^n) = P\left(x^{n(n+1)/2}\right).$$

(Výběrko 2020)

Úloha 22. Najděte všechny polynomy P s reálnými koeficienty takové, že pro libovolná a, b, $c \in \mathbb{R}$ splňující $ab + ac + bc = 0$ platí

$$f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c).$$

(IMO 2004)

Úloha 23. Rozhodněte, zda existují reálné nekonstantní polynomy P a Q splňující pro každé reálné x

$$P(x)^{10} + P(x)^9 = P(x)^{21} + P(x)^{20}.$$

(RMM 2018)

Další úlohy

Úloha 24. Rozhodněte, zda existují reálné polynomy P, Q takové, že

$$P(x)^3 - Q(x)^2$$

je nekonstantní lineární polynom. (Kürschák 2017)

Úloha 25. Najděte všechny dvojice (P, Q) polynomů takových, že $P(x + Q(y)) = P(y + Q(x))$ platí pro libovolná $x,y \in \mathbb{R}$. (MEMO 2017)

Úloha 26. Najděte všechny polynomy P s reálnými koeficienty takové, že pro všechna nenulová reálná čísla je splněno

$$P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P\left(x + \frac{1}{x}\right) + P\left(x - \frac{1}{x}\right)}{2}.$$

(ELMO shortlist 2023)

Teorio-číselné okénko

Aby se neřeklo ;)

Tvrzení. Buď $P \in \mathbb{Z}[x]$. Pak pro libovolná celá a,b platí $a - b \mid P(a) - P(b)$.

Úloha 27. Nechť f je polynom s celočíselnými koeficienty takový, že $f(0)$ a $f(1)$ jsou liché. Dokažte, že f nemá celočíselný kořen.

Úloha 28. Dejme tomu, že pro polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$ a $a,b,c \in \mathbb{Z}$ platí $P(a) = b$, $P(b) = c$ a $P(c) = a$. Dokažte, že a, b, c nemohou být všechna různá.

Úloha 29. Je daný polynom $Q \in \mathbb{Z}[x]$ stupně $n > 1$ a přirozené k. Dokažte, že polynom $\underbrace{Q(Q(Q(\cdots Q(x)\cdots)))}_{k-\text{krát}}$ má nejvýše n pevných bodů. (IMO 2006)

Literatura a zdroje

Příspěvek převzal pár úloh z příspěvku Tondy Le, za což mu tímto děkuji.

[1] Dušan Djukić: *Polynomials, IMO compendium.*
[2] Rohan Goyal: *Polynomials.*
[3] Nguyen Van Mau: *Cac van de ve da thuc I, II.*

Hinty

Hint 1. Dosaďte do x hodnoty a, b, c.
Hint 2. Vynásobte výraz společným jmenovatelem, pak uvažujte polynom v a.
Hint 4. Dokaž sudost a pak využij goniometrickou jedničku.
Hint 5. Využij rozklad P na polynomy malého stupně.
Hint 6. BÚNO to jsou body $0, 1, \ldots, n$. Polynom rozepiš ve tvaru $a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + \cdots + a_n x(x-1) \cdots (x-n)$.
Hint 7. Derivace.
Hint 8. Jaké jsou kořeny levé strany?
Hint 9. Generuj kořeny a tak urči všechny možné kořeny P.
Hint 10. Generuj kořeny a tak urči všechny možné kořeny P.
Hint 11. Derivuj a počítej kořeny.
Hint 13. Zvol komplexní kořen s největší absolutní hodnotou a vhodně dosaď.
Hint 14. Dosaď vhodné komplexní číslo tak, aby se ti levá strana vynulovala. To bude nějaké *jedno*duché.
Hint 15. Rovnost bude platit pro všechna komplexní čísla. Vytvoř rovnost v jedné proměnné.
Hint 16. Dosazuj a derivuj, Pak děl se zbytkem.
Hint 17. Pracuj v mod 2.
Hint 20. Viètovy vztahy a odhadni stupeň.
Hint 21. Podívej se na druhý největší člen.
Hint 22. Vhodným dosazením získej rovnost vedoucích členů a ohranič stupeň.
Hint 23. Derivuj a zkoumej dělitelnost spolu se stupni.
Hint 24. Derivuj a děl.
Hint 25. Dokaž, že $P(x) - Q(x)$ je konstantní.
Hint 26. Dokaž paritu a odhadni stupeň pomocí druhého největší koeficientu v součinu.
Hint 29. Využij předchozí úlohu.

Kombinatorická teorie čísel

Michal Staník

Abstrakt. Pod kombinatorickou teorií čísel si můžeme představit nějakou úlohu o číslech, kterou můžeme řešit kombinatorickou úvahou. Celá čísla nám obvykle dají jenom nějakou strukturu, na které úloha pracuje, a dále už skoro žádná tvrzení z teorie čísel nepotřebujeme.

Nejdříve si ukážeme několik druhů úloh, na které můžeme narazit. Každá sekce obsahuje jednoduché příklady na procvičení daného principu. Následují další, většinou už o něco těžší úlohy seřazené víceméně podle obtížnosti.

Dirichletův princip

Docela často se nám bude hodit v řešení využít Dirichletův princip. Tvrzení je to sice jednoduché, ale jeho použití zdaleka nemusí být triviální.

Tvrzení. Máme-li více než nk věcí, které rozdělujeme do n přihrádek, bude v nějaké přihrádce aspoň $k + 1$ věcí.

Úloha 1. Dokaž, že když z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ vybereme více než n čísel, budou nějaká dvě z nich nesoudělná.

Úloha 2. Dokaž, že když z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ vybereme více než n čísel, bude některé z nich dělit jiné. (Erdős)

Úloha 3. Je dáno n přirozených čísel. Dokaž, že nějaká jejich neprázdná podmnožina má součet dělitelný n.

Úloha 4. Dokaž, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nenulové Fibonacciho číslo, které je jím dělitelné.

Úloha 5. Nechť S je množina 10 dvouciferných čísel. Dokaž, že existují dvě disjunktní neprázdné podmnožiny S se stejným součtem. (IMO 1972/1)

Nekonečno

Následuje několik úloh, ve kterých se vyskytuje nekonečno (třeba jako počet přirozených čísel). Nemusíme se ale bát, žádné temno tady potřebovat nebudeme, obvykle si vystačíme s elementárními úvahami, jako například:

- Když je něčeho nekonečno, umím toho vzít libovolně velký počet.
- Když mám nekonečnou množinu přirozených čísel, tak pro libovolné přirozené n v ní existuje číslo větší než n.

Úloha 6. Přirozená čísla jsou rozdělena do konečně mnoha disjunktních množin. Dokaž, že některá z těchto množin obsahuje nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla. (BMC 1999)

Úloha 7. Rozhodni, zda existuje nekonečná rostoucí posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje posloupnost $a_1 + k, a_2 + k, \ldots$ pouze konečně mnoho prvočísel.

Úloha 8. Nechť S je podmnožina přirozených čísel. Dokaž, že pokud má každá konečná podmnožina S společného dělitele většího než 1, potom má i S společného dělitele většího než 1.

Úloha 9. Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel, která obsahuje každé přirozené číslo právě jednou, taková, že n dělí součet prvních n členů pro všechna n?

Úloha 10. Nechť jsou přirozená čísla rozdělena do konečně mnoha disjunktních množin. Dokaž, že mezi nimi existuje množina A a číslo d takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existují $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ z A splňující $a_{i+1} - a_i \leq d$. (Shortlist 1990)

Indukce

V téhle sekci se podíváme na úlohy řešitelné indukcí. Často se nebude jednat o indukci v pravém slova smyslu, ale budeme postupovat od menších podproblémů k větším.

Úloha 11. Dokaž, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet čísel tvaru $2^a 3^b$ tak, aby žádné z nich nedělilo jiné.

Úloha 12. Máme n přirozených čísel se součtem $s < 2n$. Dokaž, že každé $m \leq s$ umíme vyjádřit jako součet několika našich čísel.

Úloha 13. Dokaž, že existuje libovolně velká množina celých čísel M taková, že pro všechna $a, b \in M$ platí $(a - b)^2 \mid ab$. (USA 1998)

Úloha 14. Nechť $S = \{1, 2, \ldots, 10^6\}$. Dokaž, že pro libovolnou 101-prvkovou množinu $A \subset S$ existuje 100-prvková množina $B \subset S$ taková, že čísla $a + b$, $a \in A$, $b \in B$ jsou po dvou různá. (IMO 2003/1)

Úloha 15. Nechť A je množina n zbytků modulo n^2. Dokaž, že existuje n-prvková množina B taková, že $a + b \bmod n^2$, $a \in A$, $b \in B$ dává aspoň $\frac{1}{2}n^2$ různých hodnot. (Shortlist 1999)

Motivační úložky

Úloha 16. Nechť A a B jsou neprázdné množiny přirozených čísel. Dokaž, že počet čísel, která můžeme zapsat ve tvaru $a+b$, kde $a \in A$, $b \in B$, je aspoň $|A|+|B|-1$.

Úloha 17. Je vybráno 50 čísel z množiny $\{1,2,\ldots,99\}$ tak, že součet žádné dvojice z nich není 99 ani 100. Jak musela vypadat vybraná čísla?

Úloha 18. Dokaž, že mezi každými deseti po sobě jdoucími přirozenými čísly je jedno nesoudělné se všemi ostatními.

Úloha 19. Je možné čísla 1 až 100 pokrýt dvanácti geometrickými posloupnostmi? Tyto posloupnosti mohou mít libovolné kvocienty. (Rusko 1995)

Úloha 20. Dokaž, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje posloupnost n po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž žádné není mocninou prvočísla (ani první).

(IMO 1989/5)

Další úlohy

Úloha 21. Je dáno 81 přirozených čísel, jejichž všichni prvočíselní dělitelé jsou z množiny $\{2,3,5\}$. Dokaž, že můžeme vybrat 4 z našich čísel, jejichž součin je čtvrtou mocninou přirozeného čísla. (Řecko 1996)

Úloha 22. Rozhodni, zda existuje nekonečná množina celých čísel S taková, že každé celé číslo lze jednoznačně vyjádřit jako $a+2b$ pro $a,b \in S$. (USA 1996)

Úloha 23. Je dáno 2000 celých čísel se součtem 1, z nichž každé má absolutní hodnotu nejvýše 1000. Dokaž, že z nich můžeme vybrat několik s nulovým součtem.

(Kanada 2000)

Úloha 24. Nechť $n > 6$ je přirozené číslo a všechna čísla, která jsou menší než n a jsou s ním nesoudělná, tvoří aritmetickou posloupnost. Dokaž, že n je prvočíslo nebo mocnina dvou. (IMO 1991/2)

Úloha 25. Jsou dány posloupnosti přirozených čísel $0 < x_1 \leq \cdots \leq x_{19} \leq 93$ a $0 < y_1 \leq \cdots \leq y_{93} \leq 19$. Dokaž, že nějaká neprázdná, ne nutně souvislá podposloupnost x má stejný součet jako nějaká podposloupnost y. (Putnam 1993)

Úloha 26. Přirozená čísla jsou rozdělena do konečně mnoha (aspoň dvou) disjunktních aritmetických posloupností. Dokaž, že nějaké dvě z těchto posloupností musí mít stejnou diferenci.

Úloha 27. Mějme posloupnost $2n - 1$ přirozených čísel. Dokaž, že některá její n-prvková podposloupnost má součet dělitelný n. (Erdős–Ginzburg–Ziv)

Úloha 28. Nechť $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$. Najdi nejmenší n takové, že každá n-prvková podmnožina S obsahuje 5 po dvou nesoudělných čísel. (IMO 1991/3)

Úloha 29. Miro povedal Slavovi množinu svojich $n \geq 2$ navzájom rôznych obľúbených kladných celých čísel. Slavo potom napísal najväčšieho spoločného deliteľa a najmenší spoločný násobok každej dvojice Mirových čísel na papier. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ určte, koľko najmenej mohlo byť na papieri rôznych čísel.
(KMS 2018/19, L1, 8)

Něco těžšího na závěr

Úloha 30. Dokaž, že existuje množina přirozených čísel A s následující vlastností: Pro každou nekonečnou množinu prvočísel S platí, že existují čísla $m \in A$, $n \notin A$, která jsou součinem k různých prvočísel z S pro nějaké $k \geq 2$. (IMO 1994/6)

Úloha 31. Nechť p je liché prvočíslo. Kolik p-prvkových podmnožin $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ má součet dělitelný p? (IMO 1995/6)

Úloha 32. Nechť $f(n)$ značí počet rozkladů čísla n na součet mocnin 2. Dokaž $2^{\frac{n^2}{4}} \leq f(2^n) \leq 2^{\frac{n^2}{2}}$. (IMO 1997/6)

Literatura a zdroje

Príspevok je kópiou príspevku Josefa Minaříka z *i*KS zborníku 2021. Týmto mu ďakujem za umožnenie použitia tohto materiálu.

[1] Gabriel Carroll: *Combinatorial Number Theory (Teacher's Edition).*
[2] Reid Barton: *Combinatorial Number Theory*, MOP 2003.
[3] Ricky Liu: *Combinatorial Number Theory*, MOP 2011.

Hinty

Hint 1. Uvaž sousední dvojice.
Hint 2. Rozděl čísla podle největšího lichého dělitele.
Hint 3. Uvaž prefixové součty.
Hint 4. Dvojic F_i, F_{i+1} mod n je jenom konečně mnoho.
Hint 5. Kolik je celkem neprázdných podmnožin? Najdi libovolné dvě se stejným součtem.
Hint 6. Pro každou množinu uvaž číslo, které v ní má jenom konečně mnoho násobků.
Hint 7. Ano, existuje.
Hint 8. Předpokládej, že tvrzení neplatí a najdi nějakou posloupnost podmnožin S se zmenšujícím se NSD.
Hint 9. Ano, existuje. Na sudé pozice můžeme pokaždé umístit nejmenší chybějící číslo.
Hint 10. Ukaž, že $A_i \cup \cdots \cup A_n$ obsahuje libovolně dlouhou souvislou posloupnost po sobě jdoucích čísel.
Hint 11. Když je číslo sudé, vyděl ho dvěma, jinak odečti mocninu 3.
Hint 12. Když jsou to samé jedničky, je to jasné, jinak odeber největší číslo.
Hint 13. Čísla šikovně posuň a přidej nulu.
Hint 14. Postupně přidávej čísla do B, kolik jich bude v každém kroku zakázaných?
Hint 15. Postupně přidávej čísla do B, je možné každým z nich zabrat $\frac{1}{2}n$ zbytků?
Hint 16. Zkus čísla setřídit a najít rostoucí posloupnost součtů.
Hint 17. Rozděl do dvojic, ukaž, že tam musí být 50. Není zbytek jednoznačně určen?
Hint 18. Vyber to nedělitelné 2, 3, 5 ani 7.
Hint 19. Podívej se na prvočísla.
Hint 20. Buď najdi konstrukci pomocí faktoriálů, nebo použij asymptotické odhady.
Hint 21. Nejprve najdeme 9 dvojic, jejichž součiny jsou čtverce, pak použijeme stejnou myšlenku znovu.
Hint 22. Ano, existuje. Induktivně vytvářej množinu a vždy přidej a a b tak, aby nevznikly duplicity a šlo z nich vytvořit nejmenší dosud chybějící číslo.
Hint 23. Seřaď čísla tak, aby měly prefixové součty omezené hodnoty, a použij Dirichleta.
Hint 24. Pro liché n uvaž 1 a 2. Která čísla je potřeba uvážit pro $n \equiv 2$ a 0 mod 4?
Hint 25. Myslíš, že to funguje jenom pro 19 a 93? Uvaž prefixové součty a pro každý prefix první posloupnosti najdi nejkratší prefix té druhé s aspoň tak velkým součtem.
Hint 26. Uvaž nsn diferencí a představ si to jako mnohoúhelník. Můžou se ti hodit odmocniny z jedničky.
Hint 27. Stačí to dokázat pro prvočísla. Potom indukcí dokaž následující lemma: když $(2i-1)$-prvková posloupnost neobsahuje i stejných čísel, pak její i-prvkové podposloupnosti dávají aspoň i různých součtů mod p.
Hint 28. 216 nestačí, uvaž násobky 2, 3, 5 a 7. Pak najdi 6 hezkých množin, ve kterých je každých 5 čísel po dvou nesoudělných.
Hint 29. Dokáž indukciou ku k – počtu prvočísel, ktoré delia niektoré z Mirových čísel. Predstav si čísla ako k-rozmerné body a rozdeľ na skupiny podľa poslednej súradnice.
Hint 30. Funguje množina všech čísel, která jsou součinem n různých prvočísel větších než n-té nejmenší prvočíslo pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Hint 31. Vyjde to $2+\left(\binom{2p}{p}-2\right)/p$. Uvaž množinu jinou než $\{1,2,\dots,p\}$ a $\{p+1,p+2,\dots,2p\}$. Podívej se na její průnik s $\{1,2,\dots,p\}$ a zkus ho rotovat.
Hint 32. Dokaž rekurence $f(2n+1)=f(2n)$, $f(2n)=f(2n-2)+f(n)$. Pak počítej.

Invarianty a monovarianty

Jakub Šošovička

Abstrakt. Príspevok obsahuje olympiádne úlohy, pri ktorých sa používajú invarianty a monovarianty. Cieľom prednášky je naučiť sa základné invarianty a monovarianty, ktoré sa v úlohách často vyskytujú a získať intuíciu pre riešenie náročnejších úloh.

Základné invarianty

Úloha 1. Drak má 100 hláv. Rytier ich vie naraz useknúť 15, 17, 20, alebo 5. Následne drakovi narastie v jednotlivých prípadoch 24, 2, 14, alebo 17 hláv. Ak drak nemá žiadnu hlavu, zomrie. Môže drak zomrieť?

Úloha 2. Šachovnicu 8×8 sme pokryli 21 obdĺžnikmi 3×1 tak, že práve 1 políčko zostalo nepokryté. Kde môže byť toto voľné políčko?

Úloha 3. Petra a Dalila sa najnovšie nehrávajú so zápalkami, ale s peniazmi, ktoré ušetria tým, že si nekupujú zápalky. Zoberú si n korunáčiek a umiestnia ich na stole do jedného radu. Dievča, ktoré je na ťahu, si vyberie jednu mincu, ktorá je znakom hore, otočí ju, ako aj všetky ostatné napravo od nej. Potom je na ťahu druhé dievča. Takto striedavo ťahajú, pričom začína skúsenejšia Petra. Prehrá tá, ktorá už nevie spraviť ťah. Ukážte, že táto hra vždy skončí po konečnom počte krokov. Ktorá hráčka má víťaznú stratégiu? (KMS, 2002/03, Z1, 8)

Úloha 4. Je možné vyplniť šachovnicu 10×10 dlaždicami 4×1?

Úloha 5. Je možné vyplniť šachovnicu 10×10 tetrominami L?

Úloha 6. V rade máme čísla $1, 2, \ldots, n$. V jednom ťahu môžeme vymeniť 2 susedné čísla. Rozhodnite, či po 2023 ťahoch môžeme dostať pôvodnú konfiguráciu čísel.

Úloha 7. Je daných 5 žetónov na pozíciach: $(-5, 10)$, $(8, 7)$, $(-3, 4)$, $(6, 5)$, $(9, 4)$. Sú povolené nasledujúce 2 operácie. Buď môžeme vybrať 2 žetóny, jeden z nich posunúť o jednotku nahor a druhý o jednotku doprava, alebo vyberieme 2 žetóny a jeden z nich posunieme o jednotku dole a druhý o jednotku doľava. Nájdi množinu všetkých bodov (x, y) takých, že po konečnom počte operácií môžu byť všetky žetóny práve v bode (x, y).

Základné monovarianty

Úloha 8. Do kruhu je usporiadaných n lámp. Lampy sú buď zapnuté, alebo vypnuté. V každom kroku sa v jeden moment prepne každá lampa, ktorá nesusedí s lampou rovnakého stavu. Pre aké n sa po nejakom počte krokov už nezmení stav žiadnej lampy pri ľubovoľnom počiatočnom rozdelení stavov? (Kanada 1994, upravené)

Úloha 9. Na tabuli sú napísané prirodzené čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. V jednom ťahu môžeme vybrať dve čísla x_i a x_j také, že ani jedno nedelí druhé a nahradiť ich postupne $\gcd(x_i, x_j)$ a $\operatorname{lcm}(x_i, x_j)$. Dokážte, že môžeme spraviť iba konečne veľa ťahov. (Putnam 2008)

Úloha 10. V každom políčku tabuľky $m \times n$ je napísané reálne číslo. V jednom kroku môžeme zmeniť znamienka pri všetkých číslach v jednom riadku alebo v jednom stĺpci. Ukážte, že ide dosiahnuť stavu, kedy bude súčet v každom riadku aj v každom stĺpci nezáporný.

Úloha 11. Každý senátor má najviac 3 nepriateľov, nemôže byť svojim nepriateľom a nepriateľstvo je vzájomné. Dokáž, že vieme senát rozdeliť na 2 frakcie tak, že každý senátor má najviac jedného nepriateľa vo svojej frakcii.

Úloha 12. Na tabuli sú v rade napísané prirodzené čísla. Môžeme vykonať nasledovné 2 operácie: Vezmeme dve susedné čísla x a y, kde x je naľavo od y spĺňajúce $x > y$, a nahradiť (x, y) buď dvojicou $(y+1, x)$, alebo $(x-1, x)$. Dokážte, že vieme vykonať iba konečne veľa operácií. (IMO Shortlist 2012 C1)

Úloha 13. V rovine je n červených a n modrých bodov. Žiadne 3 neležia na priamke. Dokáž, že vieme nájsť n úsečiek spájajúcich červený a modrý bod tak, že žiadne 2 úsečky nemajú spoločný bod.

Ťažšie úlohy

Úloha 14. Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8. Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz? (KMS, 2003/04, L1, 10)

Úloha 15. Na začiatku je 9 zo 100 štvorcov v mriežke 10×10 infikovaných. Ak štvorec susedí aspoň s 2 infikovanými štvorcami, infikuje sa tiež. Je možné, že nakoniec budú všetky štvorce infikované?

Úloha 16. Na každom políčku tabuľky 8×8 políčok sa nachádza zhasnutá lampa. V jednom ťahu si zvolíme ľubovoľnú lampu, ľubovoľný (vodorovný alebo zvislý) smer a prepneme zvolenú lampu spolu so susednými lampami vo zvolenom smere. Po nejakom počte ťahov nám ostane svietiť práve jedna lampa. Nájdite všetky políčka, na ktorých sa môže táto lampa nachádzať.

Úloha 17. Kozzy si do tabuľky 10×10 napísal čísla $1, 2, \ldots, 100$, pričom do prvého riadku napísal postupne zľava doprava čísla $1, 2, \ldots, 10$, do druhého zľava doprava čísla $11, 12, \ldots, 20$ atď. až do posledného riadku napísal zľava doprava čísla $91, 92, \ldots, 100$. Potom sa začal s tabuľkou hrať tak, že s ňou vykonával nasledujúce ťahy: V jednom ťahu si vyberie 3 za sebou idúce políčka v riadku, v stĺpci alebo na diagonále a buď krajné políčka zníži o 1 a prostredné políčko zvýši o 2, alebo krajné zvýši o 1 a prostredné zníži o 2. Po konečnom počte ťahov sa Kozzymu podarilo dostať v tabuľke znova čísla $1, 2, \ldots, 100$. Dokážte, že sú v pôvodnom poradí.

(KMS 15/16-L3-8)

Úloha 18. V kruhu sedí $2n$ ľudí, vrátane Aleša. Medzi nimi je rozdelených m sušienok. V jednom kroku môže ľubovoľný človek s aspoň 2 sušienkami zjesť jednu sušienku a druhú dať jednému zo susedov. Pre aké najmenšie m vedia ľudia pri stole zaručiť, že sa k Alešovi dostane aspoň jedna sušienka? (iKS 12, C3)

Úloha 19. Vo všetkých vrcholoch pravidelného 5-uholníka sa nachádza dvojlitrová nádoba. Alica a Bob hrajú hru. Na začiatku každého kola vezme Alica liter vody a ľubovoľne ho rozdelí medzi nádoby. Potom príde Bob a vyleje všetku vodu z niektorej dvojice susedných nádob. Alica vyhrá, pokiaľ sa jej po konečnom počte kôl podarí dosiahnuť, že niektorá nádoba pretečie. Bob vyhrá, ak sa jej to dosiahnuť nepodarí. Kto má víťaznú stratégiu? (IMO Shortlist 2009 C5)

Úloha 20. Políčka tabuľky 200×200 sú ofarbené šachovnicovo. V jednom ťahu môžeme vziať ľubovoľný obdĺžnik 2×3 a zmeniť farby na týchto šiestich políčkach (z bielej na čiernu a naopak). Vieme po konečnom počte ťahov prefarbiť všetky políčka na rovnakú farbu? (St. Peterburg Olympiad 2010)

Úloha 21. V každom políčku tabuľky $m \times n$ je napísané prirodzené číslo. V jednom kroku môžeme pripočítať rovnaké celé číslo k číslam vo 2 susedných políčkach, ak obe čísla zostanú nezáporné. Kedy môžeme po konečnom počte krokov dosiahnuť stav, že vo všetkých políčkach tabuľky je 0? (IMO Shortlist 1989)

Úloha 22. Dom má niekoľko izieb a v každej izbe sú aspoň 3 lampy, pričom dokopy je lámp párny počet. Každá lampa môže byť prepnutá práve jedným vypínačom a každý vypínač prepína (lampa buď svieti, alebo nesvieti) práve 2 lampy naraz. Dokážte, že vieme konečným počtom prepnutí vypínačmi dosiahnuť stav, kde v každej izbe aspoň jedna lampa svieti a aspoň jedna lampa nesvieti. (IMO Shortlist 2005 C1)

Úloha 23. Na začiatku je jedna gulička na pozícii $(0,0)$. Ak je na pozícii (i,j) gulička a na pozíciach $(i,j+1)$, ani $(i+1,j)$ nie je, potom môžeme z pozície (i,j) odobrať guličku a dať po 1 guličke na pozície $(i+1,j)$ a $(i,j+1)$. Dokáž, že vždy budú existovať a a b, $a+b \leq 2$ také, že na pozícii (a,b) je gulička.

(India TST 2004)

Úloha 24. Na nekonečnej šachovnici máme n^2 žetónov vo štvorci $n \times n$. V jednom ťahu môžeme zobrať dva žetóny na susedných poliach a jedným žetónom preskočiť druhý, pokiaľ je políčko, na ktoré žetón skáče voľné. Druhý žetón je zo šachovnice následne vyhodený. Pre ktoré n vieme dosiahnuť, že po niekoľkých ťahoch zostane na šachovnici práve jeden žetón?

(IMO 1993 P3)

Úloha 25. Každý člen v postupnosti $1,0,1,0,1,0,\ldots$ je súčtom predošlých šiestich mod 10. Dokáž, že sa v postupnosti nevyskytne podpostupnosť $0,1,0,1,0,1$.

Úloha 26. Petržlena už prestalo baviť hrať obyčajné piškvorky s CéDečkom. Preto si vymyslel inú hru, podobnú piškvorkám. Hrá sa na nekonečnom štvorčekovom papieri. Petržlen začína a označí nejaké neoznačené políčko krížikom, potom CéDečko označí nejaké neoznačené políčko krúžkom a takto sa ďalej striedajú. Vyhráva hráč, ktorého znak vyplní štvorec 2×2. Dokáže Petržlen vo svojej hre vždy vyhrať?

(KMS 11/12-Z1-10)

Úloha 27. V každom políčku tabuľky $m \times n$ máme žetón, ktorý má jednu stranu čiernu a jednu bielu. V jednom z rohových políčok je žetón otočený čiernou stranou nahor, v ostatných bielou. V jednom ťahu môžeme odstrániť žetón otočený čiernou farbou nahor a otočiť všetky jeho susedné žetóny. Pre ktoré m, n vieme odstrániť všetky žetóny z tabuľky? (IMO shortlist 1998 C7)

Úloha 28. V rade je n žetónov s jednou stranou bielou a druhou čiernou. Na začiatku sú všetky žetóny otočené bielou stranou nahor. V jednom ťahu môžeme odstrániť žetón otočený bielou stranou nahor, ktorý nie je na kraji a otočiť oboch jeho susedov (pozor, ak je sused žetónu v priebehu hry odstránený, jeho susedom sa stáva ďalší žetón v rade). Dokážte, že vieme odstrániť všetky žetóny, až na dva krajné práve vtedy, keď $n-1$ nie je deliteľné 3. (IMO shortlist 2005 C5)

Úloha 29. Máme 3 kôpky s prirodzenými počtami zápaliek. Z jednej kôpky môžeme presunúť niekoľko zápaliek do druhej, pokiaľ tým zdvojnásobíme počet zápaliek v druhej kôpke. V závislosti na začiatočnom rozložení zápaliek v kôpkach určite, koľko najviac kôpok vieme vyprázdniť. (IMO Shortlist 1994 C3)

Úloha 30. Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:

(i) Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
(ii) Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2. Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q, ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť aj roboti R_1 a Q_1, aj roboti R_2 a Q_2. Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R. To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí. (IMO Shortlist 2013)

Úloha 31. V kruhu stojí $n > 2$ ľudí. Medzi nich ľubovoľne rozdelíme n mincí. V jednom kroku, môže človek s aspoň 2 mincami odovzdať po jednej minci susedom. Pre ktoré počiatočné rozdelenie môže po konečnom počte krokov nastať situácia, že každý človek má jednu mincu? IMO Shortlist 2022 C4

Úloha 32. Vo vrcholoch päťuholníka sú umiestnené celé čísla tak, že súčet všetkých piatich čísel je kladný. Ak máme tri po sebe idúce vrcholy hodnoty v poradí x, y, z, pričom $y < 0$, tak ich možno nahradiť hodnotami v poradí $x + y$, $-y$, $z + y$. Toto opakujeme, kým medzi nimi existuje aspoň jedno záporné číslo. Zistite, či tento postup musí skončiť po konečne veľa krokoch. IMO 1986 P3

Čo nemám vyriešené

Úloha 33. Vo vrcholoch 5-uholníka sú napísané celé čísla tak, že ich súčet je 2011. V jednom kroku môžeme od každého z dvoch susedných vrcholov odčítať ľubovoľné m a k protiľahlému vrcholu pričítať $2m$. Ukáž, že ak dosiahneme stav, v ktorom je vo všetkých vrcholoch okrem jedného 0 a v poslednom 2011, je tento vrchol určený počiatočnou konfiguráciou jednoznačne.

Úloha 34. Máme 2^m papierov a na každom z nich je napísané číslo 1. Budeme robiť nasledujúcu operáciu. V každom kroku zoberieme dva rôzne papiere s nie nutne rôznymi číslami a a b, následne vymažeme tieto čísla a napíšeme $a + b$ miesto nich. Dokážte, že po $m2^{m-1}$ krokoch bude súčet všetkých čísel na papieroch je aspoň 4^m. (IMO Shortlist 2014 C2)

Úloha 35. On a 999×999 board a *limp rook* can move in the following way: From any square it can move to any of its adjacent squares, i.e. a square having a common side with it, and every move must be a turn, i.e. the directions of any two consecutive moves must be perpendicular. A non-intersecting route of the limp rook consists of a sequence of pairwise different squares that the limp rook can visit in that order by an admissible sequence of moves. Such a non-intersecting route is called cyclic, if the limp rook can, after reaching the last square of the route, move directly to the first square of the route and start over. How many squares does the longest possible cyclic, non-intersecting route of a limp rook visit? (IMO Shortlist 2009 C6)

Úloha 36. Let $n \geq 2$ be a positive integer and λ a positive real number. Initially there are n fleas on a horizontal line, not all at the same point. We define a move as choosing two fleas at some points A and B, with A to the left of B, and letting the flea from A jump over the flea from B to the point C so that $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Determine all values of λ such that, for any point M on the line and for any initial position of the n fleas, there exists a sequence of moves that will take them all to the position right of M. (IMO Shortlist 2000)

Úloha 37. Starting with the triple $(1007\sqrt{2}, 2014\sqrt{2}, 1007\sqrt{14})$, define a sequence of triples (x_n, y_n, z_n) by

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{x_n(y_n + z_n - x_n)}, \\ y_{n+1} &= \sqrt{y_n(z_n + x_n - y_n)}, \\ z_{n+1} &= \sqrt{z_n(x_n + y_n - z_n)} \end{aligned}$$

for $n \geq 0$. Show that each of the sequences $\{x_n\}_{n\geq 0}, \{y_n\}_{n\geq 0}, \{z_n\}_{n\geq 0}$ converges to a limit and find these limits. (Indie TST)

Úloha 38. Some positive integers are initially written on a board, where each 2 of them are different. Each time we can do the following moves:

(i) If there are 2 numbers (written in the board) in the form n, $n+1$ we can erase them and write down $n-2$.

(ii) If there are 2 numbers (written in the board) in the form n, $n+4$ we can erase them and write down $n-1$.

After some moves, there might appear negative numbers. Find the maximum value of the integer c such that: Independetly of the starting numbers, each number which appears in any move is greater or equal to c. (Řecko TST)

Literatura a zdroje

[1] Vašek Voráček, *Invarianty a monovarianty*, sborník *i*KS, 2018.

[2] Matěj Doležálek, *Invarianty a monovarianty*, Prípravné sústredenie 2021.

[3] Jozef Rajník, *Kombinatorika*, Prípravné sústredenie 2023.

[4] Pablo Soberón Bravo, *Problem-Solving Methods in Combinatorics*, 2013.

Hinty

Hint 1. Modulo 3.
Hint 2. Farbenie uhlopriečok modulo 3.
Hint 3. Binárka.
Hint 4. Farbenie uhlopriečok.
Hint 5. Farbenie riadkov.
Hint 6. Rátajte dvojice (x, y), kde x je naľavo od y (nie nutne susedí) a $x > y$.
Hint 7. Ofarbi šachovnicovo. Pre konštrukciu dostaň všetky žetóny na jeden bod a nájdi postupnosť operácií, ktorá ich všetky presunie do iného bodu.
Hint 8. Pozerajte sa na skupiny lámp rovnakého stavu.
Hint 9. Čo sa nemení? Čo sa naopak zväčšuje?
Hint 10. Ak je súčet v nejakom riadku záporný, zmeňte znamienka.
Hint 11. Rozdeľ ich ľubovoľne a postupným presúvaním „zlepšuj" rozdelenie.
Hint 12. Uvažuj lexikografické zoradenie, kde váha čísla je väčšia čím viac je napravo. Maximum sa nemení.
Hint 13. Spoj to ľubovoľne a vylepšuj. Dôležitý je súčet dĺžok.
Hint 14. Uhlopriečky modulo 3.
Hint 15. Obvod.
Hint 16. Nájdite políčka, ktoré viete prepnúť samostatne. Ostatné vhodne ofarbite.
Hint 17. Ťažisko sa nemení (vážený priemer).
Hint 18. Navážte ľudí mocninami dvojky.
Hint 19. Aké by muselo byť rozloženie v nádobách kolo pred pretečením nádoby? Na základe toho vymysli nejakú vlastnosť rozloženia vody, ktorú vieš správnym vylievaním vždy dodržať.
Hint 20. Uhlopriečky modulo 3
Hint 21. Ofarbi šachovnicovo. Pre konštrukciu uvažuj cestu na všetkých políčkach tabuľky a postupne vynuluj všetky políčka na ceste.
Hint 22. Izby sú vrcholy a vypínače sú hrany. Nájdi cyklus.
Hint 23. Daj každému bodu váhu tak, aby sa súčet váh bodov, na ktorých sú guličky nemenil.
Hint 24. Uhlopriečky modulo 3. Pre konštrukciu odstraňuj trojice žetónov v rade.
Hint 25. Vymysli invariant, ktorý bude nejaká lineárna kombinácia posledných 6 členov.
Hint 26. Podvojičkuj políčka.
Hint 27. Konštrukciu odsledujte z malých prípadov (skúste sa zbaviť prvého nepárneho riadka, potom druhého a induktívne). Invariantová časť je ťažšia. Skúste sa pohrať s obvodom.
Hint 28. Konštrukciu určite zvládnete sami (indukciou). Druhá časť už tak ľahká nebude. Ale tak jednoducho, $aaa = bb$, $aab = ba$, $baa = ab$, $bab = aa$. Nájdite invariant, ktorý spĺňa tieto 4 „rovnice" (na a, b sa nepozerajte ako na čísla, skôr ako na nejaké operácie). Fantázii sa medze nekladú :) (inšpiráciu môžete napríklad hľadať v rovine).
Hint 29. Pre vyprázdnenie jednej kôpky skúste zmenšiť minimum. Uvažujte najmenšiu kôpku a postupne do nej dávajte zápalky z ostatných kôpok. Odpozorujte pattern na malých

číslach. Pre 3 kôpky je nutné, aby každý nepárny deliteľ bol spoločný. Vtedy sa to dá. Pozerajte na 2-valuácie.
Hint 30. Chromatické číslo grafu je monovariant.
Hint 31. Vážený súčet modulo n je invariant. Pre konštrukciu minimalizujte maximum.
Hint 32. Súčet sa nemení. Keď súčet je kladný, tak aj priemer. Keby čísla boli blízko priemeru, tak budú všetky kladné. Nájdi funkciu na bázi priemeru (zároveň by mala byť cyklicky symetrická, aby rozumne fungovala), ktorá bude monovariantom.
Hint 35. Ofarbite typom 2×2 4 farbami. Všetky okrem jedného políčka z najmenšej farby sa dajú prejsť.
Hint 37. x, y, z sú strany trojuholníka