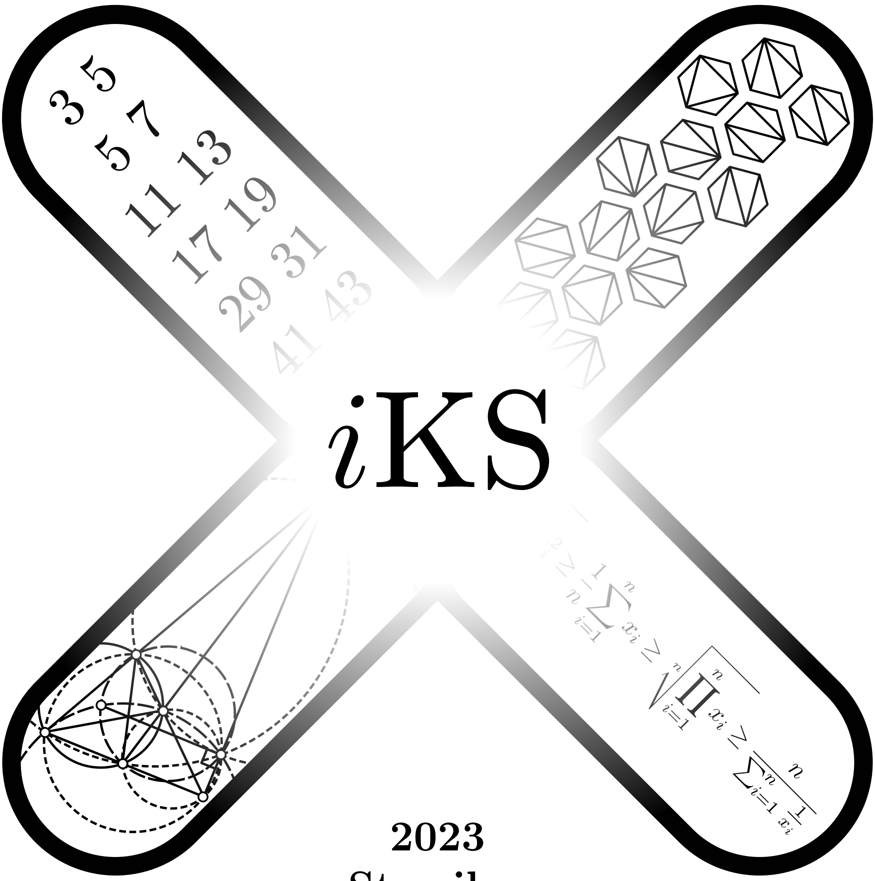

2023

Strmilov

Martin Andričík
Filip Čermák
Matěj Doležálek
Petr Hladík
Josef Minařík
Magdaléna Mišinová
Michal Pecho
Michal Staník

Kvadratické zvyšky a primitívny prvok

Martin Andričík

Abstrakt. Cieľom príspevku je oboznámiť sa s niektorými elementárnymi dôvodmi napr. na existenciu primitívneho prvku a na platnosť tvrdenia o kvadratickej reciprocite, zžiť sa s kvadratickými zvyškami a nazbierať po ceste užitočné triky.

Zvyšky mod prvočíslo

Ak sa niekde vyskytne p (a nebude mať žiadne vlastné delitele), budeme tým mať na mysli nepárne prvočíslo.

Pozorovanie. Násobenie prvkom $k \in \{1, \dots, p-1\}$ modulo p je bijekcia na tejto množine, čiže $\{1, \dots, p-1\} \equiv \{1k, \dots, (p-1)k\}$.

Toto nás oprávňuje písať veci ako $\frac{1}{a} \equiv b$, čím myslíme $a \cdot b \equiv 1$. Keď si vďaka tomu všimneme, že $1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv 1k \cdot 2k \cdots (p-1)k$, dostaneme:

Tvrdenie (Malá Fermatova veta). $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ pre $a \not\equiv 0 \pmod p$.

Pre dané a však $p-1$ obvykle nemusí byť najmenší exponent, kedy sa a vráti do 1. Takýto najmenší exponent budeme nazývať *rád* prvku $a \pmod p$ a zapisovať $\operatorname{ord}_p(a)$.

Pozorovanie. $\operatorname{ord}_p(a) \mid p-1$.

To platí, pretože inak by nám MFV dovolila tento rád zmenšiť.

Úloha 1. Najdi všechna přirozená čísla nesoudělná se všemi členy nekonečné posloupnosti $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$. (IMO 2005, 4)

Úloha 2 (Thueova lema). Nech n, a sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Potom existujú prirodzené x, y medzi 0 a $\sqrt{n}$ také, že $xa \equiv \pm y \pmod n$.

Primitívny prvok

Ďalšia otázka je, či pre dané p vieme vždy nájsť a najvyššieho rádu, teda $\operatorname{ord}_p(a) = p-1$. Tento prvok by potom svojimi mocninami dokázal vygenerovať celú množinu $\{1, \dots, p-1\}$. Ukážeme si, že existuje, a potom ho budeme nazývať *primitívny prvok* a typicky značiť g. Hodí sa nám zaviesť $\varphi(n) =$ počet prirodzených čísel nesúdeliteľných s n menších ako n. Učiníme veľmi pekné pozorovanie:

Pozorovanie. $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

To platí, pretože v množine $\{1, \dots, n\}$ existuje $\varphi(\frac{n}{d})$ čísel k s $\operatorname{NSD}(k, n) = d$.

Lema. Pre dané $d \mid p-1$ v množine $\{1,\dots,p-1\}$ existuje nanajvýš $\varphi(d)$ čísel, ktoré majú rád d.

Z posledných dvoch tvrdení už vyplýva, že:

Tvrdenie. Pre každé prvočíslo p existuje primitívny prvok (a je ich hneď $\varphi(p-1)$).

Úloha 3. Je dáno liché prvočíslo p. Najděte všechna k taková, že

$$p \mid 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k.$$

(Hungary-Israel Math Competition 2009)

Úloha 4. Nechť je p prvočíslo, které dává zbytek 3 nebo 5 mod 8. Nechť navíc platí $p = 2q+1$, kde q je také prvočíslo. Určete

$$\omega^{2^1} + \omega^{2^2} + \cdots + \omega^{2^{p-1}},$$

kde $\omega \in \mathbb{C}$ splňuje $\omega^p = 1$, $\omega \neq 1$.

Úloha 5. Určete počet všech posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel takových, že $a_{m\cdot n} = a_m \cdot a_n$ a zároveň $a_n = a_{n+2011}$ pro každá $m, n \in \mathbb{N}$. (MKS 30–6–8)

Úloha 6. Pro liché prvočíslo p definujme

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \qquad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

kde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Určete $f(p)$ pro každé p. (China TST 1993)

Úloha 7. Pro $a \in \mathbb{N}_0$ definujme $n_a = 101a - 100 \cdot 2^a$. Pro $0 \leq a, b, c, d \leq 99$ ukažte

$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100} \Longrightarrow \{a, b\} = \{c, d\}.$$

(Putnam 1994)

Úloha 8. Buď p prvočíslo a $a_1, \dots, a_n$ po dvou různá přirozená čísla menší než p. Předpokládejme, že $p \mid a_1^k + \cdots + a_n^k$ pro každé $k \in \{1, \dots, p-2\}$. Urči $\{a_1, \dots, a_n\}$. (Mathematical Reflections)

Úloha 9. Budiž q liché prvočíslo. Najdi všechna prvočísla p taková, že existuje celé číslo x splňující

$$x^{q-1} + x^{q-2} + \cdots + x + 1 \equiv p^{q-1} \pmod{p^q}.$$

(ELMO SL 2010)

Kvadratické zvyšky mod prvočíslo

Definícia. Číslu $a \in \{1, \dots, p-1\}$ hovoríme *kvadratický* (resp. *kubický*) *zvyšok*, ak má

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

(resp. $x^3 \equiv a \pmod{p}$) riešenie (BUNV budeme brať $x \in \{1, \dots, p-1\}$). Ostatné zvyšky sa nazývajú *kvadratické nezvyšky*.

Tvrdenie. Počet kvadratických zvyškov mod p je $\frac{p-1}{2}$.

Všimnime si tiež, že pre zložené číslo bude kvadratických zvyškov menej. Preto ostaňme pri prvočíslených „moduloch".

Úloha 10. Nechť je p prvočíslo tvaru $2^k + 1$. Potom je každý kvadratický nezbytek mod p primitivním prvkem.

Úloha 11. Pro liché prvočíslo p určete součet všech kvadratických zbytků a součet všech kvadratických nezbytků mod p.

Úloha 12. Dokážte, že pre každé prvočíslo p existujú celé a, b taká, že $p \mid a^2 + b^2 + 1$.

Úloha 13. Nechť je p liché prvočíslo. Najdi všechny dvojice (A, B) takové, že A, B jsou různé neprázdné podmnožiny $\mathbb{Z}_p^* = \{1, \dots, p-1\}$ mod p splňující

(i) $A \cup B = \mathbb{Z}_p^*$,
(ii) pokud $a, b \in A$ nebo $a, b \in B$, pak $ab \in A$,
(iii) pokud $a \in A$, $b \in B$, pak $ab \in B$. (Indická MO)

Úloha 14. Dokaž, že pro každé liché prvočíslo p existuje přirozené $a < \sqrt{p} + 1$, které je kvadratickým nezbytkem modulo p.

Definícia (Legendreov symbol). Pre liché prvočíslo p a $a \in \{1, \dots, p-1\}$ definujeme

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ak je } a \text{ kvadratický zvyšok,} \\ -1, & \text{ak je } a \text{ kvadratický nezvyšok.} \end{cases}$$

Tvrdenie. Platí

(i) $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$,
(ii) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$,
(iii) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. (Eulerovo kritérium)

Špeciálne napríklad $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$, práve keď p je tvaru $4k+1$.

Úloha 15 (druhý suplement). Dokážte

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & \text{ak } p \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1, & \text{ak } p \equiv \pm 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

Úloha 16. Existuje nekonečne mnoho prvočísel tvaru $4k+1$.

Úloha 17. Je dáno prvočíslo p tvaru $4k+1$. Nahlédni, že $k^k \equiv 1 \pmod p$.

Úloha 18. Dokaž, že kongruence $x^8 \equiv 16 \pmod p$ má řešení pro každé prvočíslo p.

Úloha 19. Dokaž, že neexistuje přirozené číslo a takové, že všechna tři $2^a - 1$, $2^{2a+1} - 1$, $2^{4a+3} - 1$ jsou prvočísla.

Tvrdenie (Gaussova lema). Rozdeľme si množinu $\{1, \dots, p-1\}$ na dve polovice $A = \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$ a $B = \{\frac{p+1}{2}, \dots, p-1\}$. Počet čísel z množiny A, ktoré po prenásobení nejakým $a \in \{1, \dots, p-1\}$ prejdú do B, nazvime ϕ_a. Potom $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\phi_a}$.

To nehovorí nič iné ako to, že a je kvadratický zvyšok práve vtedy, keď svojím násobením „prehadzuje do druhej množiny“ párny počet prvkov.

Úloha 20. Skúste si dokázať implikáciu „a je kvadratický zvyšok $\Longrightarrow$ ϕ_a je párna“ aj bez použitia Eulerovho kritéria – teda spočítaním, koľko prvkov prejde na druhú stranu.

Tvrdenie (Kvadratická reciprocita). Pre rôzne nepárne prvočísla p, q platí

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Úloha 21. Dokážte, že čísla tvaru $2^k + 1$ nemajú prvočíselných deliteľov tvaru $8k-1$. (Vietnam TST 2004)

Úloha 22. Dokážte, že ak má rovnica $x^2+xy+y^2 = n$ racionálne riešenie $(x, y \in \mathbb{Q})$, tak už má aj prirodzené.

Úloha 23. Dokážte

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{2ak}{p} \right\rfloor}.$$

Úloha 24. S pomocou predchádzajúcej úlohy dokážte (iným spôsobom) kvadratickú reciprocitu.

Úloha 25. Dokaž, že pro $n > 1$ nemůže nastat $n \mid 2^{n-1} + 1$.

Úloha 26. Pro každé $a \in \mathbb{N}$, které není čtverec, existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.

Kubické zvyšky

Áno, túto časť sme si nestihli prejsť na „prednáške“, a tak sú tu niektoré (ne-)analógie s kvadratickými zvyškami zhrnuté do úloh.

Úloha 27. Rozmyslite si, že a je kubickým zvyškom mod p práve vtedy, keď $a^{\frac{p-1}{\mathrm{NSD}(3,p-1)}} \equiv 1 \pmod p$. Zovšeobecnenie?

Úloha 28. Dokážte, že počet kubických zvyškov mod p bude $\frac{p-1}{3}$, resp. $p-1$, ak je p tvaru $3k+1$, resp. $3k-1$.

Úloha 29. Pre prvočíslo $p = 3k+1$ existujú mod p kubické nezvyšky a, b také, že ab je kubický zvyšok.

Úloha 30. Ukaž, že 2 je primitivní prvek mod 3^n.

Literatura a zdroje

[1] Matěj Doležálek: *Diskrétní logaritmus*, sborník *i*KS, 2020.
[2] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems of the Book*, XYZ Press, 2008.
[3] Joseph B. Dence, Thomas P. Dence: *Cubic & quartic residues modulo a prime*, Missouri J. Math. Sci. 7(1): 24–31.
[4] Martin Sleziak: poznámky k prednáške *Teória čísel* na Univerzite Komenského v Bratislave.

Hinty

Hint 1. Malá Fermatova veta a povšimnutie: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.
Hint 2. Uvažujme všetky prípustné hodnoty $xa-y$, tých bude veľa.
Hint 3. Vyrob geometrickou řadu s primitivním prvkem.
Hint 4. 2 je primitivní prvek mod p.
Hint 5. Zjevně $a_n \in \{-1,0,1\}$. Vezmi primitivní prvek, dořeš nulu.
Hint 6. Rozliš případy podle toho, zda $p-1 \mid 120$. Vyrob geometrickou řadu s primitivním prvkem.
Hint 7. Uvažuj zvlášť mod 100 a mod 101. Využij toho, že 2 je primitivní prvek mod 101.
Hint 8. Uvaž polynom $x^{\log a_1}+\cdots+x^{\log a_n}$, kde $\log a$ značí exponent x splňující $g^e \equiv a$ pro pevně zvolený primitivní prvek g. Zadání mu dává spoustu kořenů.
Hint 9. Nejdřív si najdi dostatek x takových, že levá strana má p-valuaci $q-1$. Poté dořeš tím, že nějaké z nich je mod p kořenem $x^{q-1}+\cdots+1$, ale není kořenem $\sum_{j=1}^{q-1} jx^{j-1}$.
Hint 10. Řád dělí $p-1$.
Hint 11. Geometrická řada s pomocí primitivního prvku.
Hint 12. Zvoľme „nasilu“ A, B taká, že $A+B+1\equiv 0$, a treba doladiť, aby to boli naraz kvadratické zvyšky.
Hint 13. Rozmysli si, že A, B musí být disjunktní. Kam patří primitivní prvek?
Hint 14. Je-li a nejmenší nezbytek, uvaž smysluplné $b=\frac{p+k}{a}$, $k<a$.
Hint 15. Trochu podvod: mrknite o kúsok dopredu na Gaussovu lemu.
Hint 16. Ak by ich bola konečná množina $\{q_1,\ldots,q_k\}$, tak $4q_1^2\cdots q_k^2+1$ musí byť deliteľné nejakým prvočíslom p z nich. Potom je -1 kvadratický zvyšok mod p...
Hint 17. Druhý suplement.
Hint 18. Rozlož na kvadratické polynomy.
Hint 19. Kvadratické zbytky mod a, $2a+1$, $4a+3$.
Hint 20. Dá sa na to pozreať ako na dvojité násobenie prvkom $b^2\equiv a$. Niektoré prvky prejdú z $A\to B\to B$, iné napr. $B\to A\to B$, ... stačí zrátať príspevky.
Hint 21. Rozoberte n podľa parity a bude sa hodiť Euler a nejaké jeho specialcasy.
Hint 22. Aké prvočísla je možné dostať ako x^2+xy+y^2? Môže sa hodiť Thueova lema.
Hint 23. Dá sa ukázať, že ten výraz v exponente je rovný ϕ_a z Gaussovej lemy.
Hint 24. Dá sa opäť pozrieť na obdĺžnik mrežových bodov a uhlopriečku $py=qx$. Pre fixné x, čo vyjadruje $\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\left\lfloor\frac{2ak}{p}\right\rfloor$?
Hint 25. Předpokládej zadanou dělitelnost. Rozmysli si, že $2\nmid n$ a že -1 i 2 jsou kvadratické zbytky modulo každé prvočíslo $p\mid n$. Poté vyvoď spor pomocí prvočísla $p\mid n$, které minimalizuje $v_2(p-1)$.
Hint 26. Navol si správné zbytky modulo prvočinitelé čísla a. Čínská zbytková a Dirichletova věta zařídí zbytek.
Hint 27. Možno to vymyslíte bez toho, no mne sa hodilo uvažovať o a ako o mocnine primitívneho prvku.
Hint 28. Využite predchádzajúcu úlohu, $3k+1$ case sa dá aj osobitne (bez jej využitia).
Hint 29. Predchádzajúca úloha & argument ako pri kvadratických.
Hint 30. Kvadratické zbytky mod 3 a kubické zbytky mod 9.

Generující funkce

Filip Čermák

Abstrakt. V přednášce se naučíme pracovat s takzvanými generující funkcemi, které tvoří pevný most mezi kombinatorikou a analýzou. Jejich znalost nám dá poměrně koncepční vhled do některých kombinatorických úloh. Získaná intuice se může hodit nečekaně často.

Motivační okénko

Základní myšlenku generujících funkcí můžeme dobře ilustrovat na následujících cvičeních.

Cvičení 1. Jaký koeficient má polynom $(1 + x^5 + x^7)^{20}$ u členu x^{17}?

Cvičení 2. Máme tři košíky s vejci. V prvním jsou dvě žlutá, v druhém dvě modrá a ve třetím tři červená vejce. Kolika způsoby lze vybrat 4 vejce?

V prvním příkladě si místo „roznásobení" závorek zjevně situaci chceme pouze kombinatoricky představit, zatímco druhý příklad lze přímočaře převést na násobení trojice polynomů a eliminovat tím možnost chyby. V tuto chvíli by samozřejmě kdokoli mohl říct, že jen slovíčkaříme a počítáme triviality. Korespondenci mezi kombinatorickými a analytickými úlohami lze ale dotáhnout mnohem dál, a v tu chvíli začne být překvapivě užitečná. Tak vzhůru na to!

Hodí se vědět

Shrneme pár spíše jednoduchých věcí, které se bude hodit mít na paměti.

Tvrzení (geometrická řada). Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Tvrzení (binomická věta). Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (x+1)^n.$$

Jediný nekonečný součet, který budeme do začátku potřebovat znát, je součet nekonečné geometrické řady. [*)]

[*)] Samozřejmě se hodit i další; my si ale užijeme dost zábavy i tak.

Tvrzení (nekonečná geometrická řada). Pro všechna $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

V případě $x = 0$ v předchozím tvrzení přitom používáme konvenci $0^0 = 1$. A když už jsme se dostali k těm nekonečným součtům, bylo by dobré vědět, co taková nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vlastně je. Na takovou řadu se lze dívat dvěma způsoby. Předně se na $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ můžeme dívat jenom jako na *formální řadu*, tj. posloupnost jejích koeficientů $a_0, a_1, a_2, \ldots$, za kterými jsou symboly x^n. Takovéto formální řady si můžeme sčítat i násobit jako by to byly polynomy. To odpovídá kombinatorické straně naší teorie.

Zároveň by se nám ale mohlo chtít za x dosazovat. Pokud by to šlo, odpovídala by řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nějaké funkci $f(x)$, která číslu x přiřadí onen nekonečný součet. O řadě bychom pak říkali, že *konverguje*. To ale bohužel nefunguje vždycky – pokud se koeficienty a_i chovají nepěkně, takový součet vůbec nemusí dávat smysl.

Tvrzení. Konverguje-li řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pro všechna $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pro nějaké dostatečně malé $\varepsilon > 0$, pak jsou její koeficienty jednoznačně určeny hodnotami funkce $f(x)$.

Koeficienty a_n se pak dají zrekonstruovat pomocí derivování jako $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

Protože nás ale zajímá spíš kombinatorická strana mince, konvergencemi se moc zabývat nebudeme. K tomu, aby řada konvergovala na nějakém $(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ například bohatě stačí, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platilo $a_n \leq K^n$ pro nějaké pevné číslo K. Jakmile tedy koeficienty a_n rostou dostatečně pomalu, jsou jednoznačně určeny funkcí $f(x)$. V takovém případě sčítání a násobení těchto funkcí odpovídá formálnímu sčítání a násobení původních řad.*)

Definice. Ať $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost reálných čísel. Její *generující* (často též *vytvořující*) *funkcí* rozumíme mocninnou řadu†)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pointa je následující. Máme-li nějakou posloupnost čísel, která nás zajímá, můžeme z ní vytvořit příslušnou generující funkci. Tu ale s trochou štěstí dokážeme vyjádřit v uzavřeném tvaru, třeba tak jako to umíme udělat pro nekonečné geometrické řady. Kombinatorické či algebraické vlastnosti původní posloupnosti jsou pak uschovány

---

*) Pokud Tě řady zajímají, určitě se o nich dočteš v každé knížce o matematické analýze.

†) Lze uvažovat i jiné druhy generujících funkcí, které se hodí k jiným účelům – my si ale vystačíme s těmito.

ve velmi kompaktním tvaru, ve kterém s nimi umíme jednoduše manipulovat – a pokud příslušné řady konvergují, umíme se kdykoli beztrestně vrátit zpět.

Definice. Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ označme $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$. Nazýváme ho *zobecněné kombinační číslo.*

Tvrzení. Pro $x \in (-1, 1)$ platí $(1 + x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots$

Pro $r \in \mathbb{N}$ je tedy předchozí tvrzení běžná binomická věta. Pro $r \in \mathbb{Z}$ nebo obecněji $r \in \mathbb{Q}$ ale dostáváme nové rovnosti, ve kterých najednou napravo vystupují nekonečné řady. Kromě součtu nekonečné geometrické řady tedy explicitně známe další druh součtu, díky čemu se umíme mnohem lépe vypořádat s některými dalšími generujícími funkcemi.

Seznámení

Cvičení 3 (operace s vytvořujícími funkcemi). Je dána posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ a její vytvořující funkce $a(x)$. Najděte vytvořující funkce posloupností

(i) $(a_i + b_i)_{i=0}^{\infty}$,
(ii) $(\alpha a_i)_{i=0}^{\infty}$,
(iii) $\left(\alpha^i a_i\right)_{i=0}^{\infty}$,
(iv) $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, a_0, a_1 \ldots)$,
(v) $(a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, a_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, a_2 \ldots)$,
(vi) (zajímavější) $(\sum_0^n a_i)_{n=0}^{\infty}$,
(vii) $(i \cdot a_i)_{i=0}^{\infty}$.

Návod. Pro bod (vi) uvažte součin $(1+x+x^2+\cdots)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$ a u (vii) si vzpomeňte na derivace.

Cvičení 4. Jakou generující funkci má posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$, kde a_n odpovídá počtu způsobů, jak zaplatit n korun pomocí korunových, dvoukorunových a pětikorunových mincí? Umíte ji napsat v uzavřeném tvaru?

Cvičení 5. Mějme posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ a jejich generující funkce $a(x)$, $b(x)$. Dokážete pomocí nich vyjádřit generující funkci posloupnosti, jejíž i-tý člen je $s_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0$?

Cvičení 6. Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ má generující funkci $g(x)$. Jakou generující funkci pak bude mít posloupnost částečných součtů a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, …?

Cvičení 7. Ať p_i značí počet způsobů, jak zapsat i jako součet přirozených čísel, pakliže nezáleží na jejich pořadí. Dokážete zapsat příslušnou generující funkci jako nekonečný součin nějakých geometrických řad?

Cvičení 8. Kolika způsoby lze číslo $n \in \mathbb{N}$ zapsat jako součet k celých nezáporných čísel, jestliže záleží na jejich pořadí?

Cvičení 9. Kombinatoricky nahlédněte $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{m-1} x^j$.

Cvičení 10. A teď přes zobecněnou binomickou větu: $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{m-1} x^j$.

Úložky

Začneme několika pěknými úlohami, které nevyužívají žádnou komplikovanou teorii – jenom trikovou práci s posloupnostmi a jejich generujícími funkcemi. Ačkoli se může hodit znát postupy z dalších částí přednášky, právě nyní bychom mohli pochopit, o co vlastně jde, a naučit se generující funkce intuitivně používat.

Úloha 1. Pro $n \in \mathbb{N}$ spočtěte $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2$.

Úloha 2. Dokažte, že $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Úloha 3. Máme pytel jablek, hrušek, pomerančů a banánů. Chceme vyrobit salát z n kusů ovoce, aby

- počet jablek byl sudý,
- počet hrušek byl dělitelný pěti,
- byly v něm nejvýše 4 pomeranče,
- byl v něm nejvýše jeden banán.

Kolika způsoby to lze udělat?

Úloha 4. *Hrací kostka* je krychle, jejíž stěny jsou popsané nějakými přirozenými čísly. Navrhněte dvojici kostek, jejichž hození je ekvivalentní hodu dvojicí běžných kostek, tj. aby se všechny možné součty se objevovaly stejně často. A dokážete určit, kolik takových dvojic kostek existuje?

Úloha 5. Pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ dokažte

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots,$$

kde napravo vystupuje nekonečný součin.

Úloha 6. Přirozená čísla jsme disjunktně prokryli n aritmetickými posloupnostmi s diferencemi $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Dokažte, že $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = 1$.

Úloha 7. *Rozkladem* čísla $m \in \mathbb{N}$ rozumíme rozložení čísla m na součet přirozených čísel, jejichž pořadí nás nezajímá. Dokažte, že počet rozkladů čísla m na různá čísla je stejný jako počet rozkladů m na lichá čísla.

Úloha 8. Po celých číslech skáče kobylka. Začíná v čísle 1 a pokaždé se náhodně rozhodne zda skočí na číslo o jedna menší či na číslo o dvě větší. S jakou pravděpodobností se někdy dostane do 0?

Úloha 9. Pro sudé $n \in \mathbb{N}$ dokažte rovnost

$$\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n+2}{k} \binom{2(n-k)+1}{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

(VJIMC 2014)

Úloha 10. Je dána rostoucí posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots$ v $\mathbb{N}_0$ taková, že každé $m \in \mathbb{N}_0$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako $a_i + 2a_j + 4a_k$. Určete a_{1998}.

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 11. Najděte všechny disjunktní rozklady $\mathbb{N}_0 = A \cup B$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ má rovnice $x + y = n$, $x < y$ stejně řešení v $A \times A$ jako v $B \times B$.

Úloha 12. Přirozená čísla jsme disjunktně prokryli n aritmetickými posloupnostmi s diferencemi $r_1, r_2, \dots, r_n$. Dokažte, že $r_i = r_j$ pro nějaké $i \neq j$.

Úloha 13. Vrcholy pravidelného n-úhelníku jsou obarveny několika barvami. Vrcholy každé barvy navíc opět tvoří pravidelný mnohoúhelník. Dokažte, že dva z nich mají stejný počet vrcholů.

Úloha 14. Dokažte, že $\sum \binom{k}{n-k} = F_{n+1}$, kde na levé straně sčítáme přes všechna smysluplná k a F_i značí i-té Fibonacciho číslo.

Úloha 15. Sečtěte $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

Derivace

Jedním ze šikovných způsobů, jak si ulehčit práci, je derivování a integrování. Jeli totiž řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergentní na nějakém neprázdném intervalu, jejím zderivováním dostaneme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. Zintegrováním původní řady naopak získáme řadu $c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$ pro nějaké reálné c.

Tvrzení (vlastnosti derivace). Pokud existují $f'(x)$ a $g'(x)$, funkce h splňuje $h(t) = x$ a existuje $h'(t)$, a posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ splňuje $|a_i| \leq K^i$ pro nějakou konstantu K, potom platí

(i) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,

(ii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(iii) $(f(h(t))' = f'(x)h'(t) = f'(h(t))h'(t)$,

(iv) $(x^m)' = mx^{m-1}$ pro každé celé (!) číslo m,

(v) $\displaystyle\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$.

Úloha 16. Vyjádřete explicitně součet $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Pokud se nudíte, postup předchozí úlohy lze bez problému použít na zjištění součtů tvaru $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, nebo i jakékoli vyšší mocniny, kterou si předem vyberete.

Úloha 17. Pro $n \in \mathbb{N}$ spočtěte hodnotu $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Úloha 18. Přirozená čísla jsme disjunktně prokryli n aritmetickými posloupnostmi s diferencemi po řadě $r_1, r_2, \ldots, r_n$ a počátečními členy po řadě $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokažte, že $\frac{a_1}{r_1} + \frac{a_n}{r_2} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} = \frac{n-1}{2}$.

Umět řady derivovat a integrovat se společně s dalšími postupy hodí docela často. Předchozí dvě úlohy tvořily jen lehkou ochutnávku – v dalších částech přednášky nabyté znalosti znovu využijeme.

Rekurence

Pomocí generujících funkcí lze přímočaře řešit různé rekurence. Pro různé speciální druhy rekurencí existují přehlednější způsoby řešení, generující funkce lze ale použít dost obecně.

Úloha 19. Definujme $a_0 = 0$, $a_{i+1} = 2a_i + 1$ pro $i \geq 1$. Vyjádřete explicitně a_n.

S použitím stejného přístupu a trochy hrubé síly lze vyjádřit i členy jiných rekurentně zadaných posloupností. Často je přitom ale potřeba rozkládat všelijaké racionální funkce na parciální zlomky. Předveďme si to na několika příkladech. Ačkoliv je třeba trochu počítat, není se čeho bát.

Úloha 20 (Fibonacciho čísla). Ať $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Vyjádřete explicitně F_n.

Vytvořující funkce ale začnou být skutečně potřeba, jakmile rekurence přestanou být lineární. Samozřejmě pokud řešení umíme tipnout, typicky je triviální řešení dokončit indukcí. Takový tip ale vůbec nemusí být lehký – a generující funkce ho umí udělat samy.

Úloha 21. Spočtěte explicitně členy posloupnosti splňující $x_{n+2} - 6x_{n+1} - 9x_n = 2^n + n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$, přičemž $x_1 = x_0 = 0$.

Ponaučením z této části by tedy mělo být, že počítání členů mnoha rekurentních posloupností jde jednoduše převést do jazyka generujících funkcí, které pak řešíme jako „běžné rovnice“. Pokud nám přitom přeje štěstí a máme zkušenosti, z vyjádření generujících funkcí zvládneme zpětně vyčíst hledanou posloupnost. Až budeme mít více znalostí, vyřešíme si i pár zajímavějších rekurencí.

Zobecněná binomická věta (a rekurence podruhé)

Jakmile tedy při výpočtech dospějeme ke generujícím funkcím, kde se výrazy $(1 + x)^r$ vyskytují ve jmenovatelích či dokonce v odmocninách, už z nich budeme umět explicitně vyjádřit členy příslušné posloupnosti. V mnoha případech se samozřejmě dá zobecněné binomické větě vyhnout, často ale podstatným způsobem pomůže.

Úloha 22. V košíku je 30 modrých, 40 červených a 50 bílých míčků. Kolika způsoby lze vybrat 70 míčků?

Úloha 23. Dokažte $\displaystyle\sum_{a+b=n} \binom{2a}{a}\binom{2b}{b} = 4^n$.

Úloha 24. S jakou pravděpodobností padne při hodu 12-ti hracími kostkami přesně 30?

Úloha 25. Kolik existuje slov z písmen a, b, c, d délky n, ve kterých se nikde vedle sebe nevyskytují písmena a, b?

Úloha 26 (Catalanova čísla). Máme čtverec $n \times n$ rozdělený na jednotkové čtverce. Ať c_n značí počet cest z levého dolního do pravého horního rohu původního čtverce, které vedou po hranách menších čtverečků směrem doprava či nahoru a zůstávají celou dobu pod diagonálou (můžou se jí dotknout). Spočtěte c_n.

Úloha 27. Uvažme všech 26^{26} všech slov délky 26 nad anglickou abecedou. Nechť má každé slovo váhy $\frac{1}{k+1}$, kde k je počet nepoužitých písmen v daném slově. Dokažte, že suma vah přes všechna slova je 3^{75}. (IMC 2015)

Literatura a zdroje

[1] Jakub Löwit: *Vytvořující funkce*, Branná 2019.

[2] David Hruška, *Vytvořující funkce*, sborník iKS, 2017.

[3] Evan Chen: *Summations*, `https://web.evanchen.cc/handouts/Summation/Summation.pdf`.

[4] Cody Johnson: *Generating functions.*

[5] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems from the Book*, XYZ Press, 2008.

[6] `http://www.artofproblemsolving.com/community`

Hinty ke cvičením

Hint 1. Tento koeficient se dá kombinatoricky vyjádřit jako $\binom{20}{1} \cdot \binom{19}{2} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 9}{2} = 3420$.
Hint 2. Násobte $(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$, koeficient u x^4 je 8.
Hint 4. $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$.
Hint 5. $a(x) \cdot b(x)$.
Hint 6. $\frac{1}{(1-x)} \cdot g(x)$.
Hint 7. $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$.
Hint 8. $\binom{n+k-1}{k-1}$.
Hint 9. $\frac{1}{(1-x)^m} = (1+x+x^2+\cdots)^m$.
Hint 10. Mínus nemá nikdo rád...

Hinty k úlohám

Hint 1. Člen u x^n v $(x+1)^n(x-1)^n$.
Hint 2. Uvažte koeficient u x^n v polynomu $(1+x)^{2n}$.
Hint 3. Jsou to koeficienty řady $\frac{1}{(1-x)^2}$, salát z n kusů ovoce lze proto připravit $n+1$ způsoby.
Hint 4. Rozložte polynom $f = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, jak jen to jde. Součty po hodu dvěma kostkami pak odpovídají polynomu f^2.
Hint 5. Jednoznačné vyjádření čísel ve dvojkové soustavě.
Hint 6. Rozepište do rovnosti geometrických řad, $\frac{x}{1-x} = \frac{x^{a_1}}{1-x^{r_1}} + \frac{x^{a_2}}{1-x^{r_2}} + \cdots + \frac{x^{a_n}}{1-x^{r_n}}$. Zbavte se výrazu $1-x$ a pošlete $x \to 1$.
Hint 7. Nahlédněte, že počet rozkladů má generující funkci danou nekonečným součinem geometrických řad $\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$. Pomocí stejných metod převeďte úlohu na ověření nějaké rovnosti nekonečných součinů a pak s nimi vhodně hrajte.
Hint 8. Označme a_i počet posloupností skoků začínajících v 0, které se dostanou do 0 poprvé po i skocích. Dále ať b_i značí stejný počet pro posloupnosti začínající v čísle 3. Všimněte si vztahu mezi generujícími funkcemi.
Hint 9. Nejprve si všimněte rovnosti $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{m-1} x^j$. Interpretujte levou stranu zadání jako nějaký koeficient součinu dvou vhodných řad.
Hint 10. Uvažte funkci $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^{a_i}$. Hrajte si se se součinem jí samé při vhodném dosazení tak, aby vyšlo $\frac{1}{1-x}$.
Hint 11. Uvědomte si, že pokud je řešením pár (x, y), pak je řešením i (y, x) a to v obou případech. Generující funkce f, g pro A a B pokryjí celé $\mathbb{N}_0$. Také musí platit, že mají stejný počet řešení dané rovnice, až na případy $x = y$ vytvořte soustavu a hrajte si.

Hint 12. Uvažte stejný rozklad jako v úloze 6. Běžte na to sporem. Vezměte největší diferenci a zkuste dosadit něco vhodného komplexního. Třeba vhodnou komplexní odmocninu z 1.

Hint 13. Rozmyslete si, že jde o specifické pokrývání prvních n čísel aritmetickými posloupnostmi. Zkuste využít příkladů, které měli podobný styl.

Hint 14. Udělejte vytvořující funkci se sumou na levé straně a prohoďte sumy. Poté už by to mělo jít snadněji. Trik si zapamatujte!.

Hint 15. Uvažte vytvořující funkci této sumy pro n a prohoďte sumy (zapamatujte si tenhle trik!). Vyjde $\binom{n}{m}2^{n-m}$.

Hint 16. Vezměte geometrickou řadu. Derivujte, derivujte!

Hint 17. Derivujte binomickou větu, dosaďte 1. Vyjde $n2^{n-1}$.

Hint 18. Zderivujte, dosaďte 1 a použijte identitu pro součet převrácených hodnot diferencí.

Hint 19. Vyjde $2^n - 1$.

Hint 20. Po delším výpočtu vyjde $(1 + x + x^2)(x + x^2 + x^3)(1 + x)(1 + x)$.

Hint 21. Převeďte na vytvořující funkce a prostě počítejte...

Hint 22. Začněte stejně jako v prvním cvičení. Místo přímého roznásobování polynomů použijte vztahu $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ a zobecněné binomické věty.

Hint 23. Vytvořující funkci pravé strany znáte a suma vlevo odkazuje na násobení řad. Rozviňte $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ pomocí zobecněné binomické věty do mocninné řady.

Hint 24. Začněte stejně jako v prvním cvičení. Místo přímého roznásobování polynomů použijte vztahu $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ a zobecněné binomické věty.

Hint 25. Sestavte soustavu z rekurentního vzorce pro počet slov daného typu. Převeďte na problém vytvořujících funkcí. Písmena a, b a c, d mají vždy stejnou vytvořující funkci.

Hint 26. Nahlédněte rekurentní vztah $c_n = c_0c_{n-1} + \cdots + c_{n-1}c_0$, se kterým pak pracujte v řeči generujících funkcí.

Hint 27. Uvažte rekurenci pro počet slov délky n, které nepoužily i písmen. Podívejte se, jaký vztah to dává na vytvořující funkce. Víte, že $\int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}$?

Analytické metody v olympiádní teorii čísel

Matěj Doležálek

Abstrakt. Základní myšlenkou analytické teorie čísel je vzít divokou veličinu, která v sobě kóduje zajímavou informaci (třeba rozložení prvočísel), odhadnout ji hezčí funkcí a něco z toho vyvodit. Ukážeme si, že myšlenky podobného rázu mohou najít uplatnění i v olympiádních úlohách, a prozkoumáme také, jak může konvergence posloupností pomoci v úlohách s celými čísly.

Definice (asymptotická notace). Buďte f, g funkce definované na kladných reálných číslech. Řekneme, že funkce $f(x)$ *je* $O(g(x))$, pokud existuje konstanta C splňující $|f(x)| \leq Cg(x)$ pro všechna dostatečně velká x. Tuto skutečnost zapisujeme $f \in O(g(x))$ a méně formálně též $f(x) = O(g(x))$.

Úmluva. Symbolem log budeme značit přirozený logaritmus.

Úloha 1 (motivační). Přirozené číslo n nazveme *mocninové*, pokud $n = x^k$ pro nějaká přirozená x, k, kde $k \geq 2$. Nechť je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rostoucí posloupnost, v níž jsou seřazena všechna mocninová čísla. Dokaž, že pro nekonečně mnoho indexů i je $a_{i+1} - a_i$ násobkem čísla 2021. (iKS 10–N6)

Řešení. Všimněme si, že $(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$, takže když se pro nějaké $a \equiv 1010 \pmod{2021}$ mezi a^2 a $(a+1)^2$ nenachází žádné další mocninové číslo, dojde k dělitelnosti, kterou chceme. Teď jen stačí dokázat, že se to děje nekonečně mnohokrát. Ukážeme, že (nečtvercových) mocninových čísel je jednoduše moc málo na to, aby zkazila (skoro) všechny výskyty hledaného jevu.

Uvažujme nějaké přirozené N. V rozmezí 1 až N je nachází $\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ čtverců a přitom mezi každými 2021 dvěma z nich se nachází jeden, jehož základ dává zbytek 1010 modulo 2021. Lze tedy říci, že v 1 až N se vyskytne alespoň $\left\lfloor \frac{1}{2021}\sqrt{N} \right\rfloor$ dvojic $a^2, (a+1)^2$ s $a \equiv 1010 \pmod{2021}$. Aby nám taková dvojice nedala vyhovující index i, musí se mezi těmito dvěma čtverci nacházet další mocninové číslo. To nemůže být další čtverec, takže to bude nějaká třetí nebo větší mocnina.

Kolik je takových v rozmezí 1 až N? Mělo by být $x^k \leq N$ pro $x \geq 2$, $k \geq 3$. Pro jedno fixní k je takových dvojic (x, k) zjevně nanejvýš $\sqrt[k]{N} \leq \sqrt[3]{N}$. Navíc nemusíme uvažovat všechna k, díky $x \geq 2$ musí být $2^k \leq N$, tedy $k \leq \log_2 N$. Dohromady tak dostáváme, že vyšších mocninových čísel, která by se mohla vetknout mezi naše čtverce, je jen $O(\sqrt[3]{N} \log N)$. To je ale asymptoticky méně, než kolik máme dvojic čtverců, což roste až na konstantní násobek jako $\sqrt{N}$.

Máme tedy mnohem méně „problémových čísel“ než dvojic, které by jimi mohly být „rozbity“. Nekonečně mnoho dvojic (dokonce valná většina z nich) tak zůstane nerozbito, takže máme vyhráno.

Poznámka (kapitoly a jak je číst). Tento příspěvek se zabývá mnoha nástroji a většina úloh v něm je poměrně těžká. **Rozhodně jej proto nechceš číst popořadě!** Naopak doporučuji přeskakovat z místa na místo a vyzkoušet si úlohy ze všech kapitolek. Ty jsou na sobě povětšinou nezávislé, výjimkou jsou (obzvláště) prvočíselné sumy, jejichž znalosti a ideje se mohou hodit při odhadech v prvočíselném union boundu.

Asymptotika valuací a polynomů

Na rozehřátí si zkusíme rozmyslet, jak rychle nebo pomalu že nám to rostou nějaké každodenní objekty teorie čísel – budeme si hrát s celočíselnými polynomy a s p-valuacemi. Pro jistotu následuje rychlé shrnutí všeho důležitého o p-valuacích. U polynomů si povětšinou vystačíme s vědomím, že (nekonstantní) polynomy utíkají do nekonečna a polynomy většího stupně utíkají rychleji.

Definice. Pro prvočíslo p rozumíme *p-valuací celého čísla n* (značíme $v_p(n)$) největší exponent k takový, že $p^k \mid n$. Pro nulu dodefinováváme $v_p(0) = \infty$, pro racionální čísla $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$.

Tvrzení (turboshrnutí p-valuací). Pro přirozená*) a, b a prvočíslo p platí:

(i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,
(ii) $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$, pro $v_p(a) \neq v_p(b)$ už v uvedené nerovnosti dokonce musí nastat rovnost,
(iii) $v_p(a) \leq \log_p(a)$,
(iv) $v_p(a!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{a}{p^j} \right\rfloor = \frac{a - s_p(a)}{p-1}$, kde s_p je ciferný součet v soustavě o základu p,
(v) $v_p\left(\binom{a+b}{b}\right) =$ počet „přenosů jedničky“ při sčítání $a + b$ pod sebe v soustavě o základu p,
(vi) pokud liché p dělí $a - b$, ale nedělí a, b, pak $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$,
(vii) jsou-li x, y lichá a n sudé, pak $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$.

Úloha 2. Pro polynom f s celočíselnými koeficienty existuje posloupnost po dvou různých přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$0 = f(a_1), \qquad a_1 = f(a_2), \qquad a_2 = f(a_3), \qquad \dots$$

Jaký může být stupeň f? (Turnaj měst 2003)

Úloha 3. Jsou dány nenulové polynomy f, g s celočíselnými koeficienty takové, že $f(n) \mid g(n)$ pro nekonečně mnoho přirozených n. Nahlédni, že $g = f \cdot h$ pro nějaký polynom h s racionálními koeficienty.

*) Některé z uvedených vlastností platí i pro celá či dokonce racionální a, b – zkus si rozmyslet které.

Úloha 4. Je dáno liché prvočíslo p. Dokaž, že pro všechna dostatečně velká přirozená čísla x má jedno z čísel $x, x+1, x+2, \ldots, x+\frac{p-1}{2}, x+\frac{p+1}{2}$ prvočíselného dělitele většího než p. (China Southeast 2020)

Úloha 5. Přirozené číslo nazveme *palindromem*, pokud se nezmění obrácením pořadí jeho cifer v desítkové soustavě. Najděte všechny polynomy f s celočíselnými koeficienty takové, že $f(n)$ je palindrom pro každé přirozené n.

Úloha 6. Je dáno přirozené číslo k. Dokaž, že existuje N takové, že pro všechna $n \geq N$ má $\binom{n}{k}$ alespoň k různých prvočíselných dělitelů. (China TST 2010)

Úloha 7. Buď f nekonstantní polynom s celočíselnými koeficienty. Potom existuje nekonečně mnoho prvočísel, jež dělí nějaké nenulové $f(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

(Schurova věta)

Převrácené hodnoty

Občas dovedeme o posloupnosti/množině něco vyčíst z řady převrácených hodnot. S nekonečnými sumami a limitami si zatím dovolíme zacházet jen intuitivně – pokud by drahého čtenáře zajímala pořádná definice, nechť mrkne do kapitolky o konvergentních celočíselných posloupnostech.

Úmluva. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost nezáporných reálných čísel. Pokud je součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konečný, řekneme, že tato řada *konverguje*. V opačném případě říkáme, že *diverguje*.

Úloha 8. Uvažujme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokaž, že pokud pro nějaké $k > 0$ suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^k}$ diverguje, pak existuje nekonečně mnoho prvočísel, jež dělí nějaké a_n.

Úloha 9. Je dána neklesající posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje $\lim_{n\to\infty} a_n/n = 0$. Dokaž, že posloupnost $\{n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje všechna přirozená čísla.

Úloha 10. Jsou dána celá čísla $a, b > 1$. Dokaž, že nějaký násobek a ve svém zápisu v soustavě o základu b obsahuje každou z číslic $0, 1, \ldots, b-1$ alespoň jednou.

(upravený Putnam)

Úloha 11. Rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $a_n < 100n$ pro všechna n. Dokaž, že v ní lze nalézt nekonečně mnoho členů, jejichž zápisy v desítkové soustavě obsahují 2023 po sobě jdoucích jedniček.

Sumy a prvočísla

Často se nám stane, že potřebujeme odhadnout jakousi sumu přes prvočísla. V této kapitolce si k tomu představíme potřebná fakta a nástroje. Pokud zde něco označuji jako „Fakt“, pak tím chci říct, že pořádný důkaz je nad naše možnosti nebo z jiného důvodu nestojí za to.

Úmluva. Pokud sumu nebo produkt indexujeme písmenkem p, pak za jeho hodnoty bereme jen prvočísla.

Tvrzení (integrální odhad sumy). Nechť je f nerostoucí integrovatelná funkce definovaná na intervalu $[a-1, b+1]$, kde a, b jsou celá čísla. Potom platí

$$\int_{a-1}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{n=a}^{b} f(n) \geq \int_{a}^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analogický odhad lze odvodit i pro neklesající funkci.

Úloha 12. $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + O(1).$

Ve skutečnosti platí ještě silnější vztah $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(1/x)$, kde $\gamma = 0{,}577\ldots$ je konstanta. Důkaz vyžaduje sofistikovanější formu integrálního odhadu.

Fakt. $\displaystyle\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + O(1).$

Úloha 13. Nechť $\omega(n)$ značí počet různých prvočíselných dělitelů přirozeného čísla n. Dokaž, že platí $\sum_{n\leq x} \omega(n) = x \log\log x + O(x)$.

Úloha 14. $\displaystyle\prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0.$

Úloha 15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Fakt. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64\ldots$

Úloha 16. Nahlédni (neformálně), že v intervalu $[1, x]$ je zhruba $\frac{6}{\pi^2}x$ bezčtvercových čísel.

Fakt. $\displaystyle\sum_{p} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}.$

Na závěr kapitoly si ještě označme *prvočíselnou funkci* $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$. Zde nemáme čas si o ní cokoliv dokázat pořádně, k řešení úloh by mělo stačit následující:

Fakt (prvočíselná věta). $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Tím se myslí, že poměr $\pi(x)$ a $\frac{x}{\log x}$ se pro velká x blíží k 1.

Úloha 17. $\displaystyle\sum_{p\leq x} \frac{1}{\log p} = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$

Úloha 18. Nechť $\Omega(n)$ značí počet prvočíselných dělitelů n včetně násobnosti. Dokaž, že pro libovolné dané přirozené číslo k má rovnice $\Omega(n) = k$ jen $O\left(\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right)$ řešení v intervalu $[1, x]$.

Prvočíselný union bound

Vyzbrojeni nástroji na krocení prvočíselných sum můžeme představit mírně komplikovanější verzi myšlenek z úvodní motivační úlohy – chceme-li ukázat existenci (nekonečně mnoha) „dobrých“ čísel, stačí odhadnout počet těch „špatných“. Jelikož je mnoho jevů v teorii čísel dosvědčeno nějakým prvočíslem, budou se v našich odhadech mnohdy vyskytovat právě sumy přes prvočísla.

Úloha 19. Jsou dána celá čísla a_1, a_2, b_1, b_2 taková, že $a_i > 0$ a zároveň $\gcd(a_i, b_i) = 1$. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho t takových, že $a_1 t + b_1$ i $a_2 t + b_2$ jsou bezčtvercová čísla. (Iran 2020)

Řešení. Aby $a_i t + b_i$ nebylo bezčtvercové, musí to být násobek nějakého p^2. Prozkoumejme tedy řešení kongruence $a_i t + b_i \equiv 0 \pmod{p^2}$. Mohou nastat dva případy:

- $p \mid a_i$. Potom z nesoudělnosti $p \nmid b_i$, takže $a_i t + b_i$ nikdy není ani násobkem p.
- $p \nmid a_i$. Potom má kongruence jediné řešení $t \equiv -b_i/a_i \pmod{p^2}$.

V souhrnu tedy existuje nanejvýš jedna zbytková třída, která kongruenci řeší. Uvažujeme dvě aritmetické posloupnosti, takže pro jedno p můžeme mít zakázány nanejvýš dvě zbytkové třídy mod p^2, tudíž mezi libovolnými p^2 po sobě jdoucími přirozenými čísly jsou jen (nanejvýš) dvě zakázána prvočíslem p.

Podívejme se na počet všech zakázaných t menších nebo rovných nějakému N. Odhadneme jej shora jako součet počtů čísel zakázaných jednotlivými prvočísly – stačí přitom ale zahrnout jen prvočísla menší než odmocnina ze všech relevantních $|a_i t + b_i|$. Tuto velikost členů našich aritmetických posloupností stačí velmi hrubě odhadnout třeba jako kN, kde $k = |a_1| + |a_2| + |b_1| + |b_2|$ je konstanta. Počet zakázaných čísel tak bude odhadnut sumou

$$\sum_{p \le \sqrt{kN}} 2 \left\lceil \frac{N}{p^2} \right\rceil \le 2N \sum_{p \le \sqrt{kN}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p \le \sqrt{N}} 2.$$

První člen shora odhadneme jako $2cN$, kde $c = \sum_p \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}$, druhý jako

$$2\pi(\sqrt{kN}) = O\left(\frac{\sqrt{N}}{\log \sqrt{N}} \right),$$

což je asymptoticky menší než N. Asymptoticky největším členem v odhadu tak je $2cN$, což je lineární funkce s vedoucím koeficientem ostře menším než 1. Pro dost velká N tedy získáme lineárně mnoho (zhruba $(1-2c)N$) nezakázaných t, pro která budou obě $a_i t + b_i$ bezčtvercová.

Poznámka (pozor na zaokrouhlovací členy). V předchozí úloze jsme viděli, že kromě „té hlavní“ sumy $\sum_p \frac{1}{p^2}$ jsme v úloze dostali i členy plynoucí z odhadu (horní) celé části. Člověk může při přemýšlení o podobných úlohách snadno nabít dojmu, že tyto části odhadu lze zanedbat, tak tomu ale není! K jejich vypořádání typicky používáme prvočíselnou větu, a pokud by tyto zaokrouhlovací odhady připadaly v úvahu pro příliš mnoho prvočísel, mohly by se posčítat na něco příliš velkého.

Poznámka (ředění posloupností). Uvažujme, že se v úloze snažíme o to, aby nějaké výrazy (třeba prvočísla nebo jejich mocniny) nedělily moc členů nějaké posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (třeba aritmetické posloupnosti). Často dovedeme některé konkrétní výrazy (prvočísla) úplně vyřadit ze hry, když se místo celé $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme dívat jen na vhodně zvolenou podposloupnost. Ilustrováno na příkladu: u posloupnosti $an + 1$ možná musíme řešit, kolik členů je dělitelných jedním zvoleným prvočíslem q. Když se ale zaměříme jen na podposloupnost $aqn + 1$, jsme v klidu – všechny její členy jsou s q nesoudělné.

V důsledku toho nám z prvočíselné sumy, která se v úloze vyskytne, téměř zadarmo zmizí člen od prvočísla q. S tímto trikem se tak často přihodí, že tam, kde na první pohled potřebujeme prvočíselnou sumu menší než 1, nám postačí, aby byla konvergentní. Vyzkoušej si to na následující úloze!

Úloha 20. Jsou dána přirozená čísla $a_1, \ldots, a_k$. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho t takových, že $a_i t + 1$ jsou bezčtvercová čísla pro všechna $i = 1, \ldots, k$.

Úloha 21. Nahlédni, že kdyby $\sum_p \frac{1}{p}$ konvergovalo, pak by nekonečně mnoho přirozených čísel nemělo žádné prvočíselné dělitele. (elementární důkaz $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$)

Úloha 22. Dokaž, že pro nekonečně mnoho přirozených n je $n^2 + 1$ bezčtvercové číslo. (China TST 2015)

Úloha 23. Posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *roztomilou*, je-li rostoucí a zároveň splňuje $a_n < 9000n$. Index i nazveme *hustým*, pokud $a_i \mid \operatorname{lcm}(a_1, \ldots, a_{i-1})$, a *řídkým*, pokud $a_i \nmid \operatorname{lcm}(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Rozhodni, zdali každá roztomilá posloupnost musí mít nekonečně mnoho

(i) hustých indexů,
(ii) řídkých indexů. (EMMO 2016)

Úloha 24. Budiž $a_1, a_2, \ldots$ rostoucí posloupnost, v níž jsou seřazena všechna bezčtvercová přirozená čísla. Dokaž, že pro nekonečně mnoho indexů i platí $a_{i+1} - a_i = 2020$. (China Southeast 2020)

Úloha 25. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že číslo $n^2 + 1$ nemá žádného dělitele tvaru $k^2 + 1$ vyjma sebe sama a jedničky. (Iran 2010)

Úloha 26. Pro přirozená b a x označujme jako $s_b(x)$ ciferný součet čísla x zapsaného v soustavě o základu b. Dokaž, že pro libovolné dané přirozené k umíme zvolit nekonečně mnoho přirozených n splňujících $s_p(n) > k$ pro všechna prvočísla p.

Úloha 27. Dokaž, že existuje kladná reálná konstanta c s následující vlastností: kdykoliv jsou a, b, n přirozená čísla taková, že pro libovolná $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ platí $\gcd(a + i, b + j) > 1$, potom je splněna nerovnost $\min\{a, b\} > (cn)^n$. (zesílené USAMO 2014/6)

Úloha 28. Dokaž, že existuje konstanta $c > 0$ s vlastností: kdykoliv je n přirozené číslo a zvolíme n různých čísel nepřevyšujících $2n$, pak některá dvě z nich mají největšího společného dělitele většího než cn. (Tuymaada 2007)

Konvergentní celočíselné posloupnosti

Když už se bavíme o technikách z pomezí teorie čísel a matematické analýzy, byl by hřích nezmínit konvergentní celočíselné posloupnosti. A co že je to teda ta konvergence?

Definice. Řekneme, že reálné číslo a je *limitou* posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje N takové, že pro všechna $n \geq N$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Říkáme též, že (posloupnost) a_n *konverguje* k a.

Říkáme-li, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* k nějakému součtu s, pak tím myslíme, že k limitě s konverguje posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Tvrzení (turboshrnutí limit). Nechť jsou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupností konvergující po řadě k a, b. Potom:

(i) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $a + b$,
(ii) $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k ab,
(iii) pokud $b \neq 0$, pak $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k a/b,
(iv) je-li f funkce spojitá v a, pak $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $f(a)$,
(v) je-li $a = b$ a pro všechna dostatečně velká n platí $a_n \leq c_n \leq b_n$, pak i posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k a.

Cvičení. Rozhodni, zda následující posloupnosti konvergují, a případně k čemu:

(i) $\frac{p(n)}{q(n)}$ v závislosti na polynomech p, q,
(ii) $\sqrt{n-1} - \sqrt{n}$,
(iii) $\frac{n^{2023} + 10^{10^{10}}}{2^n}$.

Tvrzení (stěžejní). Má-li posloupnost celých čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu A, znamená to, že od jistého N už pro $n \geq N$ platí $a_n = A$.

Úloha 29. Jsou dána kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_k$, z nichž alespoň jedno není celé. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že n je nesoudělné s

$$\lfloor a_1 n \rfloor + \cdots + \lfloor a_k n \rfloor .$$

Úloha 30. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) takové, že $a^n + b^n$ je $(n+1)$-tou mocninou přirozeného čísla pro každé n.

Úloha 31. Je dána rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje $a_n \mid a_1 + \cdots + a_{n-1}$ pro všechna přirozená $n \geq 2001$. Dokaž, že pro všechna dostatečně velká n platí $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-1}$. (Turnaj měst 2001)

Úloha 32. Je dán kvadratický polynom f s celočíselnými koeficienty takový, že $f(n)$ je čtverec pro každé přirozené n. Nahlédni, že f je rovno čtverci nějakého lineárního polynomu.

Úloha 33. Celá čísla a, b splňují, že $a2^n + b$ je čtverec pro každé přirozené n. Dokaž, že $a = 0$. (Polsko)

Úloha 34. Přirozené číslo nazvěme *jedničkové*, pokud je v desítkové soustavě zapsáno samými jedničkami. Najděte všechny reálné polynomy f takové, že pro jedničkové n je $f(n)$ také jedničkové. (Putnam 2007)

Úloha 35. Budiž $b > 5$ celé číslo a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme x_n jako číslo se zápisem

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}5$$

v soustavě o základu b. Dokaž, že x_n je čtverec pro všechna dostatečně velká n právě tehdy, když $b = 10$. (ISL 2003)

Úloha 36. Je dán monický polynom f s celočíselnými koeficienty takový, že $f(x) = 2^n$ má pro každé $n \in \mathbb{N}$ řešení v přirozených číslech. Dokaž, že f je lineární. (iKS 8–N2)

Aplikace předchozího

Na závěr je tu pár úložek, které jako lemmátko používají něco, co bylo k vidění výše v příspěvku. Ne vždy je souvislost vidět na první chvíli, takže dobrou chuť!

Úloha 37. Nahlédni, že pro nekonečně mnoho přirozených čísel n platí $\pi(n) \mid n$.

Úloha 38. Je dáno kladné reálné číslo ν. Je-li $p_1, p_2, \ldots$ rostoucí posloupnost všech prvočísel, dokaž, že čísla $\lfloor p_n \nu \rfloor$ mají dohromady nekonečně mnoho prvočíselných dělitelů.

Úloha 39. Ukaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n splňujících dělitelnost

$$(n!)^{n+2015} \mid (n^2)!.$$

(Turkey TST 2015)

Úloha 40. Nechť p_n značí n-té prvočíslo a ν je kladné reálné číslo. Dále označme $a_n = \lfloor p_n \nu \rfloor$. Rozhodni, zda je možné, aby existovalo pouze konečně mnoho indexů k takových, že $p_i^{10} \mid \binom{2a_k}{a_k}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, 2020$. (KöMaL A.787)

Úloha 41. Nechť $\varphi(n)$ značí počet přirozených čísel menších než n, které jsou s ním nesoudělné. Dokaž, že pro nějaké přirozené m má rovnice $\varphi(x) = m$ alespoň 2015 řešení. (USA TSTST 2015)

Úloha 42. Uvažujme funkci $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která vždy přirozenému číslu s prvočíselným rozkladem $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ přiřazuje hodnotu

$$g(n) = \prod_{i=1}^{r} \alpha_i p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Dokaž, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $g(n+1) = g(n)+1$.
(VJIMC 2022)

Úloha 43. Nechť $\tau(n)$ značí počet dělitelů přirozeného čísla n a budiž dáno $\varepsilon > 0$. Dokaž, že pro všechna dostatečně velká x je v intervalu $[1, x]$ méně než εx přirozených čísel n splňujících $\tau(n) \mid n$.

Literatura a zdroje

Z následujících zdrojů jsem čerpal většinu úloh, přičemž jsem ani zdaleka nevyčerpal všechny. V [1] a v menší míře též v [3] (kapitoly 15 a 17) lze také nalézt další analytické techniky, kterým jsem se v tomto příspěvku nevěnoval, převážně proto, že obnáší větší množství teorie.

[1] Ayan Nath: *A Taste of Analytic Number Theory*, `https://www.cmi.ac.in/~ayannath/olympiad-analytic-nt.pdf`.

[2] Pavel Turek: *Konvergentní posloupnosti v* $\mathbb{N}$, sborník *i*KS, 2019.

[3] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems of the Book*, XYZ Press, 2008.

Hinty

Hint 2. No, neočekáváme spíš, že nám polynomy čísla zvětšují?

Hint 3. Vyděl se zbytkem $f = gh + r$ s $\deg r < \deg g$. Pozor na technické detaily!

Hint 4. Napiš si ke každému z čísel největší prvočíselnou mocninu z jeho rozkladu. (Fun fact: tahle úloha je děsně slabá – Størmerova věta říká, že pro všechna dost velká x musí už jen jedno z x, $x + 1$ mít prvočíselného dělitele většího než p.)

Hint 5. $f(n+1) - f(n)$ bude asymptoticky mnohem menší než $f(n)$, takže několik nejvyšších cifer v zápisu $f(n)$ se dlouho nezmění – tudíž se i několik nejmenších cifer dlouho nezmění.

Hint 6. Konstruktivnější řešení: nahlédni, že když $k < p^m \mid n - j$, $0 \leq j < k$, pak $p \mid \binom{n}{k}$. Nekonstruktivní řešení: prvočíselné mocniny v rozkladu $\binom{n}{k}$ nepřevyšují n.

Hint 7. Vyber si počáteční bod a skákej z něj modulo velký společný násobek všech „malých" prvočísel. Alternativně mrkni na úlohu 8 a využij, že $f(n)^{1/\deg f}$ je zhruba n.

Hint 8. Pokud by se v rozkladech vyskytovala jen prvočísla $p_1, \ldots, p_r$, odhadni řadu geometrickými.

Hint 9. Co se děje, když n/a_n roste?

Hint 10. Suma převrácených hodnot čísel neobsahujících jednu zvolenou číslici.

Hint 11. Zápis v soustavě o základu 10^{2022}.

Hint 12. $1/x$ se zintegruje na $\log x$.

Hint 13. Přepiš na sumu přes prvočísla a použij $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$.

Hint 14. $\sum \frac{1}{n}$.

Hint 15. Buďto odhadni integrálem, anebo nahlédni a použij tzv. *kondenzační kritérium*: je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel, pak $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum 2^n a_{2^n}$.

Hint 16. Může pomoci pravděpodobnostní intuice: s jakou pravděpodobností je „náhodné" číslo dělitelné p^2? Dělitelnosti nesoudělnými čísly jsou nezávislé jevy.

Hint 17. Odhadni zvlášť prvočísla menší a větší než $\sqrt{x}$.

Hint 18. Indukuj podle k a uvědom si, že stačí suma přes prvočísla $p \leq \sqrt[k]{x}$.

Hint 20. Z union boundu vyleze něco jako $k \sum_p \frac{1}{p^2}$. Ředěním dostatečně mnoha prvočísel zařiď, aby to bylo < 1.

Hint 21. Prostě nařeď posloupnost všech přirozených čísel.

Hint 22. Kolik kořenů mod p^2 může mít $x^2 + 1$? Pak už aplikuj standardní postup a ono to vyjde.

Hint 23. (ii) je snazší, posloupnost by pak musela být omezená. V (i) nech nedělitelnosti být dosvědčeny nějakými prvočíselnými mocninami – zjistíš, že jich není dost.

Hint 24. Chceš nacházet situaci, kdy (1) x i $x + 2020$ jsou bezčtvercová a (2) $x + 1, \ldots, x + 2019$ nejsou bezčtvercová. (1) připomíná něco, co už jsme viděli, (2) zařiď ředěním.

Hint 25. Nahlédni, že $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ má nanejvýš $2^{\omega(m)}$ řešení. Ale ω je divná funkce, odhadni ji vhodným logaritmem, aby vznikla konvergentní suma.

Hint 26. Rozmysli, kolik čísel zakazuje jedno prvočíslo; měla by z toho vzejít suma zobecňující úlohu 17. Pozor na malá n.

Hint 27. Vypiš si do tabulky $(n + 1) \times (n + 1)$ společné prvočíselné dělitele a ukaž, že prvočísla menší než εn^2 zaberou (pro vhodné ε) méně než polovinu tabulky.

Hint 28. Vhodně zvol a, b tak, aby $\prod_{a\le p\le b}(1-1/p)$ bylo dost malé. Potom najdeš v dané n-tici čísel dost takových, co mají prvočíselného dělitele $a \le p \le b$. Jeho pokrácením vyrobíš těmto číslům dělitele z intervalu $[n/b, 2n/a]$.
Hint 29. Pokud se budeme dívat jen na prvočíselná n, pak se nesoudělnost zjednoduší na nedělitelnost. Potom stačí odhad $\lfloor x\rfloor = x + O(1)$.
Hint 30. Pokud $a^n + b^n = c_n^{n+1}$, k čemu konverguje c_n?
Hint 31. Podívej se na posloupnost $\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{a_n}$.
Hint 32. Nechť $f(n) = x_n^2$, nahlédni že $x_{n+1} - x_n$ konverguje.
Hint 33. Buď $x_n^2 = a2^n + b$, pak se podívej na $2x_n - x_{n+2}$.
Hint 34. Nechť $f\left(\frac{10^n-1}{9}\right) = \frac{10^{x_n}-1}{9}$, pak se podívej na $x_n - n\deg f$.
Hint 35. Buď $x_n = y_n^2$. Pomocí posloupnost $by_n - y_{n+1}$ získáš, že $b-1$ je čtverec, a pak už umíš vše dořešit pomocí mezer mezi čtverci.
Hint 36. Nechť $f(x_n) = 2^n$, pak se podívej na $x_{n+\deg f} - 2x_n$. Jakmile narazíš na konstantu, můžeš vyvodit rovnost polynomů a najít příliš mnoho kořenů.
Hint 37. $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$.
Hint 38. $\sum \frac{1}{\lfloor p_n \nu\rfloor} \ge \frac{1}{\nu}\sum \frac{1}{p_n}$.
Hint 39. Upravuj nerovnost valuací a rozmysli si, které členy jsou podstatné.
Hint 40. Valuace kombinačního čísla se dá poznat z ciferného zápisu. Nepřipomíná to v tu chvíli některou úlohu?
Hint 41. Najdi dost velkou množinu prvočísel S takovou, že pro každé $p \in S$ nemá $p-1$ žádné dělitele z S. K tomu pomůže prvočíselná věta.
Hint 42. $g(27) = 27$, $g(169) = 26$. Nedovedeme je nějak přenásobit, aby se dostali vedle sebe a hodnota g se přitom nezměnila?
Hint 43. Toto bude hint k řešení, které znám já – nevylučuji, že existuje jednodušší. Návodná situace: co kdybychom úlohu řešili jen pro *bezčtvercová* n? Najednou to bude mnohem snazší, a přitom bezčtvercových čísel je docela hodně. Zobecni tuhle myšlenku tak, aby fungovala pro libovolně malé ε.

Teorie grafů

Petr Hladík

Abstrakt. Příspěvek obsahuje základní techniky a myšlenky, které se dají použít při řešení grafových úloh, a taky i samotné úlohy, na kterých se to dá vyzkoušet.

Pokud jste čekali, že v tomto příspěvku bude hodně drsných vět, které použijete jako kladiva na grafové úlohy, tak jste na omylu. Ačkoliv je toho už v teorii grafů dokázaného strašně moc, olympiádní úlohy se snaží být takové, aby znalost nějaké dokázané věty úlohu „nezabila“. Samozřejmě znalost pár vět může pomoct, ale není klíčem k úspěchu. Klíčem k úspěchu je jako všude v kombinatorice – myslet.

Samozřejmě občas se v tomto příspěvku nějaká ta věta vyskytne, často jen proto, že její důkaz je v zásadě pěkná úloha, a aby se vám trochu zvětšil obzor, co všechno platí, a získali jste menší nadhled.

Začneme tím, že si připomeneme nějaké základní pojmy.

Definice.

- *Grafem* G nazýváme dvojici $G = (V, E)$, kde V je konečná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.
- *Stupeň* vrcholu $d(v)$ je počet hran, které z něho vycházejí.
- *Cesta* v grafu G je posloupnost různých vrcholů taková, že každé dva po sebe jdoucí vrcholy jsou spojené hranou.
- *Kružnice (cyklus)* v grafu G je cesta a její začátek je spojen s koncem hranou.
- Graf G je *souvislý*, pokud pro libovolné dva vrcholy existuje cesta z jednoho vrcholu do druhého.
- Graf je *úplný*, pokud jsou každé dva vrcholy propojeny hranou. Úplný graf na n vrcholech označujeme K_n.
- *Doplněk* ke grafu G je graf G', který má shodné vrcholy, jenom hrany jsou mezi těmi vrcholy, mezi kterými nebyla hrana v G.
- *Strom* je souvislý graf bez cyklů.
- Graf G je bipartitní, pokud existují množiny A, B takové, že $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$ a neexistuje hrana, která by spojovala dva vrcholy z A nebo dva vrcholy z B.
- *Orientovaný graf* je graf, v kterém má každá hrana směr. Úplný orientovaný graf se nazývá *turnaj*.

Cvičení 1. Dokažte následující tvrzení:

- Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky.
- Aspoň jeden z dvojice grafů G, G' je souvislý.

- Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

  1) G je strom.
  2) G je minimální souvislý graf.
  3) G je maximální graf bez cyklů.

- Z libovolných dvou následujících tvrzení vyplývá třetí:

  1) G je souvislý.
  2) G neobsahuje cyklus.
  3) G má $n-1$ hran.

- $\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Lehké, že?

Bohužel ne všechny úlohy s grafy jsou vždy takto jednoduché. Takže, teďka si můžeme říct, jaké fígle se dají použít v grafových úlohách. Velmi užitečný fígl je indukce. V grafech se indukce dá použít různě. Základ je indukce na vrcholech, v případě nouze se dá použít indukce na hranách. Avšak někdy může být užitečná i nějaká divnější indukce.

Když děláte indukci v grafech, je dost důležité ji dělat odebráním, a ne přidáváním vrcholů. Jednak se nemusíte ujišťovat, že takto vytvoříte všechny grafy, a dále často můžete vhodně zvolit jeden vrchol, který odeberete. Případně nemusíte odebrat jen jeden vrchol, ale prostě využijete indukční předpoklad na nějakém menším grafu.

Velmi dobře se dělá indukce na stromech, často stačí odebrat list (vrchol se stupněm 1), případně všechny listy.

Na ukázku si jednu vetu dokážeme indukcí:

Věta (Turánova). Nechť G je graf, který neobsahuje K_p (tedy mezi libovolnými p vrcholy jsou aspoň dva nespojené). Potom $|E| \leq \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{p-1})$.

Zindukujte

Úloha 2. Dokažte, že pokud T je strom, pak existuje vrchol, který leží na všech nejdelších cestách v T. (Iran 2011)

Úloha 3. Nechť G je souvislý graf. Označme G^3 graf, ve kterém jsou spojené ty vrcholy, mezi kterými v G existuje cesta délky nejvýše 3. Dokažte, že G má kružnici procházející přes všechny vrcholy.

Úloha 4. Do třídy chodí konečný počet holek a kluků. *Živá* skupina kluků je taková, že každá holka zná aspoň jednoho kluka ze skupiny. Podobně, *živá* skupina holek je taková, že každý kluk zná aspoň jednu holku ze skupiny. Dokažte, že počet živých skupin kluků má stejnou paritu jako počet živých skupin holek. (Známost je vzájemná: když Pepa zná Aničku, tak taky Anička zná Pepu.) (Výběrko 2011)

Úloha 5. Na nekonečné šachovnici máme vyznačených 100 políček, po kterých se může pohybovat věž. Mezi každou dvojicí vyznačených políček se dá dostat konečným počtem tahů věže. (Věž se může pohybovat po řádcích nebo po sloupcích.) Dokažte, že umíme vyznačená políčka rozdělit na 50 dvojic tak, že políčka každé dvojice leží ve stejném řádku nebo sloupci. (Výběrko 2014)

Úloha 6. Na ostrově žije n domorodců. Každí dva z nich jsou buď přátelé, nebo nepřátelé. Jednoho dne náčelník rozkázal všem obyvatelům (včetně sebe), aby si vyrobili a nosili náhrdelník z mušliček, přičemž libovolní dva přátelé musí mít ve svých náhrdelnících aspoň jednu mušličku stejného druhu. Libovolní dva nepřátelé musí mít ve svých náhrdelnících všechny mušličky různého druhu. (Je přípustný i náhrdelník bez mušliček.)

a) Ukažte, že domorodci mohli splnit náčelníkův rozkaz.
b) Najděte nejmenší počet mušliček na to, aby domorodci určitě mohli splnit náčelníkův rozkaz.

Úloha 7. Češi a Slováci hráli proti sobě iKS-dvojboj. Ten probíhal tak, že si nejprve každý Slovák zahrál s každým Čechem řešení příkladů na rychlost a vítěz si připsal jeden bod. V duelu vyhrál ten hráč, který měl větší skill. Skill každého hráče zůstává konstantní po celou dobu turnaje.

Potom (aby taky i ti slabší měli šanci) si každý Slovák s Čechem zahrál hod kostkou. Tam vítězí ten, kdo hodí větší číslo, v případe remízy se hod opakuje, dokud není jasný vítěz. Opět si vítěz připíše bod.

Po dvojboji se zjistilo, že každý účastník získal stejný počet bodů za hod kostkou jako za řešení příkladů. Dokažte, že pro libovolného Čecha $\check{C}$ a Slováka S platí: $\check{C}$ vyhrál nad S hod kostkou právě tehdy, když vyhrál nad S v řešení příkladů.

Úloha 8. V krajině je 2016 ostrovů a 2015 mostů mezi nimi, tak aby se z libovolného ostrova dalo dostat na jiný po mostech. Následně každý ostrov pošle poštu nějakému ostrovu (může i sám sobě). Avšak platí následující: pokud je ostrov A spojený mostem s ostrovem B, tak adresát dopisu z ostrova A je spojený mostem s adresátem ostrova B nebo jde o ten stejný ostrov. Dokažte, že platí aspoň jedna z následujících dvou věcí:

1) Existuje ostrov, který poslal dopis sám sobě.
2) Existují dva ostrovy spojené mostem, mezi kterými byly navzájem poslány dopisy. (Japonsko 2010)

Úloha 9. V senátě je 51 senátorů. Senátory potřebujeme rozdělit do n výborů. Každý senátor nesnáší právě tři jiné senátory. Pokud senátor A nesnáší senátora B, neznamená to nutně, že taky senátor B nesnáší senátora A. Najděte nejmenší n, pro které je vždy možné rozdělit senátory do výborů tak, že všichni senátoři v jednom výboru se navzájem snáší. (Výběrko 2011)

Úloha 10. V zemi Jednosměrsko jsou některé města spojené cestami. Některé cesty mají přepravní kapacitu 1 a některé dokonce 2. Ví se, že součet kapacit cest, které vedou do libovolného jednoho města, je lichý. Avšak ministr dopravy chce, aby všechny cesty byly jednosměrné, a proto potřebuje všem cestám přiřadit směr. Chce to však udělat tak, aby rozdíl součtu kapacit cest, které vchází do města, a součtu kapacit cest, které z něho vycházejí, byl 1 (v absolutní hodnotě). Dokažte, že se mu to podaří. (USA TST 2011)

Zkoumaní malých častí grafu

Další dobrou metodou je zkoumání malých částí grafu. Prostě se podíváme na libovolnou trojici, čtveřici vrcholů, a zjistíme, že musí vypadat nějak speciálně, nebo prostě spočítáme něco přes malé množiny vrcholů.

Například:

Tvrzení. V turnaji označme v_i počet vítěství a p_i počet proher hráče i. Potom $\sum_{i\in V} v_i^2 = \sum_{i\in V} p_i^2$.

Úloha 11. Na turnaji s $n \geq 3$ účastníky hrál každý s každým a nedošlo k žádným remízám. Trojice hráčů se nazývá *remízová*, pokud první porazil druhého, druhý třetího a třetí prvního. Najděte maximální počet remízových trojic.

(Polsko 2004)

Úloha 12. $n \geq 4$ hráčů se zúčastnilo turnaje, každý hrál s každým a nebyly remízy. Čtveřici hráčů nazveme *zlou*, pokud jeden hráč vyhrál nad všemi ze čtveřice a ostatní porazili právě jednoho ze čtveřice. Předpokládejme, že na turnaji nejsou zlé čtveřice. Nechť v_i resp. p_i označují počet výher resp. proher i-tého hráče. Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^{n}(w_i - l_i)^3 \geq 0.$$

(Shortlist 2010)

Úloha 13. Mezi 120 lidmi se někteří znají a někteří ne. Čtveřice lidí se nazývá *slabé kvarteto*, pokud se mezi nimi zná právě jedna dvojice. Najděte maximální možný počet slabých kvartet. (Shortlist 2002)

Barvení grafu

Často se v grafu něco barví, ať už vrcholy, nebo hrany. A to typicky tak, že dva vrcholy obarvené stejnou barvou nejsou spojené hranou, resp. dvě sousední hrany nejsou obarvené stejnou barvou.

Definice. *Chromatickým číslem* grafu $\chi(G)$ nazýváme minimální počet barev, kterými se dají obarvit jeho vrcholy tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu.

Zřejmě, pokud graf obsahuje K_n, tak platí, že $\chi(G) \geq n$, avšak naopak nic podobného neplatí.

Tvrzení. Pro libovolné číslo k existuje graf G, který neobsahuje trojúhelník a pro který platí $\chi(G) \geq k$.

To ukazuje, že barevnost grafu vůbec není lehká záležitost, a proto úlohy na barevnost můžou být náročné. Navzdory tomu obarvení může občas i pomoct.

Úloha 14. Na mírovou konferenci se dostavilo n různých států. Každý stát poslal jednoho generála a jednoho špeha. Zároveň každé dva státy buďto už mají uzavřenu dohodu o neútočení, anebo ne. Je však potřeba rozdělit špehy a generály do pokojů tak, aby žádný špeh nebyl s generálem na pokoji. Navíc každý generál chce být na pokoji jenom s generály, se kterými mají dohodu o neútočení. Naopak, každý špeh chce být jen se špehy, se kterými jejich strana nemá dohodu o neútočení. Najděte minimální počet pokojů, pro které vždy umíme lidi rozdělit do pokojů podle jejich požadavků.

Úloha 15. Budiž T turnaj. Definujme *dobré* obarvení hran turnaje jako takové, že pro libovolné hrany $\overrightarrow{uv}$ a $\overrightarrow{vw}$ mají tyto hrany různé barvy. (Ale hrany $\overrightarrow{uv}$ a $\overrightarrow{uw}$ můžou být stejné barvy.) *Orientované hranové chromatické číslo* turnaje je definované jako nejmenší počet barev, které potřebujeme na dobré obarvení hran. Pro každé n najděte minimum orientovaných hranových chromatických čísel mezi všemi turnaji na n vrcholech. (USA TST 2015)

Úloha 16. Mějme $n = 3$ různých barev. Nechť $f(n)$ označuje největší celé číslo s vlastností, že každá strana a každá úhlopříčka konvexního mnohoúhelníka, který má $f(n)$ vrcholů, se dá obarvit jednou z n barev následujícím způsobem:

- jsou použity aspoň dvě barvy,
- každé tři vrcholy mnohoúhelníka určují buď trojici úseček stejné barvy, nebo trojici úseček tří různých barev.

Dokažte, že $f(n) \geq (n-1)^2$ a že rovnost v této nerovnosti nastává pro nekonečně mnoho n. (MEMO 2009)

Úloha 17. Obarvíme hrany K_n pomocí $n-1$ barev. Vrchol nazveme *duhou*, pokud jsou hrany, které z něho vycházejí, všechny obarveny různými barvami. Kolik nejvíce duh může existovat? (Iran 2012)

Úloha 18. Šílený vědec stvořil armádu robotů. Problém je v tom, že některé dvojice robotů se nenávidí (nenávist je vzájemná). Vždy však s roboty lze udělat jednu z následujících dvou operací:

- Pokud nějaký robot nenávidí lichý počet robotů, vědec ho může zničit.
- Vědec může zdvojnásobit armádu tak, že se každý robot R rozdělí na dva roboty R_1 a R_2. Pro každou dvojici původních robotů R, Q, kteří se nenáviděli, se budou nenávidět roboti R_1, Q_1 i roboti R_2 a Q_2. Navíc se vždy nenávidí i roboti R_1, R_2. To jsou všechny dvojice robotů, které se budou nenávidět po zdvojnásobení.

Dokažte, že vědec umí po konečném počtu operací dostat armádu robotů, ve které neexistuje dvojice robotů, která se nenávidí. (Shortlist 2013)

Úloha 19. Ve státě jsou některá města spojená leteckými linkami, při čemž se umíme letadlem dostat z každého města do každého. Pokud uvažujeme okružní let (začneme z téhož města, kde skončíme) složený z lichého počtu různých letů a všechny tyto lety zrušíme, tak budou existovat dvě města, mezi kterými se nedá dostat letecky. Dokažte, že můžeme stát rozdělit na čtyři oblasti tak, že lety povedou jen mezi městy z různých oblastí. (ARO 2010)

Různé

Úloha 20. Ukažte, že v turnaji n hráčů nastane právě jeden z následujících dvou případů: buď existuje kružnice délky n, nebo můžeme hráče rozdělit do dvou neprázdných skupin tak, že každý hráč z první skupiny porazil každého hráče z druhé skupiny. (KMS 2008)

Úloha 21. Ve státě je každé město spojené cestou s právě třemi jinými městy. Minulý rok jsme šli na výlet a podařilo se nám jít po cestách tak, že jsme prošli každým městem právě jednou. Tento rok to chceme udělat znova, jenže chceme použit aspoň jednu cestu, po které jsme minulý rok nešli. Dokažte, že to umíme udělat. (Japonsko 2004)

Úloha 22. Na šachovnici $n \times n$ je obvod obtáhnutý červeně. Dva hráči, Bob a Pepa, hrají hru: Hráč si v každém tahu zvolí políčko šachovnice a obtáhne červeně jednu jeho stranu (která ještě nebyla červená). Tím vznikne mezi dvěma sousedními políčky nepřechodná hranice. Hra končí, když je šachovnice červenými hranicemi rozdělená na dvě části. Hráč, který šachovnici takto rozdělil, prohrává. Začíná Bob. Určete, který hráč dokáže pro dané n vždy vyhrát, a popište jeho vítěznou strategii. (Výběrko 2010)

Úloha 23. Mezi 30 studenty má každý student maximálně 5 kamarádů a pro libovolných 5 studentů existuje dvojice, která spolu nekamarádí. Najděte maximální hodnotu k takovou, že určitě umíme nalézt k lidí, mezi kterými není ani jedna dvojice kamarádů. (Čína 2015)

Úloha 24. V každém ze tří států žije $2n$ matematiků. Najděte nejmenší celé číslo k s následující vlastností: pokud každý matematik zná aspoň k kolegů z jiného státu, pak existují tři matematici, kteří se znají navzájem. (Vztah „znát se" je vzájemný.) (Výběrko 2013)

Úloha 25. Na grafu umíme udělat následující operaci: Zvolíme libovolnou kružnici délky 4 a vymažeme z ní jednu hranu. Pro pevné $n \geq 4$ najděte nejmenší možný počet hran grafu, který se takto dá dosáhnout z úplného grafu na n vrcholech. (Shortlist 2004)

Úloha 26. Nechť pro graf G značí $f(G)$ počet trojúhelníků a $g(G)$ počet čtyřúhelníků v G. Najděte nejmenší konstantu c takovou, že pro každý graf G platí

$$g(G)^3 \leq c \cdot f(G)^4.$$

(Shortlist 2004)

Úloha 27. Univerzitu navštěvuje 2^{n+1} studentů, přičemž $n \geq 2$ a žádní dva studenti nejsou stejně staří. Na univerzitě funguje 2^n korespondenčních seminářů pro talentovanou mládež. Každý seminář má za orgy několik dobrovolníků z řad studentů univerzity. Žádné dva semináře nevznikly ve stejném čase. Každý student může být orgem ve více seminářích, ale jen pokud tím neporušuje jedno důležité pravidlo: Nemůže mezi ním organizovanými semináři existovat dvojice AKS a BKS a dvojice od něho mladších studentů a a b takových, že a je mladší od b, a dělá orga v AKS, b dělá orga v BKS a zároveň BKS je novější než AKS. Dokažte, že aspoň jeden korespondenční seminář trpí nedostatkem orgů, tedy že jich nemá víc než $4n$.

(Výběrko 2010)

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je kopií příspěvku z *i*KSka 2016 od Martina „Vodky“ Vodičky, kterému tímto děkuji.

[1] Martin „Vodka“ Vodička: *Teória grafov*, sborník *i*KS, 2016.

Hinty

Hint 2. Indukce, odeberte všechny listy.
Hint 3. Stačí dokázat pro stromy, indukcí dokážete, že taková kružnice může obsahovat libovolnou hranu z G.
Hint 4. Indukce na počet vrcholů, odeberte jeden. Jak se změní počet živých skupin?
Hint 5. Uvažujte to jako bipartitní graf, kde jsou vrcholy sloupce a řádky a políčka jsou hrany. Uvědomte si, co chcete a indukce na hranách.
Hint 6. Je to $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Jako příklad zkuste bipartitní graf. A důkaz jde indukcí na vrcholech, odeberte vrchol s nejmenším počtem hran.
Hint 7. Indukce, odeberte vítěze (nebo toho úplně nejhoršího).
Hint 8. Indukce..., podívejte se jestli byl poslaný dopis na každý ostrov, anebo ne.
Hint 9. Je to 8, indukce vzhledem k 51.
Hint 10. Indukce na součet kapacit hran – snižujte ho, dokud ze žádného města nevychází dvě cesty stejné kapacity. Potom to je triviální.
Hint 11. Uvažujte, jak vypadají neremízové trojice. Spočítejte je pomocí jednoho hráče.
Hint 12. Podívejte se, jak můžou vypadat hrany mezi nějakou čtveřicí vrcholů, využijte tvrzení ze začátku a prostě to spočítejte.
Hint 13. Zkoumejte trojice a pomocí kopírovaní dokažte, že nemůže nastat situace, že se znají právě dvě z nich. Potom to už je jen nějaká lehká nerovnost.
Hint 14. Je to $n + 1$. Předpokládejte, že špehy rozdělíte do k pokojů. Generály dejte nejprve každého zvlášť, a potom postupně z každého pokoje špeha dejte odpovídajícího generála do pokoje s nějakým z předešlých pokojů.
Hint 15. Nechť je to chromatické číslo k, pro každý vrchol definujte k-tici čísel, Dirichlet. Konstrukce je indukcí :)
Hint 16. Prostě si seberte jeden vrchol a hrany stejné barvy, co z něho vedou. Na konstrukci využijte trochu teorie čísel a položte $n = p + 1$.
Hint 17. (Skoro) všechny můžou být. Pro sudé to udělejte indukcí (dávno tu nebyla, že?) a pro lichou prostě přidejte jeden vrchol.
Hint 18. Pokud jsi ještě stále překvapený/překvapená, co dělá tato úloha mezi barvením, tak se podívej, co se děje s $\chi(G)$.
Hint 19. Seberte co nejvíc hran z G tak aby tvořili bipartitní podgraf. Ukažte, že zbylé hrany taky tvoří bipartitní podgraf. Potom to už je.
Hint 20. Uvažujte nejdelší kružnici v grafu.
Hint 21. Otevřete okruh na jednom konci – dostanete cestu a na ní kružnici přes všechny vrcholy. Umíte ji nějak lehce změnit na jinou cestu přes všechny vrcholy? Měňte ji tak, že nezměníte první cestu, po které jste šli. Kolika způsoby to umíte udělat? Toto opakujte, až dokud nenarazíte na cestu, kterou umíte uzavřít :)
Hint 22. Interpretujte hru jako operace na nějakém grafu. Potom by to už mělo být triviální.
Hint 23. $k = 6$. Prostě postupně přidávejte studenty... Na to, že $k < 7$, najděte protipříklad na 10 vrcholech, nejjednodušší je symetrický.
Hint 24. $k = 2n + 1$. Seberte matematika, který zná nejvíc matematiků z nějakého jiného státu.

Hint 25. Výsledný graf bude souvislý a nebude bipartitní.
Hint 26. Věděli jste, že počet hran v podgrafu je menší nebo roven počtu hran v celém grafu? Nejprve odhadněte počet hran pomocí vrcholů, pomocí toho počet trojúhelníků od počtu hran (zapište je jako nějaký součet) a potom už analogicky z toho odvoďte to, co chcete. A nezapomeňte, na co jsem se ptal na začátku. A ano „rovnost“ nastává pro nekonečný úplný graf.
Hint 27. Nemám řešení, ale možná na to jednou před soustředkem přijdu.

Jensenova a permutační nerovnost

Josef Minařík

Abstrakt. Na přednášce se naučíme používat dvě nerovnosti, které se sice na první pohled můžou zdát triviální, ale ukáže se, že jsou překvapivě silné.

Permutační nerovnost

Tvrzení (Permutační nerovnost). Mějme posloupnosti reálných čísel $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ a $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$. Pro libovolnou permutaci $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ pak platí

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x_1'y_1 + x_2'y_2 + \cdots + x_n'y_n \geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1.$$

Poznámka. Permutační nerovnost lze zobecnit pro libovolný počet **nezáporných** posloupností.

Cvičení. Rozmyslete si, proč ve zobecněné permutační nerovnosti potřebujeme podmínku na nezápornost.

Úloha 1. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je posloupnost reálných čísel a $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ jejich permutace. Dokažte

(i) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_1' + a_2a_2' + \cdots + a_na_n'$,
(ii) $\frac{a_1}{a_1'} + \frac{a_2}{a_2'} + \cdots + \frac{a_n}{a_n'} \geq n$.

Úloha 2. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ dokažte

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Úloha 3. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Úloha 4. Pro kladná reálná a, b, c dokažte

$$a^ab^bc^c \geq a^bb^cc^a.$$

Úloha 5. Ať $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ jsou reálná čísla a $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ jejich permutace. Potom

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - y_1')^2 + (x_2 - y_2')^2 + \cdots + (x_n - y_n')^2.$$

(IMO 1975)

Úloha 6. Pro po dvou různá přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ukažte

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(IMO 1978)

Úloha 7 (Nesbittova nerovnost). Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Úloha 8. V tabulce 10×10 jsou postupně po řádcích napsána čísla 1 až 100. V každém kroku vybereme nějaké políčko, zvýšíme jej o dva a jeho symetrické sousedy (vodorovně, svisle nebo diagonálně) snížíme o 1. Po konečném počtu kroků máme v tabulce opět čísla 1 až 100. Ukažte, že jsou ve stejném pořadí jako na začátku.

Úloha 9. Dokažte AG nerovnost pomocí permutační nerovnosti.

Úloha 10. Pro kladná reálná $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se součtem s dokažte

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Úloha 11. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$a^a b^b c^c \geq \sqrt[3]{(abc)^{a+b+c}}.$$

(USAMO 1974)

Tvrzení (Čebyševova nerovnost). Nechť $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ jsou n-tice reálných čísel. Pak platí

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \geq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}.$$

Úloha 12. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ ukažte

$$3(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^5 + b^5 + c^5)(a^3 + b^3 + c^3).$$

Úloha 13. Pro $a_i \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ dokažte

$$\left(\sum \sin a_i \right) \left(\sum \cos a_i \right) \leq \frac{n^2}{2}.$$

Úloha 14. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, dokažte

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}.$$

(Shortlist 2006)

Úloha 15. Jsou dána reálná $a_1, a_2, \dots, a_2 > 0$, která splňují $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Potom

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{2-a_n}\ge\frac{n}{2n-1}.$$

Úloha 16. Nechť kladná reálná čísla a, b, c splňují $abc = 1$, dokažte

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(b+a)}\ge\frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

Úloha 17. Dokažte AH nerovnost, tedy pro kladná reálná $x_1, \dots, x_n$ dokažte

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\ge\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

Úloha 18. Pro kladná reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ splňující

$$\frac{1}{x_1+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}=1$$

dokažte

$$\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_n}\ge(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

Úloha 19. Pro reálná $a, b, c, d \ge 0$ splňující $ab + bc + cd + da = 1$ ukažte

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}.$$

(Shortlist 1990)

Jensenova nerovnost

Tvrzení (Jensenova nerovnost). Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro $x_1, \dots, x_n \in I$ a kladné reálné koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1\rangle$ splňující $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ platí

$$\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\ge f(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n).$$

Poznámka. Pro konkávní funkce platí opačná nerovnost. Pro ryze (ostře) konvexní a konkávní funkce je nerovnost pro x_i, jež nejsou všechna stejná, ostrá.

Úloha 20. Pro všechna reálná $x > 1$ dokažte

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Úloha 21. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 22. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Úloha 23. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 24. Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12.$$

Úloha 25. Dokažte AG nerovnost pomocí Jensenovy nerovnosti.

Úloha 26. Dokažte AH nerovnost pomocí Jensenovy nerovnosti.

Úloha 27. Kladná reálná čísla x, y splňují $x + y = 1$. Dokažte

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \geq \frac{1}{1+2xy}.$$

Úloha 28. Dokažte, že pro kladná reálná a, b, c, d splňující $a+b+c+d = 4$, platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b(b+1)} \geq \frac{8}{(a+c)(b+d)}.$$

Úloha 29. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ dokažte

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Úloha 30. Dokažte, že graf na n vrcholech o $m \geq n$ hranách obsahuje aspoň $\frac{m^2}{n}$ cest na třech vrcholech.

Úloha 31 (Nesbittova nerovnost). Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Úloha 32. Pro kladná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ se součtem 1 dokažte

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

(Indie 1995)

Úloha 33. Ukažte, že pro kladná reálná x, y, z splňující $x + y + z = xyz$ platí

$$\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \leq \frac{3}{4}.$$

Úloha 34. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Úloha 35. Pro $a, b \geq 0$ dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

(MO 63–III–6)

Úloha 36. Pro reálná $x_1, \ldots, x_n \geq 1$ dokažte

$$\frac{1}{x_1+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} + 1}.$$

(Shortlist 1998)

Úloha 37. Dokažte, že platí

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 38. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Definice. Řekneme, že reálná posloupnost $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ *majorizuje* posloupnost $b_1 \geq \cdots \geq b_n$, jestliže

(i) $a_1 + \cdots + a_i \geq b_1 + \cdots + b_i$ pro všechna $1 \leq i \leq n-1$,
(ii) $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$.

Tvrzení (Karamatova nerovnost). Nechť f je funkce konvexní na intervalu I. Potom pro posloupnost $x_1, \ldots, x_n \in I$ majorizující $y_1, \ldots, y_n \in I$ platí

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + \cdots + f(y_n).$$

Úloha 39. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Úloha 40. Pro strany trojúhelníku a, b, c dokažte

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

(APMO 1996)

Úloha 41. Nechť $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ a $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ jsou dvě posloupnosti kladných reálných čísel splňující podmínky

$$a_1 \geq b_2, \quad a_1a_2 \geq b_1b_2, \quad a_1a_2a_3 \geq b_1b_2b_3, \quad \ldots, \quad a_1a_2\cdots a_n \geq b_1b_2\cdots b_n.$$

Dokažte že platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Úloha 42. Pokud $x_1, \ldots, x_n \in \left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\rangle$, dokažte

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \cdots + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \cdots + \cos x_n.$$

Úloha 43. Nechť jsou $a_1, \ldots, a_n$ kladná reálná čísla. Dokažte, že platí

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Literatura a zdroje

[1] Jakub Löwit: *Permutační nerovnost*, Zásada 2017.
[2] Fíla Čermák: *Jensenova nerovnost*, Zásada 2021.
[3] Po-Shen Loh: *Convexity*, MOP 2013.

Hinty

Hint 1. Triviální důsledek permutační nerovnosti.
Hint 2. Můžeš si BÚNO zvolit $a \geq b \geq c$.
Hint 3. Trojice a^2, b^2, c^2 a bc, ca, ab jsou opačně uspořádané.
Hint 4. Zlogaritmuj.
Hint 5. Čtverce se odečtou a pak je to triviální.
Hint 6. Pro kterou permutaci a_i bude levá strana minimální?
Hint 7. Přenásob dvěma a sečti dvě permutační nerovnosti.
Hint 8. Označ a_{ij} a b_{ij} čísla na začátku a na konci, uvaž součet $\sum a_{ij}b_{ij}$.
Hint 9. Použij permutační nerovnost pro $\sum \frac{p_i}{p_{i-1}}$ pro $p_i = \prod_{j=1}^{i} a_i$.
Hint 10. Přenásob $n-1$ a sečti $n-1$ permutačních nerovností.
Hint 11. Zlogaritmuj.
Hint 12. Triviální důsledek Čebyševovy nerovnosti.
Hint 13. Použij Čebyševa a potom součtový vzorec pro sinus.
Hint 14. BÚNO zvol $a \geq b \geq c$ a použij Čebyševa na $(a+b, b+c, c+a)$ a $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{bc}{b+c}, \frac{ca}{c+a}\right)$.
Hint 15. Přenásob jmenovatelem pravé strany a použij Čebyševovu nerovnost.
Hint 16. Substituuj za převrácené hodnoty a použij Čebyševovu nerovnost.
Hint 17. Roznásob a použij Čebyševovu nerovnost.
Hint 18. Přičti pravou stranu, přenásob podmínkou a použij Čebyševa.
Hint 19. Použij $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$ a dvakrát po sobě Čebyševovu nerovnost.
Hint 20. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je konvexní, použij Jensenovu nerovnost s koeficienty $\frac{1}{3}$.
Hint 21. Na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ je sinus konkávní.
Hint 22. Na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ je sinus konkávní.
Hint 23. Na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je kosinus konkávní.
Hint 24. Odmocnina je na kladných reálných číslech konkávní funkce.
Hint 25. Zlogaritmuj.
Hint 26. Uvaž převrácenou hodnotu obou stran.
Hint 27. Funkce $f(x) = \frac{1}{1+x}$ je pro $x > -1$ konvexní.
Hint 28. Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ je pro $x > 0$ konvexní.
Hint 29. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je pro $x > 0$ konvexní.
Hint 30. Funkce $f(x) = \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ je konvexní.
Hint 31. Homogenizuj.
Hint 32. Funkce $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ je pro $0 < x < 1$ konvexní.
Hint 33. Rozšiř zlomek třetí proměnnou, funkce $f(x) = \frac{x}{x+S}$, kde $S = x + y + z$, je konkávní.
Hint 34. Homogenizuj.
Hint 35. Znormuj, funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je pro $x > 0$ konvexní.
Hint 36. Zkus podobný trik jako při důkazu AG nerovnosti, tj. že platí $x = e^{\ln x}$.
Hint 37. Funkce $f(x) = \frac{x^{3/2}}{S-x}$ je na intervalu $(0, S)$ konvexní, kde $S = x + y + z$.
Hint 38. Homogenizuj, $f(x) = \frac{1}{x}$ je pro $x > 0$ konvexní.
Hint 39. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je konvexní.
Hint 40. Správně si je seřaď a nahlédni, že jde o majorizaci.
Hint 41. Exponenciála.

Hint 42. Správně seřaď.

Hint 43. Zlogaritmuj.

Mocnost

Magdaléna Mišinová

Abstrakt. Společně s obvodovými úhly je mocnost bodu ke kružnici jedním ze základních nástrojů v olympiádní geometrii. Její definice je jednoduchá, ale postupně si s její pomocí vybudujeme silnější nástroje.

V celém tomto příspěvku budeme uvažovat orientované délky úsečky, které budeme značit bez svislítek.

Následuje několik sekcí, které na sebe navazují. Na začátku je vždy trocha teorie a následují úlohy na její procvičení. Úlohy jsou v rámci sekcí seřazeny víceméně podle obtížnosti, ovšem v rámci celého příspěvku to neplatí. Pokud se tedy někde zaseknete, nebojte se přeskočit na další sekci.

Prostě mocnost

Definice. Nechť je v rovině dán bod X a kružnice k se středem S a poloměrem r. Hodnotu $|SX|^2 - r^2$ nazveme *mocnost bodu X ke kružnici k* a značíme ji $P(X, k)$.

Cvičení. Ať X, Y jsou body a k je kružnice. Rozmysli si:

1) Kdy je $P(X, k)$ záporná, nulová, kladná?
2) Kdy platí $P(X, k) = P(Y, k)$?
3) Jak za využití Pythagorovy věty zkonstruovat úsečku délky $\sqrt{P(X, k)}$?

Definice mocnosti se na první pohled může jevit poněkud záhadnou. Následující tvrzení vysvětluje, proč jsme si něco takového definovali.

Tvrzení. Ať A, B, C, D jsou body v rovině a X je průsečík AB s CD. Potom je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, právě když $XA \cdot XB = XC \cdot XD$. Navíc pokud označíme k kružnici opsanou $ABCD$, platí $XA \cdot XB = P(X, k)$.

Mocnost je tedy nástrojem na rozpoznávání tětivových čtyřúhelníků. Hodí se mít na paměti i krajní případ, kdy můžeme zjistit, že se kružnice opsaná správnému trojúhelníku dotýká nějaké přímky. Vezměme si naopak kružnici k a bod X, skrz který se otáčí přímka p. Označíme A a B průsečíky k a p. Potom $XA \cdot XB$ nezávisí na přímce p.

Úloha 1. Je dána půlkružnice τ s průměrem AB. Body P, Q na úsečce AB splňují $|AP| = |BQ|$. Rovnoběžné polopřímky vycházející z P a Q protnou τ postupně v X a Y. Dokažte, že součin $PX \cdot QY$ nezávisí na směru polopřímek PX a QY.

Úloha 2. Vně kružnice k jsou dány body A, B. Pohyblivá přímka skrz A protíná k v X, Y. Dokažte, že kružnice XYB procházejí pevným bodem různým od B nebo se všechny dotýkají téže přímky.

Úloha 3. Na prodloužení tětivy KL kružnice k se středem k leží bod A. Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U. Označme M střed úsečky TU. Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový

Úloha 4. Osa úhlu u vrcholu A protne protější stranu BC trojúhelníka ABC v D. Kružnice ADB protne AC podruhé v E, kružnice ADC protne AB podruhé v F. Dokažte, že $|BF| = |CE|$.

Úloha 5. Jsou dány neprotínající se kružnice k, l. Jedna vnější společná tečna se dotýká k v A, ta druhá se dotýká l v D. Dokažte, že úsečka AD vytne na k a l stejně dlouhé tětivy.

Úloha 6. Je dán trojúhelník ABC a bod D na jeho straně AB. Body K a L leží uvnitř ABC tak, že B, C, K a L leží na kružnici a zároveň $|\angle BCK| = |\angle AKD|$ a $|\angle BCL| = |\angle ALD|$. Dokažte, že $|AK| = |AL|$. (iKS 12–G5)

Úloha 7. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedenou bodem Q. Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$.

Úloha 8. Kružnici opsanou trojúhelníku ABC označíme Γ. Kružnice Ω se dotýká úsečky AB a dotýká se Γ v bodě, který je ve stejné polorovině od AB jako C. Osa úhlu BCA protíná Ω v P a Q. Dokažte, že $|\angle ABP| = |\angle QBC|$. (EGMO 2018)

Chordála

Definice. *Chordála* dvou kružnic je množina bodů, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost.

Tvrzení. Chordála dvou kružnic, které nejsou soustředné, je přímka kolmá na spojnici jejich středů.

Chordála se hodí, když chceme ukázat, že nějaké body leží na jedné přímce. Občas také pomůže ukázat, že jsou na sebe nějaké dvě přímky kolmé. Také se hodí, když potřebujeme ukázat něco o průsečíku dvou kružnic.

Úloha 9. Jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l. Zkonstruujeme jejich čtyři společné tečny a na každé vyznačíme střed úsečky určené příslušnými body dotyku. Dokažte, že tyto čtyři středy leží na přímce.

Úloha 10. Je dán čtverec $ABCD$. Kružnice k skrz A a C protíná kružnici l skrz B a D v bodech P, Q. Dokažte, že střed čtverce $ABCD$ leží na PQ. Platí totéž pro obdélník? Kosočtverec? (Baltic Way 2010)

Úloha 11. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k. (MO 56–A–I–4)

Úloha 12. Přímky ramen AD, BC lichoběžníku $ABCD$ se protnou v E. Kružnice s průměry AC, BD se protnou v X a Y. Dokažte, že E leží na XY.

Středy úseček

V této sekci si ukážeme využití následujícího tvrzení:

Úloha 13 (důležitá). Nechť k a l jsou kružnice, které se protínají v bodech A a B. Body dotyku jejich společné tečny s k a l označíme postupně X a Y. Dokažte, že přímka AB půlí XY.

Úloha 14. V trojúhelníku ABC s těžištěm G platí $|\angle GAB| = |\angle GBC|$. Dokažte, že $|\angle GAC| = |\angle GCB|$.

Úloha 15. Tečny skrz A ke kružnici k se jí dotýkají v T a U. Buď M střed AT. Úsečka MU protne k podruhé v X. Dokažte, že $|XA| = 2 \cdot |MX|$.

Úloha 16. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB postupně v D, E, F. Druhý průsečík AD a kružnice vepsané označíme Q. Dokažte, že přímka EQ prochází středem AF právě tehdy, když $|AC| = |AB|$.

Úloha 17. Kružnici opsanou trojúhelníku ABC, pro nějž platí $|AB| < |AC|$, označme ω. Tečna k ω v bodě A protne BC v D. Označme M střed AD a protněme MB podruhé s ω v X. Dokažte, že $|\angle DXA| = |\angle AXC|$.

Úloha 18. Na tětivě XY kružnice Γ leží body A a B. Bod N je střed jednoho z oblouků XY. Druhé průsečíky NA a NB s Γ označíme C a D. Tečny v C a D ke Γ se protínají v P. Dokažte, že NP půlí úsečku AB.

Potenční střed

Tvrzení (existence potenčního středu). Mějme tři kružnice v rovině, z nichž žádné dvě nejsou soustředné. Potom se všechny tři vzájemné chordály buďto protínají v jednom bodě, který nazýváme *potenčním středem* těchto kružnic, nebo jsou rovnoběžné.

Jistě lze tušit, že toto tvrzení se bude hodit na důkaz, že se nějaké tři přímky protínají v jednom bodě. Avšak bude se nám hodit i v podobě ekvivalence, tedy k rozpoznávání, kdy je nějaký čtyřúhelník tětivový.

Tvrzení (Radical lemma). Nechť k a l jsou nesoustředné kružnice, body K_1 a K_2 leží na k a body L_1 a L_2 leží na l. Čtyřúhelník $K_1K_2L_1L_2$ je tětivový, právě když se přímky K_1K_2 a L_1L_2 protínají na chordále kružnic k a l.

Úloha 19. Na kružnici ω jsou dány body A, B, které netvoří její průměr. Uvažme všechny dvojice kružnic ω_a, ω_b, které mají vnitřní dotyk s ω postupně v A, B a které mají navíc samy vnější dotyk. Dokažte, že vnitřní společná tečna kružnic ω_a, ω_b prochází pevným bodem.

Úloha 20. Na straně BC trojúhelníka ABC s výškami BM, CN a kolmištěm H je dán bod W. Body X, Y jsou zvoleny tak, aby WX, WY byly průměry kružnic BWN, CWM. Dokažte, že body X, Y, H leží na přímce. (IMO 2013, 4)

Úloha 21. Je dán ostroúhlý trojúhelník s ortocentrem H. Kružnice se středem ve středu strany BC procházející bodem H protne BC v A_1, A_2. Body B_1, B_2, C_1, C_2 definujeme podobně. Dokažte, že těchto šest bodů leží na kružnici.

(IMO 2008, 1)

Úloha 22. Kružnici opsanou ostroúhlému trojúhelníku ABC označíme ω, jeho kolmiště a opsiště označíme H a O. Dále označíme M a N středy AB a AC. Polopřímky MH a NH protínají ω v P a Q. Přímky MN a PQ se protínají v R. Dokažte, že $OA \perp RA$.

Úloha 23. Paty výšek z vrcholů A, B, C v trojúhelníku ABC postupně označíme D, E, F. Kružnici opsanou AEF označíme ω. Jako ω_1 a ω_2 označíme kružnice skrz D dotýkající se ω v E a F. Dokažte, že druhý průsečík ω_1 a ω_2 leží na BC.

Úloha 24. Lichoběžník $ABCD$ je vepsaný do kružnice Γ, jejíž průměr je AB. Průsečík AC a BD označíme E. Kružnice se středem B procházející E protíná Γ v bodech K a L, kde K leží ve stejné polorovině od AB jako C. Kolmice skrz E k BD protíná CD v M. Dokažte, že KM je kolmá na DL.

Úloha 25. Označme kolmiště a opsiště různostranného trojúhelníku ABC jako H a O. Středy AH a BC označíme M a N. Kružnice γ nad průměrem AH protíná kružnici opsanou ABC v bodě G různém od A a přímku AN v bodě Q různém od A. Tečna ke γ v G protíná OM v P. Dokažte, že kružnice opsané GNQ a MBC se protínají na přímce PN.

Nulový poloměr

V této sekci využijeme toho, že se na body můžeme dívat jako na kružnice s nulovým poloměrem. Mocnost bodu X ke kružnici se středem A a nulovým poloměrem je prostě XA^2. To samo o sobě není nijak skvělé, ovšem jakmile zapojíme třeba tvrzení o chordálách, může to některé úlohy značně ulehčit.

Úloha 26. Je dána kružnice k a bod A vně ní. Pro $X \in k$ označme Y průsečík osy AX a tečny k v X. Určete množinu Y.

Úloha 27. Je dán trojúhelník ABC s vepsištěm I. Kolmice na AI skrz I protne BC v A'. Podobně definujme B' a C'. Dokažte, že A', B', C' leží na přímce kolmé na OI, kde O je opsiště ABC.

Úloha 28. Je dána kružnice k a přímka p, po které se pohybuje bod P. Tečny z P ke k se jí dotýkají v T a U. Uvažme kružnici se středem P procházející body T, U. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí dvěma společnými body.

Úloha 29. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran AB, AC v bodech Z, Y. Zkonstruujme rovnoběžníky $BCYR$, $BCSZ$ a označíme $G = BY \cap CZ$. Dokažte, že $|GR| = |GS|$. (ISL 2009, G3)

Úloha 30. V různostranném ostroúhlém trojúhelníku ABC označíme střed BC jako M a paty výšek z C a B jako D a E. Označme středy MD a ME jako K a L. Přímka KL protíná AB, AC v X, Y. Dokažte, že čtyřúhelník $AXMY$ je tětivový.

Úloha 31. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T. Bod A probíhá kružnici l. Na kružnici k najdeme body B, C tak, aby AB, AC byly tečny kružnice k. Přímky BT, CT protnou kružnici l podruhé v bodech D, E. Najděte množinu průsečíků přímek DE a tečen ke kružnici l v bodě A.

Rozdíly mocností a linearita

Chordála je množina bodů, které mají ke dvěma pevným kružnicím stejnou mocnost. Můžeme se na to podívat tak, že rozdíl jejich mocností k těmto kružnicím je nulový.

Tvrzení (zobecnění chordály). Nechť k a l jsou kružnice, X a Y jsou body. Potom $P(X,k) - P(X,l) = P(Y,k) - P(Y,l)$ právě tehdy, když XY je kolmá na spojnici středů k a l.

Stejně jako u chordál lze toto tvrzení využívat k dokazování kolmosti dvou přímek. Následující tvrzení je ale ještě silnější a umožní nám vypočítat mocnost nějakého bodu pomocí jiných dvou, s kterými leží na přímce.

Tvrzení (rozdíl mocností je lineární). Nechť pod X leží na přímce AB, k a l jsou kružnice. Potom platí

$$P(X,k) - P(X,l) = \frac{XB}{AB} \cdot (P(A,k) - P(A,l)) + \frac{AX}{AB} \cdot (P(B,k) - P(B,l)).$$

Úloha 32. Na stranách AB, AC trojúhelníku ABC leží postupně body E a F splňující $|BE| = |CF|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AEC a AFB se podruhé protnou na ose úhlu BAC.

Úloha 33. Na stranách AB, AC trojúhelníka ABC s nejkratší stranou BC leží body K, L splňující $|KB| = |BC| = |CL|$. Dokažte, že KL je kolmá na OI, kde O a I jsou opsiště a vepsiště trojúhelníku ABC.

Úloha 34. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme M, N středy AB, AC a D patu výšky z A. Kružnice opsané trojúhelníkům BND a CMD se protnou podruhé v E. Dokažte, že DE prochází středem MN. (ARO 2007)

Úloha 35. Mějme trojúhelník ABC. Na straně BC se hýbe bod D. Kružnice opsaná ABD protne AC podruhé v F a kružnice ADC protne AB podruhé v E. Dokaž, že když se D hýbe po BC, tak kružnice opsaná AEF prochází nějakým pevným bodem různým od A.

Úloha 36. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC, uvnitř které je zvolen bod D. Nechť E, F jsou po řadě takové body na stranách AB, AC, že platí $|\angle BED| = |\angle DFC| > 90°$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABF a AEC se protínají na přímce AD v bodě různém od bodu A. (MO 69–A–III–5)

ISL G4

Úloha 37. V ostroúhlém trojúhelníku ABC vepsaném do kružnice k označme M, N středy AB, AC, D patu A-výšky a G těžiště. Kružnice l prochází body M, N a dotýká se k v bodě $X \neq A$. Dokažte, že X, D, G leží v přímce. (ISL 2011, G4)

Úloha 38. Označme ω kružnici A-připsanou trojúhelníku ABC. Nechť D, E, F jsou postupně body dotyku ω s BC, CA, AB. Kružnice opsaná AEF protíná BC v bodech P a Q. Označme střed AD jako M. Dokažte, že kružnice opsaná MPQ se dotýká ω. (ISL 2017, G4)

Úloha 39. Nechť M je střed strany AC trojúhelníku ABC. Kružnice ω procházející B a M protíná AB a BC postupně v bodech P a Q. Bod T leží na kružnici ω a zároveň je $BPTQ$ rovnoběžník. Určete všechny možné hodnoty $\frac{|BT|}{|BM|}$. (ISL 2015, G4)

Literatura a zdroje

Děkuji všem, z jejichž příspěvků jsem čerpala.

[1] Radek Olšák: *Linearita v geometrii*, PraSe online, 2020.
[2] Veronika Hladíková: *Mocnost*, sborník *i*KS, 2018.
[3] Anh Dung „Tonda“ Le: *Zobecněná mocnost*, sborník *i*KS, 2015.
[4] Pepa Tkadlec: *Mocnost*, sborník *i*KS, 2014.
[5] http://www.artofproblemsolving.com/community

Hinty

Hint 1. Dokreslete celou kružnici.
Hint 2. Mocnost A k těmto kružnicím je pevná.
Hint 3. Vzpomeňte si na Euklidovu větu o odvěsně.
Hint 4. Osa úhlu dělí protější stranu ve známém poměru.
Hint 5. Porovnejte mocnost A k l a mocnost D ke k.
Hint 6. Dokresli průsečík kružnice opsané $BCKL$ a strany AB.
Hint 7. Úsekový úhel se hodí.
Hint 8. Znáš Shooting lemma?
Hint 9. Bude to chordála.
Hint 10. Měřte mocnost středu k oběma kružnicím.
Hint 11. Ukažte, že druhý průsečík každé takové kružnice s AS je pevný.
Hint 12. Dokažte, že E má k oběma kružnicím stejnou mocnost (přeneste součin pomocí rovnoběžky na jednu ze základen).
Hint 13. Co je chordála k a l?
Hint 14. Použij úsekový úhel a vzpomeň si, o čem je tato sekce.
Hint 15. Najdi podobné trojúhelníky.
Hint 16. Vzpomeň si, o čem je tato sekce, a pak vyúhli, že obě tvrzení jsou ekvivalentní s $DE \parallel AB$.
Hint 17. Dokreslete druhou kružnici ke společné tečně a doúhlete.
Hint 18. Shooting lemma a kružnice, co se dotýkají XY i Γ.
Hint 19. Když se kružnice dotýkají, splývá chordála se společnou tečnou.
Hint 20. Protni BWN, CWM podruhé a zapoj bod A.
Hint 21. Nejdřív dokažte, že na kružnici leží čtveřice B_1, B_2, C_1, C_2, podobně pro další dvě čtveřice. Mohlo by jít o tři různé kružnice?
Hint 22. Obrazy H ve středové souměrnosti podle M a N leží na ω. Bod A je středem jisté stejnolehlosti.
Hint 23. Ukaž, že potenční střed tří zmíněných kružnic leží na BC.
Hint 24. Dokresli kružnici opsanou BCE. Využij toho, že obraz kolmiště podle strany leží na kružnici opsané.
Hint 25. Najdi potenční střed kružnic $PAGM$, MBC a Feuerbachovy kružnice ABC.
Hint 26. Uvaž A jako kružnici s nulovým poloměrem.
Hint 27. Uvaž I jako kružnici s nulovým poloměrem.
Hint 28. Přímka p je chordála k a nějakého bodu.
Hint 29. Dokreslete A-připsanou.
Hint 30. Najdi chordálu (ADE) a M.
Hint 31. Dokažte, že DE je chordála k a bodu A.
Hint 32. Dokresli průsečík osy úhlu s BC a ukaž, že leží na chordále.
Hint 33. Tvrzení o zobecněné chordále.
Hint 34. Zprůměrujte M a N. Trojúhelníky BMD a DNC jsou rovnoramenné.
Hint 35. Ukaž, že střed BC leží na chordále.
Hint 36. Spočti, že D leží na příslušné chordále.
Hint 37. Protněte tečny v A a X a posléze najděte tětivový čtyřúhelník.

Hint 38. Protni AD s ω. Ukaž, že tento průsečík leží na kružnici opsané MPQ.
Hint 39. Dokresli středy stran BA, BC. Nějak vyjádři BT^2 a BM^2.

Harmonický dvojpomer

Michal Pecho

Abstrakt. Príspevok zoznamuje s konceptom harmonických dvojpomerov v planimetrii. Uvádza tvrdenie, vďaka ktorému ide harmonické konfigurácie nachádzať v geometrických úlohách olympiadného typu a používať ich k často rýchlemu a elegantnému riešeniu. Každá kapitolka obsahuje niekoľko úloh k precvičeniu danej techniky.

Dohovor. Symbolom AB budeme značiť tradične priamku prechádzajúcu bodmi A, B a niekedy zároveň aj dĺžku *orientovanej úsečky* s krajnými bodmi A a B.

Dvojpomer a premietanie na priamky

Definícia. *Dvojpomer* bodov A, B, C, D (v tomto poradí) ležiacich na jednej priamke je číslo

$$(A, B, C, D) = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA}.$$

Cvičenie. Dokážte, že

$$(A, B, C, D) = \frac{1}{(D, A, B, C)} = (C, D, A, B) = \frac{1}{(B, C, D, A)},$$
$$(A, B, C, D) = \frac{1}{(A, D, C, B)}.$$

Posledné cvičenie nám hovorí, že význačné hodnoty dvojpomeru sú 1 a -1. Z rovnosti $(A, B, C, D) = 1$ avšak plynie, že $A = B$ alebo $C = D$, takže nás bude viac zaujímať hodnota -1.

Definícia. Body A, B, C, D ležiace na priamke tvoria *harmonickú štvoricu*, ak platí $(A, B, C, D) = -1$.

Cvičenie. Rozmyslite si, ako zhruba harmonické štvorice vyzerajú. V akom poradí môžu na priamke ležať tieto body?

Tvrdenie. Sú dané priamky p, q a bod X mimo nich. Bodom X prechádzajú štyri priamky, ktoré pretínajú priamku p postupne v bodoch A, B, C, D a priamku q postupne v bodoch A', B', C', D'. Potom platí $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.

My budeme toto tvrdenie používať hlavne pre premietanie harmonických štvoríc. Príslušné štyri priamky tvoria v tom prípade *harmonický zväzok.*

Ako spoznať harmonickú štvoricu?

To nám veľmi uľahčí následujúce tvrdenie.

Tvrdenie. V následujúcich bežných konfiguráciách sa vyskytujú harmonické štvorice:

(i) Ak M je stred*) úsečky AB, potom $(A, M, B, \infty) = -1$.
(ii) Ceviány AD, BE, CF sa pretínajú v P. Označme $D' = EF \cap BC$. Potom platí $(B, D, C, D') = -1$.
(iii) Na priemere AB kružnice k so stredom O je daný bod X. Ak je X' jeho obraz v kruhovej inverzii podľa k (t.j. ak platí $|OX| \cdot |OX'| = |OA|^2 = |OB|^2$), potom $(A, X, B, X') = -1$.

Tvrdenie („dve z troch"). Nech A, B, C, D ležia na priamke a P mimo nej. Potom z ľubovolných dvoch následujúcich bodov plynie tretí:

(i) $(A, B, C, D) = -1$,
(ii) $|\angle APC| = 90°$,
(iii) $|\angle BPC| = |\angle CPD|$, kde uhly chápeme orientovane.

A konečne sú tu...

Úlohy I

Úloha 1. Majme trojuholník ABC, bod I je jeho stred kružnice vpísanej, bod I_a jeho stred A-pripísanej kružnice, os uhlu u A pretne stranu BC v bode D. Dokážte, že $(A, I, D, I_a) = -1$.

Úloha 2. Ceviány AD, BE, CF se pretínajú v P. Označme $Q = BC \cap EF$, $R = AD \cap EF$, $S = CF \cap BR$ a $T = DF \cap BR$. Ukážte, že

$$(F, R, E, Q) = (A, R, P, D) = (F, S, P, C) = (B, T, S, R) = -1.$$

Úloha 3. Body D, E, F sú zvolené postupne na stranách BC, CA, AB trojuholníka ABC tak, že $AD \cap BE \cap CF = K$. Priamka FD pretína priamku BE v bode X, P je stred úsečky AK a EP pretína priamku AB v bode Y. Dokážte $XY \parallel AD$.

Úloha 4. Na priamke p sú dané body B, D, C v tomto poradí. Dokážte, že všetky body A také, že AD je osou uhla BAC, leží na pevnej kružnici (tzv. *Apolloniovej kružnici*).

Úloha 5 (Blanchet Theorem). Na A-výške AD trojuholníka ABC je daný bod P. Označme $X = BP \cap AC$, $Y = CP \cap AB$. Dokážte $|\angle XDA| = |\angle YDA|$.

*) Tiež známy pod menom *Majov bod.*

Úloha 6. Vo vnútri trojuholníka ABC je daný pevný bod P. Body X, Y sa pohybujú po AB, AC tak, že $\angle XPA = \angle YPA$. Ukážte, že priamka XY prechádza pevným bodom.

Úloha 7. Je daný trojuholník ABC, body dotyku kružnice vpísanej so stranami BC, CA, AB označme postupne D, E, F. Bod X leží vo vnútri trojuholníka ABC tak, že kružnice vpísaná trojuholníku XBC sa dotýka jeho strán v bodoch D, Y a Z. Dokážte, že E, F, Y, Z ležia na jednej kružnici. (IMO Shortlist 1995)

Úloha 8. V trojuholníku ABC označme D pätu osi uhlu u A a I_b, I_c stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABD, ACD.

(i) Ak je $Q = BC \cap I_bI_c$, dokážte $|\angle DAQ| = 90°$. (Sharygin 2013)
(ii) Označme priesečníky I_bI_c s AB, AC postupne M, N. Dokážte, že MC a NB sa pretnú na AD.

Úloha 9. Je daná kružnica ω so stredom O a tetivou AB ($O \notin AB$). Bod C leží na ω tak, že AC rozpoľuje úsečku OB. Označme $D = AB \cap OC$ a $F = BC \cap AO$. Dokážte, že $|AF| = |CD|$.

Harmonické štvoruholníky

Užitočným nástrojom nie zďaleka koniec. Čo skúsiť premietať na kružnice?

Tvrdenie. Je daný bod P ležiaci na kružnici k a mimo priamku p. Priamky a, b, c, d pretnú p v A', B', C', D' a k v A, B, C, D. Potom platí*)

$$|(A', B', C', D')| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|BC| \cdot |DA|}.$$

Definícia. Povieme, že tetivový štvoruholník $ABCD$ je *harmonický*, pokiaľ pre dĺžky jeho strán platí $ac = bd$.

Pozorovanie. S použitím predošlého tvrdenia si ľahko rozmyslíme, že štvoruholník $ABCD$ vpísaný do kružnice ω je harmonický práve vtedy, keď pre ľubovoľný bod $P \in \omega$ tvoria priamky PA, PB, PC, PD harmonický zväzok.†)

Tvrdenie (o harmonických štvoruholníkoch). Nech D je bod na oblúku BC kružnice k opísanej trojuholníku ABC, ktorý neobsahuje bod A. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

(i) Štvoruholník $ABDC$ je harmonický.
(ii) Priamka AD je A-symediána v $\triangle ABC$ (teda priamka symetrická s A-ťažnicou podľa osi uhlu u A).
(iii) Priamka AD a dotyčnice ku k cez B a C prechádzajú jedným bodom.

---

*) Obecnejšie tvrdenie bez absolútnych hodnôt tiež platí, ale potrebovali by sme k jeho formulácii komplexné čísla.

†) Ak platí napríklad $P = A$, uvažujeme miesto PA dotyčnicu k ω v bode A.

Cvičenie. Uhlopriečky tetivového štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v P. Dokážte, že ak je BP symediána v ABC, potom AP je symediána v ABD.

(Rumunsko TST 2006)

Poďme si to vyskúšať!

Úlohy II

Úloha 10. Kružnica vpísaná rovnoramennému trojuholníku ABC ($|AB| = |AC|$) sa dotýka AC v E. Priamka rôzna od BE vedená bodom B pretína kružnicu vpísanú v bodoch F, G. Priamky EF, EG pretnú BC v K, L. Dokážte $|BK| = |CL|$.

(MEMO 2008)

Úloha 11. V trojuholníku ABC platí $|AC| = 2|AB|$. Označme P priesečník dotyčníc k jemu opísanej kružnici ω vedených bodmi A a C. Dokážte, že priesečník priamky BP a osi strany BC leží na kružnici ω. (ČR TST 2012)

Úloha 12. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Označme $F = AB \cap CD$, $E = AD \cap BC$ a $T = AC \cap BD$. Predpokladajme, že A, B, T, E ležia na kružnici, ktorá pretína priamku EF v bode P. Označme M stred úsečky AB. Dokážte, že $|\angle APM| = |\angle BPT|$. (Írán TST 2004)

Úloha 13. Päty kolmíc z bodu D tetivového štvoruholníku $ABCD$ na priamky BC, CA, AB označme postupne P, Q, R. Dokážte, že $|PQ| = |QR|$ práve vtedy, keď sa osi uhlov $\angle ABC$ a $\angle ADC$ pretínajú na uhlopriečke AC. (IMO 2003)

Úloha 14. V tetivovom päťuholníku $ABCDE$ platí $AC \parallel DE$ a stred M tetivy BD spĺňuje $|\angle AMB| = |\angle BMC|$. Dokážte, že BE rozpoľuje tetivu AC.

Úloha 15. Daný je trojuholník ABC, v ktorom $|AB| < |AC|$. Os úsečky BC pretína priamky AB a AC postupne v bodoch P a Q. Nech H je ortocentrum trojuholníka ABC a nech M a N sú postupne stredy úsečiek BC a PQ. Dokážte, že priamky HM a AN sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

(EGMO výberko 2023)

Poláry

Posledným objektom, ktorý si ukážeme, budú *poláry*. Motiváciou pre ich skúmanie je nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie. Dotyčnice ku kružnici k vedené bodmi A sa jej dotýkajú v bodoch T, U. Priamka p prechádzajúca bodom A pretne priamku TU v B a kružnicu k v X, Y. Potom $(A, X, B, Y) = -1$.

Definícia. Nech k je kružnica so stredom O a $X \neq O$. Priamku, ktorá prechádza obrazom X' bodu X v kruhovej inverzii podľa k a je kolmá na OX, nazývame *polárou* bodu X (vzhľadom ku k). Bod X je *pól* priamky p (vzhľadom ku k).

Tvrdenie. Nech P, Q sú body a p, q ich poláry (vzhľadom k nejakej kružnici k). Potom platí, že ak P leží na q, potom Q leží na p.

Tvrdenie. Štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice k. Označme $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ a $R = AD \cap BC$. Potom trojuholník PQR je *selfpolar*, teda PQ je polára bodu R, PR je polára bodu Q a QR je polára bodu P.

Teraz to už musí isť samo, nie?

Úlohy III

Úloha 16. Je daná kružnica k a priamka p, ktorá ju nepretína. Po priamke p sa pohybuje bod P. Dotyčnice z P ku k sa jej dotýkajú v T a U. Dokážte, že priamka TU prechádza pevným bodom.

Úloha 17. Je daná polkružnica γ s priemerom UV. Na nej ležia body P, Q spĺňujúce $UP < UQ$. Dotyčnice k γ v bodoch P a Q se pretínajú v bode R. Označme $S = UP \cap VQ$. Dokážte $RS \perp UV$.

Úloha 18. Je daný trojuholník ABC so stredom kružnice vpísanej I. Body dotyku kružnice vpísanej s odpovedajúcimi stranami označme A_1, B_1, C_1. Ďalej označme $D = BC \cap B_1C_1$ a $F = DI \cap AA_1$. Dokážte $|\angle AFB| = |\angle AFC|$.

Úloha 19. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC so stredom I sa dotýka jeho strán AB, AC v F, E. Označme N priesečník EF a A-ťažnicou AM. Dokážte $NI \perp BC$.

Obtiažnejšie úlohy

Úloha 20. Majme trojuholník ABC, v ktorom $|AC| \neq |BC|$. Kružnica jemu vpísaná má stred v bode I a dotýka sa strán BC, CA, AB postupne v bodoch D, E, F. Stred strany AB je M. Kolmica z bodu I na ťažnicu CM sa pretína s priamkou DE v bode K. Dokážte, že CK a AB sú rovnobežné.

Úloha 21. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s ortocentrom H. Kružnica s priemerom AB pretne CH v bodoch X a Y, kružnica s priemerom AC pretne BH v bodoch Z a W. Dokážte, že (nezávisle na označení) sa XZ a YW pretínajú na BC. (Brazílie 2013)

Úloha 22. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka jeho strán BC, CA, AB v D, E, F. Úsečka AD pretne kružnicu vpísanú druhýkrát v J a priamky BJ, CJ pretnú kružnicu vpísanú druhýkrát v K, L. Dokážte, že KC, LB a AD prechádzajú jedným bodom.

Úloha 23. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s pätou A-výšky D a ortocentrom H. Kružnica cez B a C pretne kružnicu nad priemerom AH v X a Y. Označme P projekciu D na XY, dokážte $|\angle BPD| = |\angle CPD|$. (Japonsko 2013)

Úloha 24. Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$. Priamky AB a CD sa pretnú v bode E, priamky BC, AD v bode F. Priesečník uhlopriečok označme P a projekciu P na EF označme O. Dokážte, že $|\angle BOC| = |\angle AOD|$. (China TST 2002)

Úloha 25. Je daný rovnobežník $ABCD$. Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD a ω kružnicu vpísanú trojuholníku BCD, ktorá sa dotýka strany BD v bode E. Priamky AE a IE pretínajú ω postupne v bodoch F a G. Nech E' je bod ležiaci oproti E na ω. Os uhla GEE' pretína GE' v bode X. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku EXF leží na priamke BD. (KMS 2022)

Literatura a zdroje

[1] Radek Olšák, Lenka Kopfová: *Projektivní geometrie*, PraSečí seriál, 39. ročník, `https://prase.cz/archive/39/serial.pdf`.

[2] Štěpán Šimsa: *Harmonické čtveřice*, sborník *i*KS, 2017.

[3] `http://www.artofproblemsolving.com`

Hinty

Hint 1. Využite tvrdenie „dve z troch“.
Hint 2. Vždy nájdite správny bod, z ktorého premietať.
Hint 3. Nájdite harmonický zväzok vychádzajúci z Y.
Hint 4. Dokreslíte štvrtého do party k B, D, C a využite tvrdenie „dve z troch“.
Hint 5. Všimnite si, že sa jedná o konfiguráciu s ceviánmi, a použite tvrdenie „dve z troch“.
Hint 6. Pozrite sa na XY z P a z A.
Hint 7. Štvrtý do party k B, D, C a mocnosť.
Hint 8. (i) Kde je štvrtý do party k I_bI_c a $X = AD \cap I_bI_c$?
(ii) Ak majú dve harmonické štvorice spoločný bod, potom spojnice zvyšných troch odpovedajúcich si dvojíc prechádzajú jedným bodom.
Hint 9. Dokážte sporom(!), že $OB \parallel FD$.
Hint 10. Označte zvyšné body dotyku, nájdite harmonický štvoruholník a a premietnite ho.
Hint 11. Dokážte, že BX, kde X je priesečník osi BC a ω, je symediána v ABC.
Hint 12. Dokážte, že $PATB$ je harmonický.
Hint 13. Dokážte, že oba výroky sú ekvivalentné s tým, že $ABCD$ je harmonický.
Hint 14. Začnite tým, že AC je symediána v ABD.
Hint 15. Premietnite na kružnicu cez A a antipodu A.
Hint 16. Ktorým zaujímavým bodom prechádza polára bodu na priamke p?
Hint 17. Dokážte, že RS je polára bodu K.
Hint 18. Dokážte a využite, že AA_1 je polára D.
Hint 19. Dokazujte, že N je pól rovnobežky s BC cez bod A.
Hint 20. Zamerajte sa na kolmý priemet bodu I na ťažnicu a použite tvrdenie „dve z troch“.
Hint 21. Ak majú dve harmonické štvorice spoločný bod, potom zvyšné tri spojnice prechádzajú jedným bodom.
Hint 22. Ukážte, že $JKDL$ je harmonický.
Hint 23. Chordály troch kružníc prechádzajú jedným bodom.
Hint 24. Dokážte, že OP je spoločná osa istých dvoch uhlov.
Hint 25. Premietaj cez E na kružnicu.

Dirichletov princíp

Michal Staník

Abstrakt. Príspevok ukazuje typy príkladov na Dirichletov princíp a tiež jeho využitie v podobe Dilworthovej vety, ktorá hovorí o reťazcoch a antireťazcoch v čiastočných usporiadaniach, alebo v úlohách o delení oblastí.

Tvrzení (Dirichletův princip). Nechť k, n jsou přirozená čísla. Pak, kdykoli umístíte $kn+1$ objektů do n přihrádek, tak alespoň v jedné přihrádce bude alespoň $k+1$ těchto objektů.

Toto tvrzení není slavné svou objevností, ale širokou použitelností.

Úloha 1. Dokažte, že kdykoli umístíme na šachovnici 33 šachových věží, můžeme z nich vybrat 5 věží, které se vzájemně neohrožují. (PraSe 00/01, 3. série)

Úloha 2. Je dána 52-prvková množina přirozených čísel. Dokažte, že v ní najdeme dvě čísla, jejichž rozdíl nebo součet je dělitelný 100.

Úloha 3. V prostoru je dáno 9 mřížových bodů. Dokažte, že uvnitř některé úsečky dané těmito body leží další mřížový bod (ne nutně jeden z devíti daných).

Úloha 4. Buď n přirozené číslo a M množina některých vrcholů daného pravidelného n-úhelníku. Dokažte, že pokud $|M| \geq \lfloor\sqrt{2n+1/4}+3/2\rfloor$, tak z M můžeme vybrat čtyři body tvořící vrcholy lichoběžníka.

Úloha 5. Je daná 20-prvková množina přirozených čísel menších než 70. Dokažte, že mezi všemi rozdíly tvořenými dvojicemi z této množiny se některé číslo vyskytne čtyřikrát.

Úloha 6. Rostoucí posloupnost přirozených čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje pro všechna přirozená čísla n nerovnost $a_{n+1}-a_n \leq 2023$. Dokažte, že je možné najít dva různé její prvky a_i, a_j, taková že $a_i \mid a_j$

Velká čísla

Úloha 7. Dokažte, že je možné najít 10000 deseticiferných násobků sedmi lišících se jen pořadím číslic. (Československé střetnutí 1995)

Úloha 8. Dokažte, že rovnice $\lfloor x^{3/2}\rfloor+\lfloor y^{3/2}\rfloor = a$ má pro nekonečně mnoho hodnot a alespoň 2023 řešení v přirozených číslech. (Rusko 1980)

Úloha 9. Dokažte, že existuje číslo, které je možné napsat alespoň 100 způsoby jako součet 2023-ti 2022-tých mocnin. Zápisy lišící se jen pořadím sčítanců považujeme za stejné. (PraSe 11/12, myšmaš)

Odčítací trik

Často není použití Dirichletova principu finálním krokem, ale pouze prostředním. Po nalezení dvou stejných hodnot často bývá třeba od sebe tyto dva výsledky odečíst pro získání požadovaného objektu.

Příklad. Přirozené číslo n je nesoudělné s desítkou. Dokažte, že existuje násobek n, jehož zápis (v desítkové soustavě) je složený ze samých jedniček.

Uvažujme $n+1$ čísel tvaru 1, 11, 111, ... Dle Dirichletova principu najdeme dvě taková čísla, které dávají stejný zbytek po dělení n. Jejich odečtením získáme násobek n, který začíná samými jedničkami a pokračuje samými nulami. Jinými slovy je to číslo tvaru $k \cdot 10^l$, kde k je číslo tvořené samými jedničkami a l je přirozené. Pak díky tomu, že n je nesoudělné s desítkou, máme, že i k je násobek n.

Úloha 10. Je daná n-prvková množina přirozených čísel. Dokažte, že některá její neprázdná podmnožina má součet prvků dělitelný n.

Úloha 11. Je dána množina deseti dvojciferných čísel. Dokažte, že můžeme najít dvě její disjunktní podmnožiny se stejným součtem prvků. (IMO 1972)

Úloha 12. Dokažte, že libovolnému dostatečně velkému (Tento obrat znamená, že můžeme najít n takové, že tvrzení platí pro všechna čísla větší než n.) číslu neobsahujícímu v ciferném zápisu nulu můžeme odebrat některé cifry ze začátku a z konce a získat tak nenulový násobek čísla 2023. (Kanadská MO 2011)

Úloha 13. Dokažte, že z šestnácticiferného čísla můžeme vybrat několik po sobě jdoucích cifer, jejichž součin je druhou mocninou celého čísla.

(PraSe 08/09, 5. série)

Úloha 14. Do tabulky $n \times 2^n$ jsou do řádků napsány všechny n-tice čísel $1, -1$. Po té jsou některá políčka nahrazena nulami. Dokažte, že je možné zvolit neprázdnou množinu řádků, která v součtu (sčítá se po složkách) dává nulový řádek.

(Turnaj měst 1996)

Úloha 15. Je dáno přirozené číslo n. Předpokládejme, že existuje celé číslo s takové, že $n \mid s^2+1$. Dokažte, že pak je možné n napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

Úloha 16. Šachista trénuje 77 dní, každý den alespoň jednou, celkem nejvýše 132-krát. Dokažte, že několik dní po sobě trénoval v součtu přesně 21-krát. Co kdyby trénoval pouze 71 dní?

Úloha 17. Je daných 2000 celých čísel so súčtom 1, z ktorých každé má absolútnu hodnotu najviac 1000. Dokážte, že z nich môžeme vybrať niekoľko s nulovým súčtom.

(Kanada 2000)

Částečná uspořádání

Definice (částečné uspořádání). Relace $\leq$ na množině M se nazývá částečné uspořádání, pokud pro libovolné prvky x, y, z množiny M platí:

- $x \leq x$. (reflexivita)
- Pokud $x \leq y$ a současně $y \leq x$, pak už nutně musí $x = y$. (slabá antisymetrie)
- Pokud $x \leq y$ a současně $y \leq z$, pak platí $x \leq z$. (tranzitivita)

Příkladem částečných uspořádání může být dělitelnost na přirozených číslech (definujeme, $a \leq b$ jako a dělí b) nebo inkluze na množině všech podmnožin dané množiny (definujeme, $a \leq b$ jako a je podmnožina b).

Definice (porovnatelnost). Definice částečného uspořádání nevyžaduje, aby ze dvou různých prvků byl nutně některý větší. Řekneme tedy, že dva různé prvky x, y množiny M jsou *porovnatelné*, pokud $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V opačném případě jsou *neporovnatelné*.

Definice (řetězec, antiřetězec). Podmnožinu X částečně uspořádané množiny nazveme *řetězcem*, pokud každé dva prvky množiny X jsou porovnatelné. Pokud jsou naopak všechny dvojice prvků množiny X neporovnatelné, nazýváme ji *antiřetězcem*.

Úloha po nás může chtít dokázat, že kdykoli vybereme k prvků ze zadané uspořádané množiny M, tak některé dva z nich jsou porovnatelné. To může být dokázáno tak, že pokryjeme celou M pomocí $k-1$ řetězců, dle Dirichletova principu pak musí dva prvky spadnout do jednoho řetězce. Následující tvrzení říká, že takový postup dává nejlepší odhad.

Tvrzení (Dilworthova věta). Buď k počet prvků největšího antiřetězce v M. Pak je možné pokrýt množinu M pomocí k řetězců.

Odebereme nějaký takový prvek a, který nad sebou nemá žádné další prvky (je tzv. maximální). Z indukčního předpokladu pro nějaké k ve zbytku existuje k-prvkový antiřetězec a současně je tento zbytek pokrytelný k řetězci. V každém z těchto řetězců najděme největší prvek, který je prvkem nějakého k-prvkového antiřetězce. Dokažte, že tato množina je opět antiřetězcem. Pokud je nějaký prvek b tohoto antiřetězce porovnatelný s a, tak je možné vzít řetězec složen z prvku a, b a všech prvků pod b uvnitř příslušného řetězce (z pokrytí). Po odstranění takto sestrojeného řetězce v množině nenajdeme k-prvkový antiřetězec a tak (indukční předpoklad) pokryjeme zbytek $k-1$ řetězci.

Úloha 18. Dokažte, že mezi libovolnými $n+1$ čísly z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ najdete taková dvě různá čísla, že jedno dělí druhé.

Úloha 19. Je dáno 1001 obdélníků s celočíselnými délkami stran nepřesahujícími 1000. Dokažte, že je možné najít 3 obdélníky, které se do sebe vejdou (jeden do druhého, druhý do třetího). Obdélníky je možné otáčet, stejně velké obdélníky se do sebe vejdou.

Úloha 20. Koľko najviac prvkov môže mať množina S, ktorá obsahuje len delitele čísla 2004^{100} a žiadny prvok z S nie je násobkom iného prvku?

Úloha 21. 49 studentů řešilo test skládající se ze tří úloh. Za každou úlohu bylo možné získat 0 až 7 bodů. Dokažte, že existují dva studenti takoví, že první získal z každé úlohy aspoň tolik bodů, co druhý.

A na závěr můžeme z Dilworthovy věty odvodit ještě jedno známé tvrzení.

Úloha 22 (Erdős, Szekeres). Jsou dána přirozená čísla a, b. Z každé prosté (neopakující se) posloupnosti délky $ab+1$ je pak možné vybrat rostoucí podposloupnost délky $a+1$ nebo klesající délky $b+1$.

Dělení oblasti

Další typický výskyt Dirichletova principu je v úlohách typu „Je hodně bodů na malém prostoru, dokažte, že nejsou od sebe příliš daleko.“ Takové úlohy bývají řešitelné rozdělením oblasti na části tak, aby v každé části si byly body blízko.

Příklad. V kruhu o poloměru 1 je 7 bodů. Dokažte, že vzdálenost některých dvou z nich je 1 nebo méně.

Rozdělíme kruh na šestiny (jako koláč). Dle Dirichletova principu musí být v některé části dva body. Vzdálenost těchto dvou bodů pak musí být menší rovna jedné.

Úloha 23. Na okraji čtverce o straně délky 1 je 5 bodů. Dokažte, že vzdálenost některých dvou je menší než $\sqrt{2}/2$.

Úloha 24. Na stole 1×1 m leze 51 much. Dokažte, že pomocí kruhového hrnce s poloměrem $\frac{1}{7}$ m můžeme chytit 3 mouchy najednou.

Úloha 25. New York je kromě jiného znám i pravidelností svých ulic – má 151 severojižních a 151 východozápadních ulic, které se vždy po 100 metrech kříží. V městě je na ulicích celkem rozmístěných 11401 telefonních automatů. Dokážeme najít dva automaty, které jsou vzdálené maximálně 200 metrů chůze po chodníku?

Úloha 26. V rovině je $2n+1$ bodů rozmístěno tak, že žádný trojúhelník s vrcholy v těchto bodech nemá všechny strany větší než 1. Dokažte, že $n+1$ z těchto bodů je možné pokrýt kruhem o poloměru 1.

Úloha 27. V kruhu o poloměru 1 je šest bodů. Dokažte, že některé dva jsou vzdáleny maximálně 1.

Úloha 28. Dokažte, že kdykoli rozdělíme kruh o poloměru 1 na 5 částí, v některé budou dva body vzdálené víc jak jedna.

Úloha 29. Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm. (Celostátní kolo MO 2009/2010)

Literatúra a zdroje

Príspevok je kópiou príspevku z *i*KS 2012 od Mirka Olšáka. Týmto by som chcel poďakovať za možnosť využitia tohto kvalitne spísaného materiálu a uľahčenie práce.

[0] Mirek Olšák, *Od Dirichleta k pravděpodobnosti*, sborník *i*KS 2012, Hostětín.

Pôvodné zdroje:

[1] Paul Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving.*
[2] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book.*
[3] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies.*
[4] Peter Korscok, *O hranici neporiadku.*
[5] Ondrej Budáč, Tomáš Jurík, Ján Mazák, *Zbierka úloh KMS.*
[6] Martin Aigner, Gütner M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK.*

Hinty

Hint 1. V alespoň jedné z osmi posunutých osmipolíčkových úhlopříček bude alespoň 5 věží.

Hint 2. Rozdělte čísla podle posledních dvou cifer a popárujte (01–99), (02–98), ...

Hint 3. Mají-li dva body stejnou paritu všech tří souřadnic, pak je jejich střed opět mřížovým bodem.

Hint 4. Úhlopříčky n-úhelníku mají pouze n různých směrů. Kolik úhlopříček je možné sestrojit z bodů z M?

Hint 5. Stačí použít 19 rozdílů sousedních čísel. Tyto rozdíly v součtu dávají nejvýše 68. Bylo by to možné, kdyby bylo každé hodnoty nabyto maximálně třikrát?

Hint 6. Kdykoli si vezmeme posloupnost 2023 po sobě jdoucích čísel, najdeme mezi nimi prvek posloupnosti. Myšlenka řešení je sestrojit rostoucí posloupnost takovýchto „pastí“, ve které se pro každé k navzájem dělí k-té prvky.

Hint 7. Kolik je deseticiferných násobků sedmi? A kolik je možností, která cifra bude kolikrát obsažena v daném čísle (bez ohledu na pořadí)?

Hint 8. Zvolme nějaké přirozené číslo n. Vezměme všechny dvojice (x, y) z množiny $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$. Kolik možných dvojic to je? A kolika různých hodnot může nabývat $\lfloor x^{3/2} \rfloor + \lfloor y^{3/2} \rfloor$?

Hint 9. Volme přirozené číslo n. Kolik je 2023-tic čísel menších než n? A kolika různých hodnot mohou nabývat součty 2022-tých mocnin se základy menšími než n?

Hint 10. Očíslujme si prvky a_1, a_2, ..., a_n. Pak mezi množinami

$$\{\}, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots \{a_1, \ldots, a_n\}$$

najdeme dvě se stejným zbytkem po dělení n.

Hint 11. Podmnožin je více než možných součtů, tedy najdeme dvě (ne nutně disjunktní) se stejným součtem. Pak zbývá od obou odečíst jejich průnik.

Hint 12. Předpokládejme, že číslo je alespoň 2025-ciferné. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 2023$ uvažujme číslo složené z posledních k cifer. Některá dvě taková čísla mají stejný zbytek po dělení 2023.

Hint 13. Mezi součiny prvních k cifer najdete dva takové, které se shodují paritou exponentů v prvočíselném rozkladu u prvočísel 2, 3, 5, 7.

Hint 14. Sestrojte posloupnost n-tic nul a jedniček. Začněte samými nulami a každý další definujte rekurentně z předchozí n-tice X takto: Y je n-tice, která vznikne z X nahrazením minus jedničky za jedničku a jedničky za nulu. V Y nahraďte některá políčka nulami tak, aby se jednalo o některý řádek tabulky a přičtěte ho k X. V takto definované posloupnosti najdete dva stejné prvky.

Hint 15. Z Dirichletova principu najdeme dvě dvojice (x, y) nezáporných celých čísel nepřevyšující $\sqrt{n}$, se stejnou hodnotou $x - sy \pmod{n}$. Odečtením najdeme nenulovou dvojici (x, y) nezáporných celých čísel nepřevyšujících $\sqrt{n}$ takovou, že $x \equiv \pm sy \pmod{n}$. Umocněním dostáváme kýžený výsledek.

Hint 16. Označme a_i počet tréninků do i-tého dne (včetně). Mezi 154 čísly

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{77}, \quad a_1 + 21, \quad a_2 + 21, \quad \ldots, \quad a_{77} + 21$$

najdete 2 stejná, protože nejvyšší možná hodnota je 153.

Hint 17. Zoraďte čísla tak, aby mali prefixové súčty obmedzené hodnoty.

Hint 18. Volte řetězce ve tvaru $l \cdot 2^k$, kde l je pevné liché číslo.

Hint 19. Definujte k-tý řetězec jako množinu obdélníků, ve kterých se výška od šířky liší právě $k - 1$. Takto pokryjete množinu všech obdélníků 500 řetězci.

Hint 20. Množina S bude najväčšia, keď obsahuje všetky delitele, ktoré majú súčet exponentov v prvočíselnom rozklade 200.

Hint 21. Představte si množinu všech možných bodových zisků jako krychli $8 \times 8 \times 8$. Jedno patro až na 16 bodů pokryjete čtyřmi řetězci. Toto pokrytí použijte na každé patro, zbytek krychle pokryjete 16 řetězci a máte tak $4 \times 8 + 16 = 48$ řetězců.

Hint 22. Posloupnost ze zadání označme $(x_n)_{n=1}^{ab+1}$. Tuto posloupnost můžeme chápat jako množinu dvojic (x_n, n). Zvolte uspořádání, aby rostoucí podposloupnost byla řetězcem a klesající antiřetězcem. Předpokládejte, že největší antiřetězec má délku b a za použití Dilworthovy věty a Dirichletova principu odvoďte dolní odhad pro nejdelší řetězec.

Hint 23. Rozdělte okraj čtverce na 4 „rohy“. Pozor na přesné zadání množin, aby vyloučilo rovnost (v úloze je ostrá nerovnost).

Hint 24. Rozdělte na čtverečky o straně $\frac{1}{5}$ m.

Hint 25. Strážník stojící na křižovatce dohlédne každým směrem 100 metrů. Rozmístěte na křižovatky šachovnicově strážníky a najděte strážníka, který vidí dva automaty.

Hint 26. Pokud žádná vzdálenost není větší než jedna, dá se celá množina pokrýt jedním kruhem. V opačném případě, jsou-li A, B body s vzdáleností větší než jedna, pak celou množinu pokryjete dvěma kruhy se středy v A, B.

Hint 27. Uvažujte stejné rozkrájení jako v příkladu a natočte si ho tak, aby některý bod ležel na hranici dvou oblastí.

Hint 28. Vezměte na okraji kruhu pět bodů, jejichž vzájemná vzdálenost je větší než 1. Natočte je tak, aby bylo možné přidat blizoučko k jednomu z nich ještě jeden ale do jiné oblasti.

Hint 29. Rozdělte kruh s poloměrem 7 na šestiny (jako v příkladu) a zbylé mezikruží rozdělte na dvanáctiny. Poznámka: s trikem z předchozích dvou úloh je opět možné zmenšit počet potřebných bodů o jedna.

Obsah

Kvadratické zvyšky a primitívny prvok (Martin Andričík) 3
Generující funkce (Filip Čermák) 9
Analytické metody v olympiádní teorii čísel (Matěj Doležálek) 18
Teorie grafů (Petr Hladík) 29
Jensenova a permutační nerovnost (Josef Minařík) 38
Mocnost (Magdaléna Mišinová) 46
Harmonický dvojpomer (Michal Pecho) 54
Dirichletov princíp (Michal Staník) 61