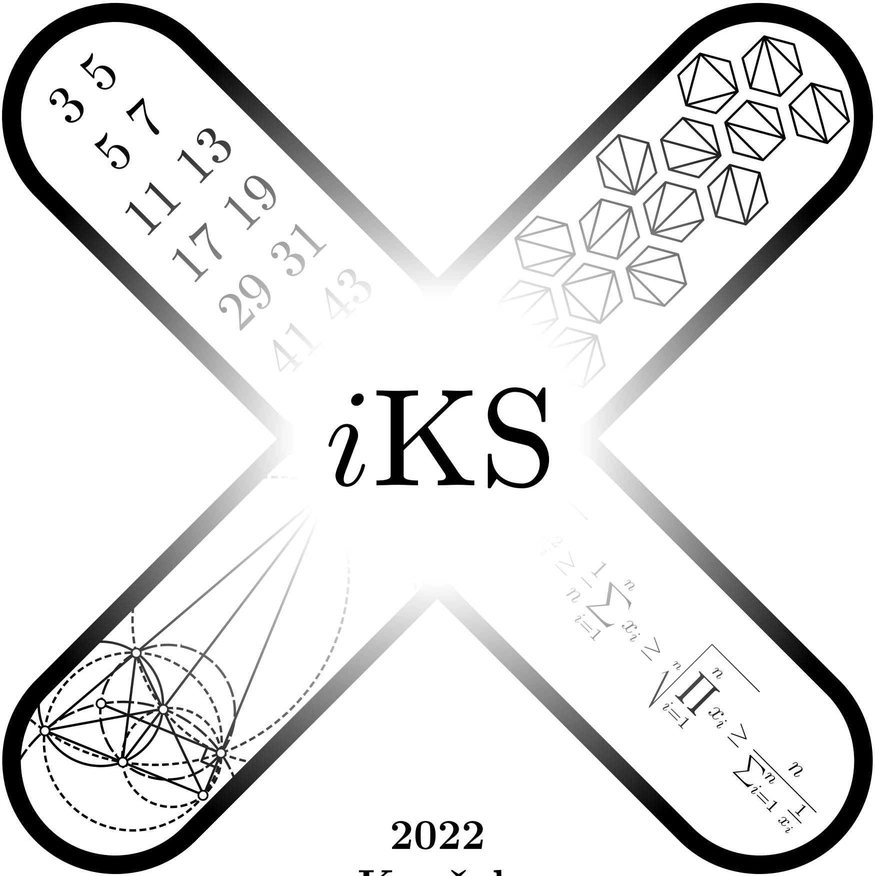


2022

Kunžak

Matěj Doležálek
Josef Minařík
Magdaléna Mišinová
Radek Olšák
Martin Raška
Michal Staník
Rado Švarc

Aritmetické vlastnosti polynomů

Matěj Doležálek

Abstrakt. Na polynomy klasicky nahlížíme jako na funkce, které shodou okolností mají hezký předpis. Nový úhel pohledu se však otevírá, začneme-li místo toho s polynomy zacházet jako s formálními výrazy, do kterých se shodou okolností dá dosazovat. To nám umožní zkoumat jejich čísloteoretické vlastnosti jako dělitelnost, ireducibilitu nebo třeba násobnost kořenů. Tímto přístupem trochu zabrousíme do vysokoškolské teorie, ale získané nástroje dobře upotřebíme ke zdolání olympiádních úloh.

Definice. *Oborem integrity* rozumíme množinu R, v níž se dá sčítat, odečítat a násobit podle všech obvyklých pravidel (včetně toho, že součin nenulových prvků je nenulový). Obor integrity K, v němž se navíc dá dělit každým nenulovým prvkem, nazveme *těleso.*

Úmluva. Není-li řečeno jinak, budeme pro obecnost označovat písmenem R libovolný obor integrity a písmenem K libovolné těleso. Pokud se s těmito pojmy nekamarádíš, můžeš si s klidným svědomím konkrétněji představovat obor celých čísel $\mathbb{Z}$ a tělesa (což jsou zároveň také obory integrity) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{Z}_p$ pro prvočísla p.

Obory polynomů

Definice. *Polynomem* nad R rozumíme výraz tvaru

$$f = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

kde n je nezáporné celé číslo a $c_i \in R$, tyto prvky nazýváme *koeficienty* f. *Stupněm* nenulového f (značíme $\deg f$) rozumíme největší k takové, že $c_k \neq 0$, a stupeň nulového polynomu dodefinováváme jako $-\infty$.

Polynomy lze sčítat po členech a násobit pomocí distributivity a vztahů $x^k \cdot x^\ell = x^{k+\ell}$. Toto jim dává strukturu oboru integrity, který značíme $R[x]$.

Cvičení. Pro polynomy f, g nad oborem integrity platí

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\} \quad \text{a} \quad \deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g.$$

Poznámka. Koeficient c_0 nazýváme *absolutní člen.* Koeficient $c_{\deg f}$ polynomu $f \neq 0$ se nazývá *vedoucí koeficient* a někdy se značí $\operatorname{lc} f$. Polynom s vedoucím koeficientem 1 se nazývá *monický.*

Definice. V oboru integrity R říkáme, že a *dělí* b (značíme $a \mid b$), pokud existuje c takové, že $b = ac$. Dále říkáme, že a je kongruentní b modulo m (značíme $a \equiv b \pmod{m}$), pokud $m \mid a - b$. Prvek d nazveme *největším společným dělitelem* prvků a, b, pokud $d \mid a$, $d \mid b$ a zároveň pro každé c splňující $c \mid a$, $c \mid b$ platí i $c \mid d$.

Speciálně tyto obecné definice používáme i v oborech polynomů $R[x]$.

Tvrzení (dělení se zbytkem). Je-li K těleso, pak pro libovolná $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$ lze zvolit $q, r \in K[x]$ tak, že $f = qg + r$ a zároveň $\deg r < \deg g$.

Tvrzení (Bézoutova identita). Je-li K těleso a $d \in K[x]$ je největším společným dělitelem $f, g \in K[x]$, pak existují $a, b \in K[x]$ taková, že $af + bg = d$.

Dosazování a kořeny

Definice. Je-li $f = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0 \in R[x]$ a máme další polynom $g \in R[x]$, můžeme jej *dosadit* do f a obdržet tak

$$f(g) = c_n g^n + \dots + c_1 g + c_0 \in R[x].$$

Speciálně můžeme dosazovat prvky $a \in R$. Prvek $r \in R$ splňující $f(r) = 0$ nazýváme *kořenem* polynomu f.

Tvrzení. Jsou-li $f, a, b \in R[x]$, pak v $R[x]$ platí $a - b \mid f(a) - f(b)$. Ekvivalentně, pokud $a \equiv b \pmod{m}$, pak i $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

Cvičení. Je-li $r \in R$ kořenem polynomu $f \in R[x]$, pak $x - r \mid f$.

Definice. Říkáme, že $r \in R$ je kořenem *násobnosti* m polynomu f, jestliže platí $(x - r)^m \mid f$.

Tvrzení. Nenulový polynom stupně n nad oborem integrity má v tomto oboru nanejvýš n kořenů včetně násobnosti.

Cvičení. Pokud se polynomy f, g stupně nanejvýš n nad oborem integrity shodují v alespoň $n + 1$ bodech, pak $f = g$.

Věta (základní věta algebry). Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupně n má v $\mathbb{C}$ přesně n kořenů včetně násobnosti.

Tvrzení. Jsou-li $x_1, \dots, x_n \in R$ kořeny (včetně násobnosti) polynomu $f \in R[x]$ stupně n, pak

$$f = a(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

pro nějaké $a \in R$.

Tvrzení (Viètovy vztahy). Je-li v předchozím tvrzení $f = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$, pak pro $0 \leq k \leq n$ platí

$$(-1)^k c_k = c_n \cdot \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |J| = k}} \prod_{i \in J} x_i.$$

Věta (rational root theorem). Je-li racionální číslo $\frac{p}{q}$ v základním tvaru kořenem celočíselného polynomu $c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$, pak platí $p \mid c_0$ a $q \mid c_n$.

Cvičení. Racionální kořen monického celočíselného polynomu už musí být celé číslo.

Tvrzení. Je-li $f \in \mathbb{C}[x]$ nekonstantní, pak pro $|z| \to \infty$ nastává i $|f(z)| \to \infty$. Neformálně řečeno: nekonstantní polynomy při zvětšování argumentu utíkají do nekonečna.

Definice. *(Formální) derivací* polynomu

$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \in R[x]$$

rozumíme polynom

$$f' = \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1} \in R[x].$$

Tvrzení. Formální derivace splňuje obvyklé vztahy pro analýznickou derivaci, např.

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \text{a} \qquad (f(g))' = f'(g) \cdot g'.$$

Tvrzení (detekce násobných kořenů). Je-li r kořenem násobnosti $m > 1$ polynomu f, pak je také kořenem násobnosti $m-1$ polynomu f'.

Ireducibilita

Definice. Prvek $u \in R$ oboru integrity nazveme *jednotkou*, pokud $u \mid 1$. Nenulový prvek $q \in R$ nazveme *ireducibilním*, pokud není to jednotka a jeho jsou děliteli až na přenásobení jednotkou pouze 1 a q. Nenulový prvek $p \in R$ nazveme *prvočinitelem*, pokud to není jednotka a navíc $p \mid ab$ implikuje $p \mid a$ nebo $p \mid b$ pro libovolná $a, b \in R$.

Poznámka. O ireducibilitě vždy mluvíme nad konkrétním oborem: kupříkladu polynom $2x^2 + 2$ není ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, zatímco nad $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ ireducibilní je a nad $\mathbb{C}$ opět není.

Tvrzení. Je-li K těleso, pak je každý ireducibilní polynom v $K[x]$ nutně také prvočinitelem.

Tvrzení (kořeny chodí spolu). Nechť jsou $K \subseteq L$ tělesa a $f, g \in K[x]$ polynomy. Pokud je f ireducibilní nad K a má s g společný kořen v L, pak už v $K[x]$ platí $f \mid g$.

Poznámka. Předchozí tvrzení typicky využijeme s $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$.

Cvičení. Nahlédni, že ireducibilní polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ nemůže mít násobný komplexní kořen.

Definice. Polynom $c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$ nazveme *primitivním*, pokud $\gcd(c_0, c_1, \ldots, c_n) = 1$.

Věta (Gaussovo lemma). Primitivní polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, právě když je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Věta (Eisensteinovo kritérium). Nechť je $f = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitivní polynom. Pokud pro nějaké prvočíslo p platí

(i) $p \mid c_i$ pro $0 \le i \le n-1$,
(ii) $p \nmid c_n$,
(iii) $p^2 \nmid c_0$,

pak je f ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.

Věta (rozšířený Eisenstein). Nechť je $f = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitivní polynom. Pokud pro nějaké prvočíslo p a přirozené číslo k platí

(i) $p \mid c_i$ pro $0 \le i \le k-1$,
(ii) $p \nmid c_k$,
(iii) $p^2 \nmid c_0$,

pak je f násobkem ireducibilního polynomu stupně alespoň k.

Úlohy

Úloha 1. Je dán polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ stupně n a přirozená čísla k, m. Nahlédni, že pokud žádné z čísel

$$f(k), \quad f(k+1), \quad \dots, \quad f(k+m-1)$$

není násobkem m, pak f nemá celočíselný kořen.

Úloha 2. Komplexní číslo $\alpha \neq 0$ je kořenem polynomu $f \in \mathbb{Q}[x]$. Najdi polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$, jehož kořenem je $\frac{1}{\alpha}$.

Úloha 3. Lze zvolit reálná a, b, c tak, aby každý ze tří polynomů

$$ax^2 + bx + c, \qquad bx^2 + cx + a, \qquad cx^2 + ax + b$$

měl dva různé reálné kořeny?

Úloha 4. Královské vojsko táhne krajinou po křivce, která má tvar grafu polynomu f s celočíselnými koeficienty. Boleslav si cestu zkrátil po úsečce mezi body $A = [a, f(a)]$ a $B = [b, f(b)]$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$. Všiml si navíc, že délka této úsečky byla celé číslo. Dokaž, že Boleslav táhl ve směru rovnoběžném s osou x.

Úloha 5. Nahlédni, že polynom

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

nemá násobný kořen.

Úloha 6. Nahlédni, že $x^a - 1 \mid x^b - 1$, právě když $a \mid b$.

Úloha 7. Pro polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ má rovnice $|f(x)| = 1$ alespoň tři různá celočíselná řešení. Dokaž, že potom f nemá celočíselný kořen.

Úloha 8. Nahlédni, že $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ má násobný kořen.

Úloha 9. Lucienovi se zdálo o nenulovém polynomu $f \in \mathbb{Z}[x]$ s nezápornými celočíselnými koeficienty. Áďa se může ptát na celá čísla z a Lucien jí vždy odpoví hodnotu $f(z)$. Kolik nejméně otázek Áďa potřebuje, aby zaručeně uhodla Lucienův polynom? (PraSe–36–4p–6)

Úloha 10. Monický polynom $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$ má všechny kořeny celočíselné a po dvou nesoudělné. Dokaž, že $\gcd(c_0, c_1) = 1$.

Úloha 11. Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ má sudý stupeň a všechny koeficienty liché. Může mít racionální kořen?

Úloha 12. Polynomy $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ splňují $x^2 + x + 1 \mid f$ a zároveň

$$f(x) = g\left(x^3\right) + x \cdot h\left(x^3\right).$$

Dokaž, že $x - 1$ dělí g i h.

Úloha 13. Jsou dána $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ taková, že ad je liché a bc sudé. Nahlédni, že $ax^3 + bx^2 + cx + d$ má (klidně komplexní) iracionální kořen.

Úloha 14. Reálný polynom $ax^4 + bx^3 + 1$ je násobkem $(x-1)^2$. Urči a, b.

Úloha 15. Pro každé prvočíslo p je polynom $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.

Úloha 16. Najdi všechny dvojice přirozených čísel (m, n) takové, že

$$1 + x + \cdots + x^m \mid 1 + x^n + \cdots + x^{mn}.$$

(USAMO 1977)

Úloha 17. Jsou dány polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, které jsou v $\mathbb{Z}[x]$ nesoudělné. Nahlédni, že posloupnost $a_n = \gcd(f(n), g(n))$ je periodická.

Úloha 18. Najdi všechny polynomy $f \in \mathbb{Z}[x]$, jež splňují $f(n) \mid n! + 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (PraSe–41–4p–7)

Úloha 19. Nekonečnou posloupnost $c_0, c_1, \ldots$ přirozených čísel nazvěme *krutopřísnou*, pokud je pro každé $n \in \mathbb{N}$ polynom

$$c_nx^n + \cdots + c_1x + c_0$$

ireducibilní nad $\mathbb{Z}$. Najdi krutopřísnou posloupnost, v níž se vyskytují jen dva navzájem různé prvky. (PraSe–40–3s–2)

Úloha 20. Pro která $k \in \mathbb{Z}$ lze zvolit $a, b \in \mathbb{Z}$ tak, aby polynomy

$$x^5 - kx + 1 \qquad \text{a} \qquad x^2 - ax - b$$

měly společný komplexní kořen?

Úloha 21. Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ má tu vlastnost, že pro libovolná přirozená m, n má kongruence $f(x) \equiv n \pmod{m}$ řešení. Dokaž, že f je lineární.

Úloha 22. Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ a čísla $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ splňují

$$\underbrace{f(\cdots f(}_{k\text{-krát}}a)\cdots) = a.$$

Dokaž, musí platit i $f(f(a)) = a$.

Úloha 23. Najdi všechny polynomy $f \in \mathbb{Z}[x]$, které splňují $n \mid f(2^n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 24. Dokaž, že pro přirozené $n > 1$ je polynom $x^n + 5x^{n-1} + 3$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}$. (IMO 1993)

Úloha 25. Pro které polynomy $f \in \mathbb{Z}[x]$ platí pro $a, b \in \mathbb{Z}$ implikace

$$a \mid b \implies f(a) \mid f(b)?$$

Úloha 26. Jsou dána $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ taková, že pro $S = a + b + c + d + e + f$ platí $S \mid abc + def$ a zároveň $S \mid ab + bc + ca - de - ef - fd$. Dokaž, že S je složené číslo. (ISL 2005 N3)

Úloha 27. Jsou-li pro $a, b, c \in \mathbb{Z}$ obě čísla $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ i $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ celá, dokaž, že $|a| = |b| = |c|$.

Úloha 28. Je dáno zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, jež splňuje:

(i) Pro libovolný polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ je $\varphi(f + 1) = \varphi(f) + 1$.
(ii) Pokud pro polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ platí $f \mid g$, pak i $\varphi(f) \mid \varphi(g)$.

Dokaž, musí existovat $z \in \mathbb{Z}$ takové, že $\varphi(f) = f(z)$ pro každé $f \in \mathbb{Z}[x]$. (PraSe–40–3s–3)

Úloha 29 (Schurova věta). Pro nekonstantní $f \in \mathbb{Z}[x]$ existuje nekonečně mnoho prvočísel p, která dělí nějakou nenulovou hodnotu $f(n) \neq 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 30. Budiž dán nekonstantní polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ a přirozená čísla n, k. Nahlédni, že existuje $a \in \mathbb{N}$ takové, že každé z čísel $f(a), f(a+1), \ldots, f(a+n-1)$ má alespoň k různých prvočíselných dělitelů.

Úloha 31. Je dán polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ splňující $f(n) > n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Definujme nekonečnou posloupnost celých čísel pomocí $a_1 = 1$, $a_{i+1} = f(a_i)$. Dokaž, že pokud je pro každou $m \in \mathbb{N}$ nějaký člen a_i násobkem m, pak je $f = x + 1$. (Iran TST 2004)

Úloha 32. Je dán polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ stupně $n > 1$. Dokaž, že lze zvolit $g \in \mathbb{Z}[x]$ tak, aby $f(g(x))$ byl reducibilní nad $\mathbb{Z}$.

Úloha 33. Jsou-li $a_1, \ldots, a_n$ navzájem různá celá čísla, dokaž, že polynom

$$(x - a_1) \cdots (x - a_n) - 1$$

je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.

Úloha 34. Pro monické ireducibilní polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ platí, že $f(n)$ a $g(n)$ mají stejné množiny prvočíselných dělitelů pro všechna kromě konečně mnoha $n \in \mathbb{N}$. Dokaž, že $f = g$.

Úloha 35. Pro které polynomy $f \in \mathbb{Z}[x]$ platí, že jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$ nesoudělná, pak jsou i $f(a)$, $f(b)$ nesoudělná? (Iran 2004)

Úloha 36. Je dán polynom $f = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + 1$, v němž všechna c_i jsou nezáporná celá čísla a navíc platí $c_{n-i} = c_i$. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho dvojic (a, b) přirozených čísel takových, že $a \mid f(b)$ a zároveň $b \mid f(a)$. (*i*KS 2–N5)

Úloha 37. Pro která k platí, že splňuje-li $f \in \mathbb{Z}[x]$ nerovnosti $0 \le f(a) \le k$ pro $a \in \{0, \ldots, k+1\}$, pak už $f(0) = f(1) = \cdots = f(k+1)$. (ISL 1997)

Úloha 38. Pro která n lze zvolit navzájem různá celá čísla $a_1, \ldots, a_n$ tak, aby polynom

$$(x - a_1) \cdots (x - a_n) + 1$$

byl reducibilní nad $\mathbb{Z}$?

Úloha 39. Mějme polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ s alespoň dvěma různými celočíselnými kořeny a označme $A = \{f(a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Ukaž, že pokud v A leží m po sobě jdoucích přirozených čísel, pak tato čísla nejsou menší než $\frac{m!}{2}$.

Úloha 40. Mějme funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, k níž existuje polynom p takový, že pro každá $a, b \in \mathbb{Z}$ platí nerovnost $|f(a)| < p(a)$ a rozdíl $f(a) - f(b)$ je celočíselným násobkem $a - b$. Dokaž, že pro jistý polynom $q \in \mathbb{R}[x]$ platí $f(a) = q(a)$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}$. (PraSe 34–2j–8)

Literatura a zdroje

[1] Filip Sládek: *Artimetické vlastnosti polynómov*, sborník *i*KS, 2013.
[2] Danil Koževnikov: *Aritmetické vlastnosti polynomů*, Paseky, 2018.
[3] Fíla Čermák, Matěj Doležálek: *Teorie nejen čísel*, PraSečí seriál, 2020/2021.

Hinty

Hint 1. Modulo m.
Hint 2. Jak vypadá $f\left(\frac{1}{x}\right)$?
Hint 3. Diskriminanty.
Hint 4. Rozdíl argumentů dělí rozdíl hodnot.
Hint 5. Nevypadá derivace nějak hezky?
Hint 6. Odmocniny z jedničky.
Hint 7. Rozdíl argumentů dělí rozdíl hodnot.
Hint 8. Derivace.
Hint 9. Desítková (nebo jakákoliv jiná poziční) soustava.
Hint 10. Viètovy vztahy.
Hint 11. Rational root theorem a modulo 2.
Hint 12. Kořeny $x^2 + x + 1$.
Hint 13. Pokud má všechny kořeny racionální, vyvoď spor skrz rational root theorem a Viètovy vztahy.
Hint 14. Derivace a dosazení.
Hint 15. Posuň argument.
Hint 16. Odmocniny z jedničky.
Hint 17. Gaussovo lemma a Bézout.
Hint 18. $f(n)$ by nemělo mít malé dělitele, ale přitom hodnoty polynomu modulo cokoliv jsou periodické.
Hint 19. Eisenstein v obráceném pořadí.
Hint 20. $x^2 \equiv ax + b$. Pozor na pečlivý rozbor případů, mělo by vyjít $k \in \{-1, 0, 2\}$.
Hint 21. Co se stane, když je $a - b$ vlastní dělitel $f(a) - f(b)$?
Hint 22. Rozdíl argumentů dělí rozdíl hodnot, opakovaně.
Hint 23. Malý Fermat.
Hint 24. Rozšířený Eisenstein.
Hint 25. $f(2x) - 2^{\deg f} f(x)$.
Hint 26. $(x + a)(x + b)(x + c) - (x - d)(x - e)(x - f)$.
Hint 27. Vyrob polynom, který o příslušných číslech něco hezkého poví.
Hint 28. Zvol $z = \varphi(x)$.
Hint 29. Předpokládej, že je jen konečně mnoho takových prvočísel, omez valuace a vyvoď spor s tím, že nekonstantní polynomy utíkají do nekonečna.
Hint 30. Schur + čínská zbytková věta.
Hint 31. Rozdíl argumentů je dělitelem rozdílu hodnot. Co když to bude vlastní dělitel?
Hint 32. $g(x) - x \mid f(g(x)) - f(x)$.
Hint 33. Uvaž rozklad a dosazuj a_i.
Hint 34. Zkombinuj úlohu o společných dělitelích hodnot nesoudělných polynomů s Schurovou větou.
Hint 35. Pokud $f(0) \neq 0$, využij prvočísla $p \nmid f(0)$.
Hint 36. $(a, b) \mapsto \left(b, \frac{f(b)}{a}\right)$.
Hint 37. Vytkni kořeny z $f(x) - f(0)$.
Hint 38. Uvaž rozklad a dosazuj a_i.

Hint 39. Uvědom si, jak mohou být uspořádány vzory uvažované m-tice a vyrob polynom s mnoha kořeny.

Hint 40. Interpoluj v dostatečně mnoha bodech, pak ukaž rovnost ve všech dostatečně velkých bodech.

Vieta jumping

Matěj Doležálek

Abstrakt. Počínaje úlohou číslo 6 z IMO 1988 lze v olympiádách narazit na magické úlohy, které požadují vyvodit ze zdánlivě tuctových dělitelností neuvěřitelně silné závěry. Metodou pro řešení úloh s touto dosti specifickou příchutí je *Vieta jumping* – dosti specifická souhra Viètových vztahů a klasického nekonečného sestupu. V této přednášce zkusíme Vieta jumpingu odebrat jeho magickou auru, prohlédnout si každou jeho přísadu zvlášť a získat hezkou obrázkovou představu pro přeskakování mezi kořeny.

První přísadu na cestě k Vieta jumpingu napovídá samotný název:

Tvrzení (Viètovy vztahy). Má-li polynom $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ kořeny $x_1, \ldots, x_n$ (včetně násobností), pak platí

$$(-1)^k \frac{c_k}{c_n} = \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \prod_{i \in J} x_i.$$

Speciálně pro $n = 2$ a $c_2 = 1$ platí $x_1 + x_2 = -c_1$ a $x_1 x_2 = c_0$.

Diofantická geometrie

Začneme s geometrickým pohledem na diofantické rovnice, který má sice k Vieta jumpingu jako takovému daleko, ale používá podobné myšlenky a dává k němu hezkou geometrickou představu.

Definice. Bod v rovině nazveme *racionálním*, pokud jsou všechny jeho souřadnice racionální čísla. Křivku v rovině nazveme *racionální*, pokud se dá zapsat jako množina řešení nějaké polynomální rovnice s racionálními koeficienty. *Stupněm* křivky rozumíme stupeň polynomu, který ji zadává.

Tvrzení. Nechť racionální přímka protíná racionální křivku stupně n v n bodech (včetně násobnosti), z nichž $n-1$ je racionálních. Potom už je všech n průsečíků racionálních.

Poznámka. Pokud $n \geq 3$, pak je uvažovaná přímka automaticky racionální už jen z toho, že prochází ≥ 2 racionálními body.

Úloha 1. Najdi všechna řešení $x^2 + y^2 = z^2$ v celých číslech.

Úloha 2. Dokaž, že když na kružnici v rovině leží tři různé racionální body, pak už jich na ní leží nekonečně mnoho.

Úloha 3. Rovnice $x^2+2y^2=3z^2$ má nekonečně mnoho primitivních$^{*)}$ celočíselných řešení.

Úloha 4 (eliptické křivky). Uvažujme v rovině křivku

$$E: \quad y^2 = x^3 + ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{Q},$$

přičemž si představujme, že navíc prochází ještě bodem O „v nekonečnu ve svislém směru", který považujeme za racionální. Předpokládejme také, že E je hladká (má v každém bodě tečnu).

Nechť jsou A, B dva body na E, pak jako $A * B$ označíme třetí průsečík$^{\dagger)}$ přímky AB s E a jako $-A$ označíme obraz A v osové souměrnosti podle osy x. Poté definujeme $A+B$ jako $-(A*B)$. Nahlédni, že:

(i) Pro racionální A, B je $A+B$ opět racionální.
(ii) $A+O=A$.
(iii) $A+(-A)=O$.
(iv) Tečna v racionálním bodě A je racionální přímka.
(v) Pokud $A=B$, tak za přímku AA můžeme považovat tečnu v bodě A a vše bude stále fungovat.

Taky platí $A+(B+C)=(A+B)+C$, ale to je netriviální dokázat.

Úloha 5. Dokaž, že v rovině lze zvolit nekonečnou množinu bodů

$$\ldots, \quad P_{-2}, \quad P_{-1}, \quad P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots$$

tak, že pro celá čísla a, b, c leží P_a, P_b, P_c na jedné přímce, právě když $a+b+c=2014$.

(USAMO 2014)

Sestupy

Druhou půlkou Vieta jumpingu je nekonečný sestup: v přirozených číslech se nedá klesat do nekonečna. Totéž vyjadřuje skutečnost, že přirozená čísla jsou dobře uspořádaná – každá jejich neprázdná podmnožina má minimum.

Úloha 6. Dokaž, že rovnice $a^3+2b^3+4c^3=6abc$ nemá řešení v přirozených číslech.

Úloha 7. Najdi všechna řešení $x^4+y^4+z^4=9w^4$ v celých číslech.

Úloha 8. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2+y^2+z^2=2xyz$.

(Korea 1996)

Úloha 9. Řeš $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ v celých číslech.

Úloha 10. Je dáno 2017 kamenů s celočíselnými hmotnostmi. Kdykoliv jeden kamen odebereme, lze ty zbylé rozdělit na dvě stejně hmotné hromádky po 1008 kamenech. Dokaž, že všechny kameny mají stejnou hmotnost.

$^{*)}$ Řešení (x,y,z) nazveme primitivním, pokud jsou x, y, z po dvou nesoudělná.

$^{\dagger)}$ Včetně násobnosti: např. pokud se AB dotýká E v bodě B, pak je třetím průsečíkem bod B.

Skákání k dalším řešením

O něco snadnější verzí Vieta jumpingu je jeho obrácený chod: vyrábění větších řešení z malých.

Úloha 11. Pro přirozené n řešme rovnici

$$a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$$

v přirozených číslech. Dokaž, že:

(i) Pro $n = 2017$ neexistuje žádné řešení (a, b, c).
(ii) Pro $n = 2016$ je v každém řešení číslo a násobkem 3.
(iii) Pro $n = 2016$ existuje nekonečně mnoho řešení. (MEMO 2016 T8)

Úloha 12. Je dáno nenulové celé číslo k. Dokaž, že rovnici

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

vyhovuje lichý počet uspořádaných dvojic celých čísel (x, y), právě když je k dělitelné sedmi. (MO A-66-III-6)

Úloha 13. Má pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a + b + c}$$

nekonečně mnoho řešení v přirozených číslech? (ISL 2002 N4)

Úloha 14. Dokaž, že pro každé přirozené číslo m lze najít nekonečně mnoho dvojic přirozených čísel (x, y) takových, že x, y jsou nesoudělná, $x \mid y^2 + m$ a zároveň $y \mid x^2 + m$. (ISL 1992)

Úloha 15. Existuje nekonečně mnoho dvojic přirozených čísel (x, y) takových, že

$$x \mid y^2 + y + 1 \qquad \text{a zároveň} \qquad y \mid x^2 + x + 1?$$

Úloha 16. Najdi nejmenší přirozené číslo n, pro něž existuje nekonečně mnoho n-tic $(a_1, \ldots, a_n)$ kladných racionálních čísel takových, že

$$a_1 + \cdots + a_n \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

jsou celá čísla. (ISL 2017 N6)

Úloha 17. Budiž n přirozené číslo, které není čtverec a uvažujme rovnici

$$k = \frac{x^2 - n}{x^2 - y^2}.$$

Nechť je A množina těch přirozených k, pro něž má rovnice celočíselné řešení s $x > \sqrt{n}$, zatímco B budiž množina těch přirozených k, pro něž má rovnice celočíselné řešení s $0 \le x < \sqrt{n}$. Dokaž $A = B$. (ISL 2016 N5)

Úloha 18. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho trojic přirozených čísel x, y, z splňujících $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Parametrizuj část z nich pomocí Fibonacciho čísel. (Markov)

Úloha 19. Najdi největší možnou hodnotu výrazu $a^2 + b^2$ pro přirozená $a, b \le 1981$ splňující $\left(a^2 - ab - b^2\right)^2 = 1$. (IMO 1981/3)

Skákání s parametrem

Dostáváme se k nejtypičtějším úlohám na Vieta jumping. Ty většinou nastíní nějakou dělitelnost s kvadratickými výrazy a požadují něco dokázat o podílu či jiném parametru; občas se prostě hledají všechna řešení. Méně časté je skákání v nerovnostech, ale po zafixování vhodné veličiny se řeší podobně.

Motto. Dělitelnost je jen rovnice s proměnnou navíc.

Úloha 20. Pro přirozená čísla a, b je

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$$

celé číslo. Dokaž, že je to číslo 3.

Řešení. Pojmenujme $k = \frac{a^2+b^2+1}{ab}$. Pak řešme $a^2 - kba + b^2 + 1 = 0$ jako kvadratickou rovnici v a. Z Viètových vztahů musí její kořeny splňovat

$$a_1 + a_2 = kb,$$
$$a_1 a_2 = b^2 + 1.$$

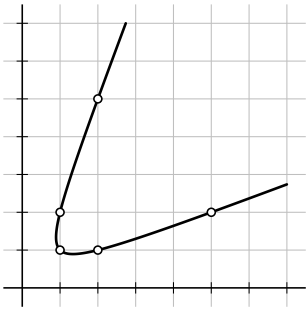
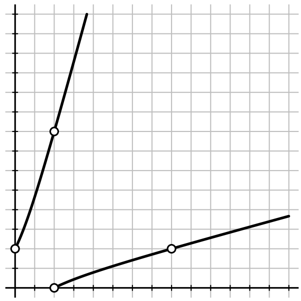
Pokud je tedy $a_1 = a$ přirozené číslo, pak je z prvního vztahu a_2 taktéž celé, zatímco z druhého je kladné. Dohromady je tedy a_2 přirozené.

Zafixujme nyní k a uvažme řešení $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ takové, že $a + b$ je minimální. Víme, že (a_2, b) bude taky řešení v přirozených číslech, takže $a_2 + b \ge a + b$. Tedy

$$a \le a_2 = \frac{b^2 + 1}{a}$$

neboli $a^2 \le b^2 + 1$. Zcela obdobně taky $b^2 \le a^2 + 1$, takže dva přirozené čtverce a^2, b^2 se od sebe liší nejvýš o 1. Mezi různými přirozenými čtverci je ale vždy mezera alespoň 3, takže nutně $a = b$.

Z toho už plyne $a^2 \mid 2a^2 + 1$, takže $a = 1$, což dá $k = 3$, jak jsme chtěli.

Úloha 21. Uvažujme přirozená čísla a, b. Dokaž, že pokud je

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

celé číslo, pak už je to čtverec. (IMO 1988/6)

Úloha 22. Najdi všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

celé číslo.

Úloha 23. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{a^2+b^2+3}{ab}$$

pro přirozená a, b. (Turkey TST 1994)

Úloha 24. Je dáno přirozené n. Nahlédni, že pro přirozená a, b může výraz

$$\frac{a^2+b^2+n}{ab}$$

nabývat jen konečně mnoha celočíselných hodnot.

Úloha 25. Uvažujme nad přirozenými čísly rovnici $x^2+y^2-axy+2=0$ s přirozeným parametrem a. Dokaž, že pro $a=4$ má rovnice nekonečně mnoho řešení, zatímco pro $a\neq 4$ neexistují žádná. (Greece TST 2008)

Úloha 26. Najdi všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí

$$ab+a+b \mid a^2+b^2+1.$$

Úloha 27. K přirozenému číslu k existují přirozená a, b splňující

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=k.$$

Urči všechny možné hodnoty k. (MOP 2007)

Úloha 28. Dokaž, že dělitelnost $pq+1 \mid p^2+q^2$ nemá řešení v prvočíslech.

Úloha 29. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{p^2+q^2+1}{pq+2}$$

pro prvočísla p, q.

Úloha 30. Přirozená čísla a, b, c splňují

$$0 < a^2+b^2-abc \leq c.$$

Dokaž, že a^2+b^2-abc je čtverec. (Crux Mathematicorum)

Úloha 31. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$$

pro přirozená a, b.

Úloha 32. Najdi všechny dvojice monických komplexních polynomů P, Q takových, že $P \mid Q^2+1$ a zároveň $Q \mid P^2+1$. (IMC 2018)

Úloha 33. Urči všechna přirozená čísla n, pro něž má rovnice

$$x+y+z+w = n\sqrt{xyzw}$$

řešení v přirozených číslech. (Vietnam 2002)

Úloha 34. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

pro přirozená a, b, c. (AMM 1994)

Úloha 35. Lichá přirozená čísla a, b splňují $2ab+1 \mid a^2+b^2+1$. Dokaž, že $a=b$. (Iran 2013)

Neočividné skákání

V následujících úlohách se nedá skákat hned – je potřeba se nejdřív pomocí nějakých substitucí dostat k rovnici či dělitelnosti, která vypadá lépe.

Úloha 36. Přirozená čísla a, b splňují $4ab-1 \mid \left(4a^2-1\right)^2$. Dokaž, že $a=b$. (IMO 2007/5)

Úloha 37. Lichá přirozená čísla $m>n$ splňují

$$m^2-n^2+1 \mid n^2-1.$$

Dokaž, že m^2-n^2+1 je čtverec. (Ireland 2005)

Úloha 38. Pro jistá přirozená x, y, k platí $\frac{x^2+1}{y^2} + 4 = k^2$. Dokaž, že $k = 3$.

Úloha 39. Najdi všechny dvojice přirozených čísel (x, y), pro něž je

$$(xy + 1)(xy + x + 2)$$

čtverec. (China TST 2018)

Úloha 40. Jsou dána přirozená čísla a, b. Dokaž, že

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$

není čtverec. (ISL 2019 N8)

Literatura a zdroje

[1] Filip Bialas: *Vieta jumping*, Paseky, 2018.
[2] Víťa Kala, Jakub „šnEk“ Opršal: *Teorie čísel*, PraSečí seriál, 2008/2009.
[3] Pepa Svoboda: *Diofantovské rovnice*, sborník *i*KS, 2014.
[4] Rado van Švarc: *Úvod do diofantických rovnic*, Lipová-Lázně, 2016.

Hinty

Hint 1. Racionální přímky skrz jeden pevný bod na jednotkové kružnici.
Hint 2. Střed je racionální.
Hint 3. Racionální přímky skrz pevný bod. Vypsat všechna celočíselná řešení je trošku otrava kvůli technikáliím s největším společným dělitelem, tak se s tím moc nezdržuj.
Hint 4. (i) Racionální přímka skrz $3-1$ racionální body. (iv) Derivuj a využij racionalitu bodu.
Hint 5. Vol body na kubické křivce. Nepříjemnosti můžou vznikat kvůli $3 \nmid 2014$, ale dá se s nimi vypořádat.
Hint 6. Vezmi řešení s minimálním $a+b+c$ a všimni si, že v rovnici půjde zkrátit dvojka.
Hint 7. Třeba modulo 5 nebo 16.
Hint 8. Modulo 4.
Hint 9. Zeslab pravou stranu na $x^2y^2z^2$ a postupně krať prvočísla z x a y.
Hint 10. Vyrob zhruba poloviční sadu kamenů.
Hint 11. Pro první dvě části najdi správné modulo. V poslední najdi jedno řešení a skákej k větším a větším řešením.
Hint 12. Páruj ty body na elipse, které leží ve stejné výšce.
Hint 13. Zvol si m tak, aby jedno řešení existovalo, a přímočaře skákej k dalším. Taky to jde zabít náhodnými Pellovkami.
Hint 14. Sluč dělitelnosti do jedné a pak z jednoho řešení skákej k dalším. Rozmysli si, že skákání zachová nesoudělnost.
Hint 15. Sluč dělitelnosti do jedné a skákej.
Hint 16. Malá n vysporuj. Potom vyráběj další a další řešení skákáním.
Hint 17. Přesubstituuj do součtu a rozdílu, potom skákej po hyperbole.
Hint 18. Přímočaře skákej. Skákání podle prostřední proměnné (při seřazení podle velikosti) dá rekurenci lichých Fibonacciho čísel.
Hint 19. Najdi pár malých řešení a odhadni, která (a, b) řeší rovnici.
Hint 21. Zafixuj hodnotu a skákej k minimálnímu $a+b$. Nečtvercovost zařídí nenulovost absolutního členu. V případě záporného a_2 jej dosaď do zlomku a zkoumej znaménko.
Hint 22. Pokud je jedna proměnná větší než druhá, skoč k nižšímu řešení.
Hint 23. Minimální řešení zjednoduší dělitelnost.
Hint 24. Jen si pořádně rozmysli, co se dělo v předchozí a ukázkové úloze.
Hint 25. Standardně doskákej k $x=y$.
Hint 26. Standardní skákání, pozor nulu.
Hint 27. Skákej úplně stejně jako v ukázkové úloze.
Hint 28. Začni u minimálního bodu na hyperbole a pořádně prozkoumej skákací rekurence.
Hint 29. Doskákej k minimálnímu řešení. U jedné rodinky hyperbol podoba rekurence vyloučí prvočíselnost, zbylé možnosti povolí jen jednu hodnotu podílu.
Hint 30. Zafixuj $d = a^2 + b^2 - abc$ a skákej. Případ záporného a_2 vyřeš podobně jako v IMO 1988.
Hint 31. Zafixuj podíl k, doskákej k minimálnímu řešení a udělej odhad k pomocí $\frac{1}{ab}$.
Hint 32. V komplexních polynomech se dá skákat stejně dobře jako v celých číslech. Co dává smysl minimalizovat?

Hint 33. Vieta jumpingem odhadni $n \leq 4$, pak najdi příklady.
Hint 34. Využij Vieta jumping k odhadu výraz ≤ 9. Pak zbývá trochu pracné dorozebrání.
Hint 35. Skoky zachovávají paritu, lichost vyloučí $a_2 = 0$.
Hint 36. Uprav podmínku, aby byla symetrická, a následně skákej k minimálnímu řešení.
Hint 37. Čtvercovost dělitele se dokazuje mizerně – převeď to na čtvercovost nějakého podílu. Substituce do součtu a rozdílu dá symetrii.
Hint 38. Převeď na úlohu 20. Taky to lze ubít Pellovou rovnicí a okruhem $\mathbb{Z}[\sqrt{k^2-4}]$, ale není to vůbec zábava.
Hint 39. Největší společný dělitel dvou závorek napoví první z několika substitucí, která tě dovede ke skákatelné dělitelnosti. Ta bude (povrchně) připomínat úlohu 37.
Hint 40. Nechť se výraz rovná c^2 pro nějaké $c > a$. Substitucí $x = c+a$, $y = c-a$ dostaneš symetričtější situaci, v níž už se dá skákat.

Pravděpodobnostní metoda

Josef Minařík

Abstrakt. Nejdříve si zopakujeme základy teorie pravděpodobnosti a potom si ukážeme, jak můžeme s její pomocí něco dokázat. Zjistíme, že se občas vyplatí využít pravděpodobnost i v případech, kdy se v zadání úlohy nic náhodného neobjevuje.

Definice

V této části si zadefinujeme několik základních pojmů z teorie pravděpodobnosti. Většinu z nich asi znáš, ale může se hodit si některé z nich zopakovat. Zadefinujeme si jenom konečné pravděpodobnostní prostory, protože nám na skoro všechno budou stačit. Diskrétní prostory (které můžou být nekonečné) fungují ve většině ohledů stejně, jenom je potřeba si dát pozor na nějaké technické detaily. Se spojitými prostory je to ještě o něco složitější, ale obvykle stačí napsat místo sumy integrál a všechno víceméně funguje.

Definice. *Pravděpodobností prostor* je dán konečnou *množinou elementárních jevů* Ω a funkcí $\mathrm{P} : \Omega \to \mathbb{R}^+$ splňující

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\omega) = 1.$$

Definice. *Jev* A je podmnožina množiny elementárních jevů Ω. *Pravděpodobnost* jevu A definujeme jako

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\omega).$$

Definice. Jevy A a B nazveme *nezávislé*, jestliže $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

Definice. *Náhodná veličina* je funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Každému elementárnímu jevu tedy přiřadíme reálné číslo.

Definice. *Střední hodnota* náhodné veličiny X je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathrm{P}(\omega).$$

Definice. Indikátor jevu A je náhodná veličina I_A, která nabývá hodnoty 1 v případě, že A nastane, a hodnoty 0 jinak.

Základní nástroje

V této sekci je zmíněno několik triviálních pozorování a tvrzení, která budeme potřebovat k řešení většiny úloh.

Pozorování. Jestliže má jev nenulovou pravděpodobnost, musí někdy nastat.

Pozorování. Jestliže pro reálné číslo a a náhodnou veličinu X platí $\mathbb{E}(X) \geq a$, veličina X musí někdy nabývat hodnoty aspoň a.

Tvrzení (union bound). Pro jevy $A_1, \ldots, A_n$ platí

$$\mathrm{P}\left(\bigcup A_i\right) \leq \sum \mathrm{P}(A_i).$$

Pozorování. Pro jev A a jeho indikátor I_A platí $\mathbb{E}(I_A) = \mathrm{P}(A)$.

Tvrzení (linearita střední hodnoty).

- Pro náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ platí

$$\mathbb{E}\left(\sum X_i\right) = \sum \mathbb{E}(X_i).$$

- Pro reálné číslo a a náhodnou veličinu X platí

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X).$$

Může se hodit

Následující tvrzení mohou být užitečná v některých úlohách.

Definice. Náhodné veličiny X a Y jsou *nezávislé*, jestliže pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{P}(X \leq x \wedge Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq x) \cdot \mathrm{P}(Y \leq y).$$

Tvrzení. Pro nezávislé náhodné veličiny X a Y platí

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

Tvrzení (Markovova nerovnost). Pro kladné reálné a a nezápornou náhodnou veličinu X platí

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Tvrzení (Lovászovo lokální lemma). Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou náhodné jevy s pravděpodobností nejvýše p. Dále nechť je každý jev A_i závislý na nejvýše d jiných. Pokud $ep(d+1) \leq 1$, pak je pravděpodobnost, že nenastane žádný z jevů A_i, nenulová.

Spíš se nebude hodit, ale je to zajímavé

Tyhle věty už jsou trochu silnější, ale pro většinu olympiádních úloh nejsou potřeba nebo je jejich použití zbytečně složité.

Definice. *Rozptyl* náhodné veličiny X je

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Tvrzení. Pro nezávislé náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ platí

$$\mathrm{Var}\left(\sum X_i\right) = \sum \mathrm{Var}(X_i).$$

Tvrzení (Čebyševova nerovnost). Pro kladné reálné a a náhodnou veličinu X s konečným rozptylem platí

$$\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Tvrzení (Černoffova nerovnost). Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny nabývající pouze hodnot 0 a 1. Označme $X = \sum X_i$. Potom pro všechna nezáporná reálná a platí

$$\mathrm{P}(X \geq \mathbb{E}(X) + a) < e^{-\frac{a^2}{2(\mathrm{Var}(X) + a/3)}}.$$

Příklady

Příklad. Mějme množinu M a nějaký systém jejích k-prvkových podmnožin S. Dokaž, že pro $|S| < 2^{k-1}$ je možné M obarvit dvěma barvami tak, aby žádná podmnožina nebyla jednobarevná.

Řešení. Množinu M obarvíme náhodně (každý prvek má první barvu s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Každá podmnožina z S má pravděpodobnost 2^{1-k}, že bude jednobarevná. Pravděpodobnost, že žádná z nich není jednobarevná je podle union boundu tedy aspoň $1 - |S| \cdot 2^{1-k} > 0$.

Příklad. Dokaž, že každý graf obsahuje bipartitní podgraf s aspoň polovinou hran.

Řešení. Mějme graf $G = (V, E)$, a uvažme náhodné rozdělení vrcholů do množin V_1 a V_2. Pravděpodobnost, že hrana $e = \{u, v\}$ povede mezi množinami V_1 a V_2, je $\frac{1}{2}$. Nyní uvážíme pro každou hranu $e \in E$ indikátor I_e, jeho střední hodnota je $\frac{1}{2}$. Z linearity střední hodnoty potom platí

$$\mathbb{E}\left(\sum I_e\right) = \frac{|E|}{2}$$

a tvrzení je dokázáno.

Příklad. Mějme množinu M a nějaký systém jejích k-prvkových podmnožin S. Dokaž, že pokud se každý prvek $m \in M$ vyskytuje v nejvýše $\frac{2^{k-3}}{k}$ množinách, lze M obarvit dvěma barvami tak, aby žádná podmnožina z S nebyla jednobarevná.

Řešení. Množinu M obarvíme náhodně, nechť A_R je jev značící jednobarevnost $R \in S$. Zjevně $\mathrm{P}(A_R) \leq 2^{1-k}$, označme p, a závisí na méně než 2^{k-3}, označme d, dalších jevech. Platí $ep(d+1) = \frac{e}{4} < 1$, takže tvrzení platí z Lovászova lokálního lemmatu.

Příklad. Pro všechna přirozená m dokaž

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{2^{2m-1}}{2\sqrt{m}+1}.$$

Řešení. Označme X součet $2m$ nezávislých náhodných veličin nabývajících hodnot 0 a 1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Platí $\mathbb{E}(X) = m$ a $\mathrm{Var}(X) = \frac{m}{2}$. Podle Čebyševovy nerovnosti

$$P(|X-m| < \sqrt{m}) \geq \frac{1}{2}.$$

Dostáváme, že součet prostředních $2\lfloor\sqrt{m}\rfloor + 1$ kombinačních čísel je aspoň 2^{2m-1}, takže jsme hotovi, protože $\binom{2m}{m}$ je největší z nich.

Rozcvička

V této sekci najdeš několik jednoduchých úloh. Pokud ses už s pravděpodobností a střední hodnotou setkal(a) někdy dřív, klidně je přeskoč.

Cvičení. Máme dokonale náhodně zamíchaný balíček 52 karet a postupně otočíme 5 karet z vrchu balíčku. Jaká je pravděpodobnost, že 4. otočená karta bylo eso?

Cvičení. Hoďme n krát spravedlivou mincí, jaká je pravděpodobnost, že padne lichý počet orlů?

Cvičení. Majda hodila n krát spravedlivou mincí, Lenka $n+1$ krát. Jaká je pravděpodobnost, že Lence padl orel víckrát než Majdě?

Cvičení. Dokaž, že střední hodnota počtu pevných bodů v náhodné permutaci je 1.

Cvičení. Pomocí linearity střední hodnoty nahlédni

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = \frac{n}{2} \cdot 2^n$$

Cvičení. Dokaž, že házíme-li mincí, na které padá panna s pravděpodobností $p > 0$, než poprvé padne panna, je střední hodnota počtu hodů rovna $\frac{1}{p}$.

Úlohy

Úlohy by v jednotlivých sekcích měly být seřazeny (velmi subjektivně) podle obtížnosti.

Standardní pravděpodobnostní metoda

Úloha 1. V jazykové škole je 500 učitelů, kteří vyučují dohromady $2n$ jazyků, přičemž každý učitel ovládá alespoň n jazyků. Ukaž, že můžeme vybrat nejvýše 14 jazyků tak, aby každý učitel mluvil alespoň jedním z nich.

Úloha 2. Je dána množina M a systém jejích k-prvkových podmnožin S, kde $|S| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^k$. Dokaž, že je možné množinu M rozdělit na M_1 až M_4 tak, aby všechny podmnožiny v S měly neprázdný průnik s množinami M_1 až M_4.

Úloha 3. V matematické soutěži řešilo 200 studentů šest úloh. Víme, že každou úlohu vyřešilo alespoň 120 studentů. Dokaž, že můžeme vybrat dvojici studentů tak, aby dohromady vyřešili všechny úlohy.

Úloha 4. Na školní výlet jede 90 dětí, přičemž každé z nich má alespoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokaž, že děti můžeme rozdělit do tří 30-členných skupin tak, že každé dítě bude mít ve své skupince alespoň jednoho kamaráda.

Úloha 5. Dokaž, že v grafu na $2^{\frac{n}{2}-1}$ vrcholech nemusí existovat klika ani nezávislá množina velikosti n.

Úloha 6. Mějme množinu M. Pepa, Radek, Matěj a Lenka si každý obarvili její prvky červeně, modře a zeleně. Dokaž, že se někteří dva orgové shodli na obarvení aspoň šestiny prvků.

Úloha 7. Dokaž, že můžeme prvky množiny $\{1, \ldots, 1987\}$ obarvit čtyřmi barvami tak, aby žádná aritmetická posloupnost o 10 prvcích nebyla jednobarevná.

(Shortlist 1987)

Úloha 8. Nechť X je množina posloupností 0 a 1, kde žádná není prefixem jiné. Dokaž, že

$$\sum_{p \in X} \frac{1}{2^{|p|}} \leq 1,$$

kde $|p|$ značí délku posloupnosti p.

Úloha 9. Nechť A je množina n zbytků modulo n^2. Dokaž, že existuje n-prvková množina zbytků B taková, že

$$\left|\left\{a + b \bmod n^2 \mid a \in A, b \in B\right\}\right| \geq \frac{1}{2}n^2.$$

(Shortlist 1999 C4)

Úloha 10. Dokaž, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje neprázdná množina bodů v rovině taková, že libovolný její bod má vzdálenost 1 od právě n jiných bodů.

(IMO 1971)

Úloha 11. Dokaž, že v grafu na n vrcholech s průměrným stupněm d existuje nezávislá množina velikosti aspoň $\frac{n}{2d}$.

Úloha 12. Řekneme, že permutace množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ je *roztomilá*, pokud se některé dva po sobě jdoucí prvky liší právě o n. Ukaž, že roztomilých permutací je alespoň tolik co neroztomilých. (IMO 1989)

Úloha 13. Množinu nazveme *bezsoučtovou*, pokud v ní neleží součet žádných dvou jejích prvků. Dokaž, že pro každou množinu přirozených čísel A existuje její bezsoučtová podmnožina $B \subseteq A$ splňující $|B| > \frac{|A|}{3}$. (USA TST 2001)

Střední hodnota

Úloha 14. Dokaž, že graf na $2n$ vrcholech a m hranách obsahuje bipartitní podgraf o aspoň $m \cdot \frac{n}{2n-1}$ hranách.

Úloha 15. Nechť $p_n(k)$ značí počet permutací na n prvcích s právě k pevnými body. Dokaž, že

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

(IMO 1987)

Úloha 16. Dokaž, že umíme vrcholy grafu obarvit třemi barvami tak, aby nejvýše třetina hran vedla mezi vrcholy stejné barvy.

Úloha 17. Ukaž, že existuje obarvení úplného grafu na n vrcholech, které obsahuje nejvýše

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

jednobarevných úplných podgrafů na k vrcholech.

Úloha 18. Nechť je dán bipartitní graf, jehož obě partity mají n vrcholů, s aspoň $n^2 - n + 1$ hranami. Dokaž, že v něm existuje perfektní párování.

Úloha 19. Dokaž, že existuje orientovaný úplný graf (turnaj) na n vrcholech, kde je aspoň $\frac{n!}{2^{n-1}}$ orientovaných hamiltonovských cest.

Úloha 20. Tulák má kabát o povrchu 1 a na něm pět záplat o obsahu $\frac{1}{2}$. Ukaž, že se některé dvě záplaty musí překrývat na oblasti obsahem alespoň $\frac{1}{5}$.

Úloha 21. Mějme $n > 1$ reálných čísel, jejichž součet je nula, a zároveň je alespoň jedno z nich nenulové. Ukaž, že je můžeme označit $a_1, \ldots, a_n$ tak, aby platilo $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 < 0$. (BAMO 2004)

Úloha 22. Na Matfyzu se sešlo n informatiků a matematiků, přičemž každý matematik zná alespoň jednoho informatika. Ukaž, že můžeme vybrat takovou skupinu matfyzáků o velikosti alespoň $\frac{n}{2}$, aby uvnitř ní každý matematik znal lichý počet informatiků. (MKS 38-2s-3)

Úloha 23. Dokaž, že pro komplexní čísla $z_1, \ldots, z_n$ splňující $\sum |z_i|^2 = 1$ existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$ taková, že

$$\left|\sum \alpha_i z_i\right| \leq 1.$$

(Rumunsko 2004)

Úloha 24. Nechť jsou $v_1, \ldots, v_n$ vektory z $\mathbb{R}^n$ délky 1. Dokaž, že existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$ takové, že

$$\left|\sum \alpha_i v_i\right| \leq \sqrt{n}.$$

Nerovnosti

Úloha 25. Ve Wonkově továrně na čokoládu je na výběr ze 320 příchutí čokolády. Při procházce továrnou si každé z pěti dětí smělo ochutnat 160 příchutí. Protože bylo naspěch, každé dítě si vybralo náhodných 160 příchutí nezávisle na ostatních dětech. Dokaž, že příchutí, které si žádné dítě nevybralo, je alespoň dvacet s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

Úloha 26. Kuba se živí psaním scénářů romantických seriálů. Právě píše scénář, ve kterém je deset postav, přičemž pro každdou dvojici z nich si Kuba hodil férovou mincí, aby se rozhodnl, zda se do sebe daní dva lidé zamilují. Jeden člověk tak může být zamilován do libovolného počtu jiných lidí. Každí tři různí lidé, kteří se do sebe navzájem zamilují, tvoří milostný trojúhelník. Dokažte, že počet milostných trojúhelníků je alespoň 30 s pravděpodobností nejvýše jedna polovina.

(MKS 38-3s-2)

Úloha 27. V počátku souřadnicové soustavy je 4^n prasátek. Každé z nich udělá n kroků, v jednom kroku se prasátko pohne o 1 v jednom ze čtyř základních směrů. Každá dvě prasátka provedou jinou posloupnost kroků. Dokaž, že existuje $n \geq 1$ takové, že 99% prasátek skončí ve čtverci o straně $0.01n$ se středem v počátku.

Úloha 28. Dokaž, že pro nezápornou náhodnou veličinu X platí

$$\mathrm{P}(X = 0) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}.$$

Úloha 29. PraSestán má n^2 obyvatel a zrovna probíhají volby. Bude zvoleno nejvýše n hlavních PraSat, volby probíhají následovně. Každé PraSe napíše tajně na papír číslo od 1 do n. Zvoleni budou všichni, kdo napsali nejméně časté číslo (pokud je nejméně častých čísel více, vybere se z nich jedno náhodně). Bohužel se desetina obyvatel rozhodla, že bude podvádět, a předem se domluvila, jaké číslo kdo z nich napíše. Dokaž, že je nepravděpodobné (s rostoucím n jde pravděpodobnost do 0), že bude podvodníci budou tvořit více než pětinu hlavních PraSat.

Lovászovo lokální lemma

Úloha 30. Dokaž, že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje obarvení čísel 1 až $c \cdot \frac{2^k}{k}$ dvěma barvami neobsahující jednobarevnou aritmetickou posloupnost délky k.

Úloha 31. Na jednotkové kružnici je vybráno $11n$ různých bodů. Jsou obarveny n barvami tak, že každá barva je použita právě jedenáctkrát. Dokaž, že umíme vybrat jeden bod od každé barvy tak, aby žádné dva vybrané body nesousedily.

Úloha 32. Je dán graf, kde mají všechny vrcholy stupeň aspoň 50 a nejvýše 100. Dokaž, že tento graf lze obarvit 100 barvami tak, aby sousedé libovolného vrcholu měli aspoň 20 různých barev.

Úloha 33. Nechť je dán orientovaný graf s minimálním výstupním stupněm δ a maximálním vstupním stupněm Δ. Dokaž, že pro

$$k \leq \frac{\delta}{1 + \ln(1 + \delta\Delta)}$$

v našem grafu existuje orientovaný cyklus, jehož délka je násobkem k.

Literatura a zdroje

[1] Evan Chen; *Expected Uses of Probability*, 2014.
[2] Danil Koževnikov, Vašek Rozhoň; *Pravděpodobnost*, PraSečí seriál, 2018/2019.
[3] Noga Alon, Joel H. Spencer; *The Probabilistic Method*, 2000.
[4] Ravi Boppana; *Unexpected Uses of Probability*, 2005

Hinty

Hint 1. Vyber nezávisle 14 jazyků.
Hint 2. Uvaž náhodné rozdělení a ukaž, že je s nenulovou pravděpodobností dobré.
Hint 3. Vyber náhodnou dvojici studentů a ukaž, že s nenulovou pravděpodobností vyřešili všechny úlohy.
Hint 4. Jaká bude pravděpodobnost, že dítě nemá ve své skupince kamaráda, pokud skupinky vytvoříme náhodně?
Hint 5. Uvaž náhodný graf, potom použij triviální odhad na kombinační čísla.
Hint 6. Na barvě každého prvku se shodli aspoň 2 lidé.
Hint 7. Uvaž náhodné obarvení, jaká je pravděpodobnost, že je daná aritmetická posloupnost jednobarevná?
Hint 8. Vygeneruj náhodnou posloupnost 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že je nějaký prvek X jejím prefixem?
Hint 9. Prostě do B hladově přidávej prvky (vždycky uvaž náhodný).
Hint 10. Uvaž náhodnou množinu vektorů na jednotkové kružnici a součty podmnožin.
Hint 11. Vyber náhodně nějakou větší množinu a pak z ní něco smaž.
Hint 12. Jaká je pravděpodobnost, že se číslo na pozici i a $i+1$ liší o n? Spočítej to samé pro dvě různé pozice a použij maličkou inkluzi a exkluzi.
Hint 13. Modulo prvočíslem tvaru $3k+2$ je $\{k+1, \ldots, 2k+1\}$ bezsoučtová. Co takhle prvky A něčím vynásobit?
Hint 14. Postupuj podobně jako v ukázkové úloze, ale uvaž jiné náhodné rozdělení.
Hint 15. Použij cvičení.
Hint 16. Rozděl to náhodně a použij střední hodnotu.
Hint 17. Spočítej střední hodnotu počtu jednobarevných klik.
Hint 18. Co když vrcholy prostě popárujeme náhodně? Jaká bude střední hodnota počtu párů, mezi kterými povede hrana?
Hint 19. Uvaž náhodný turnaj a sečti indikátory přes všechny permutace.
Hint 20. Odhadni střední hodnotu veličiny „počet záplat nad dvěma“ v náhodném bodě.
Hint 21. Uvažuj náhodnou permutaci. Jaká potom bude střední hodnota a_1a_2? Výraz $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$ může být zajímavý.
Hint 22. Náhodně vyber informatiky a potom doplň matematiky.
Hint 23. Vyber α_i náhodně, uvaž čtverec levé strany a využij $|z|^2 = z\overline{z}$.
Hint 24. Může se hodit $|\sum u_i|^2 = \sum\sum u_i \cdot u_j$. Zvol α_i náhodně a spočítej střední hodnotu čtverce délky jejich součtu.
Hint 25. Markovova nerovnost, jaká je střední hodnota počtu nevybraných příchutí?
Hint 26. Markovova nerovnost, kolik je tam ve střední hodnotě trojúhelníků?
Hint 27. Použij Čebyševovu nerovnost v obou směrech.
Hint 28. Čebyševova nerovnost pro vhodnou veličinu.
Hint 29. Čebyševova nerovnost pro vhodnou veličinu.
Hint 30. Použij LLL.
Hint 31. Jako špatné jevy použij, že jsou vybrané body i a $i+1$.
Hint 32. Použij LLL a odhadni kombinační čísla.
Hint 33. Graf obarvi náhodně barvami 1 až k, co budou špatné jevy?

Kruhová inverze

Magdaléna Mišinová

Abstrakt. Příspěvek představuje kruhovou inverzi i z pohledů, které nejsou až tak tradiční.

Úmluva. Značení AB bude znamenat nejen přímku, ale i orientovanou délku úsečky.

Úmluva. Kružnici opsanou XYZ budeme značit (XYZ).

Úmluva. Všechny roviny v příspěvku budou rozšířené o bod ∞, jímž budou procházet všechny přímky roviny.

Intuice za touto úmluvou se objeví za chvíli.

Motivace mocností a Riemannova sféra

Tvrzení. Nechť A je bod v rovině a k je kružnice. Zvolíme bod $X \in k$, Y označíme druhý průsečík AX s k. Potom $AX \cdot AY$ je pro všechny volby X stejné.

Definice. *Mocnost* bodu A ke kružnici se středem S a poloměrem r je hodnota $|SA|^2 - r^2$.

Když pracujeme s mocností, obvykle fixujeme kružnici a zkoumáme mocnosti bodů. Můžeme ale i fixovat bod A a zkoumat jeho mocnost ke kružnicím. Pokud si zafixujeme ještě hodnotu mocnosti a budeme hledat kružnice, k nimž má A tuto mocnost, hledáme vlastně kružnice, které jsou pevné v určité kruhové inverzi podle A.

Definice. *Stereografická projekce* je zobrazení ze sféry na rovinu, sféru označme σ, rovinu ρ. Nechť N je bod σ nejdále od ρ. Stereografická projekce zobrazí $X \in \sigma$ na $NX \cap \rho$ pokud $X \neq N$, pokud $X = N$, zobrazí ho na ∞.

Tvrzení. Kružnice procházející bodem N z předchozího tvrzení se zobrazí na přímky, ostatní kružnice se zobrazí na kružnice.

Tvrzení. Nechť S je stereografická projekce ze sféry σ na rovinu ρ. Nechť η je rovina procházející středem σ a R je symetrie podle η. Potom $S \circ R \circ S^{-1}$ je kruhová inverze v ρ.

Pro získání intuice o kruhové inverzi si stačí uvědomit, že tvrzení platí pro $\eta \parallel \rho$, když se σ dotýká ρ. Zároveň si můžeme všimnout, že v tomto pohledu je osová symetrie speciální případ kruhové inverze.

Definice a základní vlastnosti

Definice. *Inverze* je geometrické zobrazení určené kružnicí k se středem S a poloměrem r, které bodu A přiřadí bod A' podle následujících pravidel:

(i) Když je $A = S$, potom $A' = \infty$.
(ii) Když je $A = \infty$, potom $A' = S$.
(iii) Jinak je A' bod polopřímky SA, pro který platí

$$|SA| \cdot |SA'| = r^2.$$

Tvrzení. Platí několik jednoduchých vlastností:

1) Inverze je bijekce, pokud ji navíc provedeme dvakrát podle stejné kružnice, dostaneme identitu.
2) Pevné body inverze podle kružnice k jsou přesně body této kružnice.
3) Pokud leží bod A „uvnitř“ kružnice k, leží obraz A' „vně“, a naopak.

Tvrzení (tětivové čtyřúhelníky). Je dána kružnice k se středem S a body A, B, které neleží na jedné přímce s S. Označme A', B' obrazy bodů A, B v inverzi podle k. Pak body A, B, A', B' leží na jedné kružnici.

Tvrzení (stěžejní). Uvažme inverzi určenou kružnicí k se středem S. Pak

(i) obrazem přímky procházející bodem S je ona sama,
(ii) obrazem přímky **ne**procházející bodem S je kružnice procházející bodem S,
(iii) obrazem kružnice procházející bodem S je přímka **ne**procházející bodem S,
(iv) obrazem kružnice **ne**procházející bodem S je kružnice **ne**procházející bodem S.

Tvrzení. Podle předchozího tvrzení je obrazem kružnice k se středem O nějaká kružnice k' se středem P (neprochází-li k středem inverze S). Pak bod P leží na polopřímce SO, ale není to obraz bodu O. Inverze tedy na sebe nezobrazuje středy kružnic.

Tvrzení (konstrukce obrazu). Je dána kružnice k a bod A vně této kružnice. Tečny ke kružnici k vedené bodem A se jí dotýkají v bodech T, U. Pak obraz A' bodu A v inverzi podle kružnice k je střed úsečky TU.

Úloha 1. Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu A. Body X a Y leží postupně na jeho stranách AB a AC. Dokažte, že paty kolmic z A na BC, XY, BY a CX leží na jedné kružnici.

Úloha 2. Tři kružnice se po dvou dotýkají. Zkonstruujte kružnici, která se dotýká všech tří.

Najdi střed

Úloha 3. Nechť ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 jsou kružnice takové, že ω_i a ω_{i+1} se dotýkají v A_i (kde $\omega_5 = \omega_1$). Ukažte, že $A_1A_2A_3A_4$ je tětivový čtyřúhelník.

Úloha 4. Buď $ABCD$ čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami, které se protínají v E. Ukažte, že obrazy bodu E podle stran $ABCD$ všechny leží na jedné kružnici. (USAMO 1993/2)

Úloha 5. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB postupně v bodech D, E, F. Bod X leží uvnitř trojúhelníka ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku BCX se dotýká jeho stran BC, CX, XB postupně v bodech D, Y, Z. Ukažte, že body E, F, Y, Z leží na jedné kružnici. (IMO SL 1995)

Úloha 6. Je dána půlkružnice t nad průměrem AB. Přímka p kolmá na AB protíná úsečku AB v bodě C a půlkružnici t v bodě D. Kružnice k se dotýká úsečky AC v bodě E, půlkružnice t v bodě T a navíc přímky p. Dokažte, že DE půlí úhel ADC. (Izrael 1995)

Úloha 7. Buď ABC trojúhelník takový, že K a L jsou postupně středy stran AB a AC. Nechť P je druhý průsečík kružnic (ABL) a (AKC). Buď Q druhý průsečík úsečky AP s (KAL). Dokažte, že $AQ = 2PQ$. (Baltic Way 2006)

Úloha 8. Jsou dány pevné kružnice k a l protínající se ve dvou bodech. Uvažme nějaké dvě kružnice m, n, které mají obě vnější dotyk s k, vnitřní dotyk s l a navíc se samy dotýkají v bodě X. Ukažte, že bod X leží na pevné kružnici nezávislé na volbě m a n.

Úloha 9. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a sedm kružnic $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7$, které splňují následující dvě podmínky:

1) kružnice ω_1 prochází body A_1 a A_2, kružnice ω_2 body A_2 a A_3, kružnice ω_3 body A_3 a A_1 a tak dále, až kružnice ω_7 prochází body A_1 a A_2,
2) kružnice ω_i a ω_{i+1} mají vnější dotyk pro všechna $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Dokažte, že kružnice ω_1 a ω_7 splývají. (MKS 24-2-7)

Úloha 10. Nechť KL a KN jsou tečny z bodu K ke kružnici k. Na polopřímce opačné k NK leží bod M. Buď P druhý průsečík k s (KLM). Patu kolmice z N na ML označme jako Q. Ukažte, že $\angle MPQ = 2 \cdot \angle KML$.

Určování poloměru

Přestože při invertování je obvykle důležitý pouze střed inverze, občas se hodí mít i správný poloměr.

Definice. Řekneme, že dvě kružnice ω_1 a ω_2 jsou *kolmé*, když se protínají a tečny k ω_1 a ω_2 v jejich průsečíku jsou na sebe kolmé.

Tvrzení. Uvažme inverzi určenou kružnicí k se středem I. Pak kružnice ω různá od k se v této inverzi zobrazí sama na sebe právě tehdy, když jsou ω a k kolmé.

Tvrzení. Pro kružnici k a bod T vně ní existuje inverze se středem T, v níž se k zobrazí sama na sebe.

Tvrzení. Jsou-li ω_1, ω_2, ω_3 tři kružnice ležící vně sebe, jejichž středy neleží na přímce, pak existuje inverze, která každou z nich zobrazuje na sebe samotnou.

Úloha 11. Nechť ω_1 a ω_2 jsou dvě kolmé kružnice. Označme střed ω_1 jako O. Nechť AB je průměr ω_1 takový, že B leží uvnitř ω_2. Sestrojíme dvě kružnice procházející A a O, které se dotýkají ω_2 v bodech F a G. Ukažte, že $FBGO$ je tětivový čtyřúhelník. (ELMO SL 2013)

Úloha 12. Je dán trojúhelník ABC. Označme polovinu jeho obvodu s. Na přímce BC nalezneme body X, Y tak, že $AX = s = AY$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku XAY se dotýká kružnice připsané trojúhelníku ABC vzhledem k vrcholu A.

Úloha 13. Kružnice ω_1, ω_2, ω_3 leží vně sebe. Kružnice ω se jich dotýká zvenku v bodech A_1, A_2, A_3 a kružnice Ω se jich dotýká zevnitř v bodech B_1, B_2, B_3. Ukažte, že přímky A_1B_1, A_2B_2 a A_3B_3 se protínají v jednom bodě.

Úloha 14. Budiž $ABCD$ tětivový čtyřúhelník takový, že přímky BA a CD se protínají v bodě P. Na přímce CD libovolně zvolíme body E a F. Nechť G je střed kružnice opsané $\triangle ADE$ a H je střed kružnice opsané $\triangle BCF$. Dokažte, že pokud body A, B, F, E leží na jedné kružnici, pak lze body P, G, H proložit přímku.

Úloha 15. Buď $ABCD$ dvojstředový čtyřúhelník*). Ukažte, že čtyřúhelník vytvořený z bodů dotyku kružnice vepsané má kolmé úhlopříčky.

Úloha 16. Kružnice ω_a a ω_b mají vnější dotyk v bodě T. Jejich vnější společná tečna ℓ se dotýká ω_a a ω_b v A a B. Buď ω kružnice se středem v bodě O a poloměrem r, která se dotýká ω_a i ω_b zvenku a pro kterou je ℓ tečna. Ukažte, že $OT \le 3r$.

Úloha 17 (Shoemaker's Knife). Nechť A, B, C jsou tři body ležící v tomto pořadí na přímce. Zkonstruujme půlkružnice Γ_{AC}, Γ_{AB}, ω_0 postupně nad průměry AC, AB a BC (všechny na stejné straně od AC). Pro každé přirozené k buď ω_k kružnice dotýkající se Γ_{AC}, Γ_{AB} a ω_{k-1}.

Ukažte, že pro každé n je vzdálenost středu ω_n od AC rovna n-násobku průměru ω_n.

Úloha 18 (Steinerovo porisma). Uvnitř kružnice k je dána kružnice ℓ. Předpokládejme, že existuje n-prvkový řetěz kružnic $m_1, \ldots, m_n$ takový, že každá kružnice v řetězu má vnější dotyk se svými dvěma sousedními kružnicemi a s ℓ a vnitřní dotyk s k. Potom každá kružnice mající vnější dotyk s ℓ a vnitřní dotyk s k je částí nějakého n-prvkového řetězu.

---

*) To je čtyřúhelník, který je zároveň tečnový a tětivový.

Překlápíme

Občas se hodí kromě zvolení správného poloměru navíc překlopit podle osy úhlu, protože pak obrázek zůstane skoro stejný.

Tvrzení. Nechť M a N jsou body na úsečkách AB a AC takové, že $MN \parallel BC$. Pak inverze s středem A a poloměrem $\sqrt{AB \cdot AN}$ složená s překlopením podle osy úhlu BAC zobrazuje body B, C, M a N postupně na N, M, C a B.

Důsledek ($\sqrt{bc}$-inverze). Inverze s středem v A a poloměrem $\sqrt{AB \cdot AC}$ složená s překlopením podle osy úhlu ABC prohazuje body B a C.

Tvrzení. V $\sqrt{bc}$-inverzi se na sebe zobrazují kružnice opsaná a přímka BC.

Úloha 19. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou Ω. Kružnice ω se dotýká stran AB a AC a má vnitřní dotyk s Ω v bodě P. Přímka ℓ je rovnoběžná s BC, protíná vnitřek $\triangle ABC$ a dotýká se ω v bodě Q. Ukažte, že $\angle PAB = \angle QAC$.

(EGMO 2013/5)

Úloha 20. Buď M střed strany BC v trojúhelníku ABC. Tečny ke kružnici (ABC) v B a C se protínají v T. Ukažte, že $\angle BAM = \angle CAT$.

Úloha 21. Nechť M, N jsou body na stranách AB a AC trojúhelníku ABC takové, že $MN \parallel BC$. Přímky BN a CM se protínají v bodě P. Kružnice (MPB) a (NPC) se podruhé protínají v bodě Q. Ukažte, že $\angle BAQ = \angle CAP$. (Balkán 2009)

Úloha 22. Označme O opsiště trojúhelníka ABC. Jeho Feuerbachova kružnice protíná kružnici opsanou BOC v dvou bodech K a L. Dokažte, že $\angle BAK = \angle CAL$.

(Srbsko 2015/3)

Úloha 23. Na straně BC trojúhelníku ABC leží body K a L tak, že $\angle BAK = \angle CAL < \frac{1}{2}\angle BAC$. Kružnice ω_1 se dotýká přímek AB a AL, kružnice ω_2 se dotýká přímek AC a AK. Předpokládejme, že se ω_1 a ω_2 protínají v P a Q. Dokažte, že $\angle PAC = \angle QAB$. (Kazachstán 2012)

Úloha 24 (Kosnitha theorem). Buď O opsiště $\triangle ABC$. Označíme si O_a, O_b a O_c opsiště trojúhelníků BOC, COA a AOB. Pak se přímky AO_a, BO_b a CO_c protínají v jednom bodě.

Přepočítávací lemma

Inverze není shodné ani podobné zobrazení. Přesto dokážeme vyjádřit vzdálenost obrazů dvou bodů následujícím způsobem.

Lemma (přepočítávací lemma). Je dána kružnice k se středem I a poloměrem r. Uvažujme libovolnou dvojici bodů X, Y. Označme X', Y' obrazy bodů X, Y v inverzi podle kružnice k. Pak $|X'Y'| = |XY| \cdot \frac{r^2}{|IX| \cdot |IY|}$.

Úloha 25 (Ptolemaiova nerovnost). Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Pak

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

přičemž rovnost nastává právě pro tětivové čtyřúhelníky.

Úloha 26. Bod P leží na kružnicích Γ_1, Γ_2, Γ_3 a Γ_4. Kružnice Γ_1 se zvenku dotýká Γ_3 a Γ_2 se zvenku dotýká Γ_4. Označme druhý průsečík Γ_i s Γ_{i+1} jako A_i. Ukažte, že

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_2A_3}{A_3A_4 \cdot A_4A_1} = \frac{PA_2^2}{PA_4^2}.$$

(IMO SL 2003/G4)

Úloha 27. Buď k kružnice se středem S ležící uvnitř trojúhelníka ABC. Nechť A_1 a A_2 jsou dotyky tečen z A ke k. Označme průsečík A_1A_2 s AS jako A'. Analogicky sestrojíme body B' a C'. Ukažte, že pokud

$$\frac{1}{SA} : \frac{1}{SB} : \frac{1}{SB} = BC : CA : AB,$$

pak je trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.

Úloha 28. Nechť P je bod uvnitř trojúhelníku ABC takový, že

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Nechť D a E jsou vepsiště trojúhelníků APB a APC. Ukažte, že přímky AP, BD a CE se protínají v jednom bodě. (IMO 1996/2)

Ještě další úlohy

Úloha 29. Uvažujme půlkružnici ω nad průměrem AB se středem O. Přímka ℓ protíná přímku AB v bodě M a půlkružnici ω v bodech C a D tak, že $MA > MB$ a $MD > MC$. Kružnice (AOD) a (BOC) se protínají v bodě K. Ukažte, že K leží na kružnici nad průměrem MO. (Rusko 1995, Írán 1996)

Úloha 30. Buď ℓ přímka, na které leží body A, B a C, ale ne P. Ukažte, že P leží na kružnici opsané trojúhelníku z opsišť $\triangle BPA$, $\triangle APC$ a $\triangle CPB$.

Úloha 31. Kružnice k, l se protínají v bodech A, D. Jejich společná tečna bližší bodu A se dotýká k v E a l v F. Rovnoběžka s touto tečnou procházející bodem D protne kružnice k, l podruhé v bodech C, B. Kružnice opsané trojúhelníkům CDF a BDE se podruhé protínají v bodě P. Ukažte, že body D, A a P leží v přímce.

(Brkos 2011)

Úloha 32. Buď O opsiště trojúhelníka ABC. Body E, F leží na úsečkách OB, OC tak, že platí $BE = OF$. Nechť M a N jsou středy oblouků EOA a AOF. Dokažte, že $\angle ENO + \angle OMF = 2\angle BAC$. ($i$KS 6-5)

Úloha 33. Buď $ADBE$ čtyřúhelník, ve kterém $AD \perp DB$ a $BE \perp EA$. Jeho průsečík diagonál si označme jako C a střed AB si označme jako O. Nechť γ je kružnice opsaná $\triangle BOD$ a nechť F je bod na γ takový, že OF tvoří průměr γ. Nakonec si označme druhý průsečík polopřímky FC s γ jako G. Dokažte, že A, O, G a E leží na jedné kružnici. (Čína Západ 2006/6)

Úloha 34. Buď ABC trojúhelník s vepsištěm I a kružnicí vepsanou dotýkající se stran BC, CA a AB v bodech D, E a F. Označme jako Q takový bod, že $AB \perp BQ$ a $AC \perp CQ$. Průsečík QI s EF nazvěme P. Ukažte, že $DP \perp EF$. (NIMO 2014)

Úloha 35. Nechť $A_1A_2A_3$ je různostranný trojúhelník s vepsištěm I. Buď C_i ta menší z kružnic procházejících I, které se dotýkají A_iA_{i+1} a A_iA_{i+2}. Označme jako B_i druhý průsečík C_{i+1} a C_{i+2}. Ukažte, že opsiště trojúhelníků A_1B_1I, A_2B_2I a A_3B_3I leží všechna na jedné přímce. (IMO SL 1997)

Úloha 36. Lichoběžník $ABCD$ s $AB \parallel CD$ je vepsaný v kružnici ω. Bod G leží uvnitř $\triangle BCD$. Polopřímky AG a BG podruhé protnou ω v P a Q. Rovnoběžka k AB procházející skrze G protíná BD a BC v bodech R a S. Dokažte, že $PQRS$ je tětivový právě tehdy, když G leží na ose úhlu CBD. (USAMO 2009/5)

Úloha 37. Buď ABC trojúhelník s vepsištěm I a opsištěm O. Nechť D, E a F jsou dotyky kružnice vepsané $\triangle ABC$ se stranami. Označme jako G těžiště $\triangle DEF$. Ukažte, že O, I a G leží na jedné přímce.

Úloha 38. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník ve kterém $AB > AC$. Označme jeho kružnici opsanou, jeho kolmiště, patu výšky z A a střed strany BC postupně jako Γ, H, F a M. Nechť Q a K jsou takové body na Γ, že $HQ \perp QA$ a $HK \perp KQ$. Předpokládejme, že A, B, C, K a Q jsou všechny různé body a leží na Γ v tomto pořadí. Ukažte, že (KQH) a (KFM) se dotýkají. (IMO 2015/3)

Úloha 39. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Uvnitř něj leží bod X takový, že $\angle XAB = \angle XCD$ a $\angle XBC = \angle XDA$. Dokažte, že $\angle BXA + \angle DXC = 180°$. (IMO 2018/6)

Úloha 40. Kružnice ω vepsaná ostroúhlému trojúhelníku ABC se dotýká strany BC v K. Nechť D je pata výšky z A a M je střed AD. Pokud N je druhý společný bod ω a KM, ukažte, že se ω dotýká (BNC). (IMO SL 2002 G7)

Úloha 41. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník s kružnicí opsanou ω a buď ℓ tečna k ω. Přímky ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c vzniknou z ℓ překlopením podle přímek BC, CA a AB. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c se dotýká ω. (IMO 2011/6)

Úloha 42. Buď ABC trojúhelník a P bod. Přímka procházející P protíná podruhé kružnice (APB), (BPC), (CPA) v bodech P_a, P_b, P_c. Nechť ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c jsou tečny k (APB), (BPC), (CPA) v bodech P_a, P_b, P_c. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c se dotýká (ABC).

Literatura a zdroje

Tento příspěvek téměř výhradně čerpal z příspěvku Rada Švarce na *i*KSku 2017.

Hinty

Hint 1. Zinvertujte podle B a použijte buď Thaletovky v původním obrázku, nebo prosté přehazování úhlů.

Hint 2. Invertujte podle jednoho z bodů dotyku.

Hint 3. Zinvertujte podle libovolného z A_i a dvě kružnice, které se změní na přímky, si nakreslete svisle.

Hint 4. Dokreslete si kružnice se středem ve vrcholech čtyřúhelníka, které procházejí skrz E.

Hint 5. Zinvertujte podle D. V novém obrázku použijte osy úseček.

Hint 6. Invertujte podle E a najděte rovnoramenný trojúhelník.

Hint 7. Upravte si dokazovanou rovnost do invertovatelnějšího stavu. Pak zinvertujte podle A.

Hint 8. Zinvertujte podle A a použijte symetrii.

Hint 9. Zinvertujte podle A_1 a najděte středovou souměrnost nebo doúhlete.

Hint 10. Zinvertujte podle M. Dokreslete si střed obrazu k a s pomocí stejnolehlosti doúhlete.

Hint 11. Zinvertujte podle ω_1. Dokreslete si střed EF.

Hint 12. Jak daleko jsou body dotyku kružnice připsané s AB a AC od A?

Hint 13. Zinvertujte podle kružnice, která zachovává ω_1, ω_2 i ω_3.

Hint 14. Invertujte podle P a prohoďte kružnice opsané $\triangle ADE$ a $\triangle BCF$.

Hint 15. Zinvertujte podle kružnice vepsané. Najděte tětivový rovnoběžník.

Hint 16. Zinvertujte podle kružnice, která má střed v T a zachovává ω.

Hint 17. Zinvertujte podle kružnice se středem v A, která zachovává ω_n.

Hint 18. Invertujte tak, aby se kružnice k a ℓ staly soustřednými.

Hint 19. Udělejte inverzi se středem A a poloměrem $\sqrt{AB \cdot AX}$ složenou s překlopením podle osy úhlu BAC, kde X je průsečík ℓ s AC.

Hint 20. Použijte $\sqrt{bc}$-inverzi. Využijte mocnost.

Hint 21. Uvědomte si, že Q leží na kružnicích (ANB) a (AMC). Pak udělejte vhodnou inverzi se středem v A, překlopte podle osy a rozmyslete si, že máte hotovo.

Hint 22. $\sqrt{bc}$-inverze, ale s polovičním poloměrem.

Hint 23. Inverzí a překlápěním vyměňte ω_1 a ω_2.

Hint 24. $\sqrt{bc}$-inverze, ale s polovičním poloměrem.

Hint 25. Zinvertujte podle libovolného z vrcholů. Použijte přepočítávací lemma (a trojúhelníkovou nerovnost).

Hint 26. Zinvertujte podle P a použijte přepočítávací lemma.

Hint 27. Body A', B', C' jsou obrazy A, B, C v inverzi podle k. Použijte přepočítávací lemma.

Hint 28. Použijte větu o ose úhlu. Pak zinvertujte podle P a dopočítejte.

Hint 29. Zinvertujte podle ω a najděte Feuerbachovu kružnici.

Hint 30. Zinvertujte podle P a využijte Simsonovu přímku.

Hint 31. Zinvertujte podle D. Pokud znáte Gergonnův bod, jste hotovi. Jinak použijte Cevovu větu.

Hint 32. Zbavte se B a C, zinvertujte podle O a pomocí přepočítávacího lemmatu dokažte $E'N' \parallel F'M'$.
Hint 33. Zinvertujte přes O a najděte Feuerbachovu kružnici.
Hint 34. Invertujte podle kružnice vepsané a vzpomeňte si na Feuerbachovu kružnici (správného trojúhelníku).
Hint 35. Zinvertujte podle I. Nalezněte nějaké stejnolehlé trojúhelníky a z nich odvoďte, že se nějaké tři přímky protínají v jednom bodě. Doúhlete.
Hint 36. Zinvertujte podle B. Všimněte si, že $PQRS$ je lichoběžník, tedy je tětivový právě tehdy, když je rovnoramenný.
Hint 37. Zinvertujte podle kružnice vepsané to, co se dá rozumně zinvertovat. Nesahejte na to, co se invertuje blbě. Pak najděte Eulerovu přímku.
Hint 38. Zinvertujte podle H a najděte pár obdélníků. Hodí se všimnout si, že Q, M a H leží na přímce.
Hint 39. Zinvertujte podle X. Pak se podívejte do následujícího příspěvku na tvrzení o kamarádech v čtyřúhelníku. Použijte přepočítávací lemma.
Hint 40. Vyjádřete $\tan \angle BKM$ jen pomocí úhlů v ABC. Potom si zadefinujte L jako bod na ω takový, že ω se dotýká (BLC). Abyste ukázali, že $N = L$, udělejte inverzi podle K a pak zatněte zuby a spočítejte $\tan \angle BKL$.
Hint 41.
(i) Zinvertujte podle kolmiště ABC. Fakt.
(ii) Podívejte se na následující cvičení a uvědomte si, že speciální případ, kdy P je kolmiště ABC nám dává řešení.
Hint 42.
(i) Zinvertujte podle P.
(ii) Kružnice opsané trojúhelníkům vytvořených ze tří z přímek $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ a ℓ (kde čárky značí obrazy po inverzi) se protínají v M.
(iii) Doúhlete, že M leží na spojnici opsišť vhodných trojúhelníků a tudíž je bodem dotyku kružnic opsaných jiným trojúhelníkům (těm, kterým chceme).

Geometrické (ne)úhlení

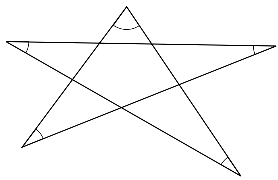
Radek Olšák

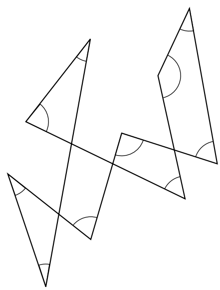
Abstrakt. Budeme se zabývat tím, jak fungují orientované úhly. Pokusíme se dívat na úlohu i poté, co ji vyřešíme. Tím do dané úlohy lépe vhlédneme a bude nám více jasné, „proč“ platí.

Poznámka. Pokud žijeme ve světě modulo n a provedeme operaci $/k$, je přirozené, aby výsledek žil ve světě modulo n/k. Analogicky pokud provedeme operaci $\cdot k$, výsledek žije ve světě modulo $n \cdot k$.

Poznámka. Občas se hodí zdůraznit v jakém světě žije daný směr přímky. Pak použijeme dolní index s modulem, například AB_{180° nebo p_{360°. Obdobně i s úhly.

Úloha 1 (nábojová). Urči součty úhlů v následujících obrázcích:





Směry modulo 180°

U přímek většinou nechceme, aby měly orientaci, proto jejich směr budeme vnímat modulo 180°.

Definice. *Orientovaným úhlem* dvou (neorientovaných) přímek p, q (na pořadí záleží) rozumíme úhel, o který je třeba otočit přímku p proti směru hodinových ručiček, aby byla rovnoběžná s přímkou q. Tento úhel je dán jednoznačně až na násobek 180° a značíme jej $\sphericalangle(p, q)$. Je-li přímka p, resp. q určena body A, B, resp. C, D, pak úhel značíme $\sphericalangle(AB, CD)$.

Tvrzení.

- $\sphericalangle(p, p) = 0$,
- $\sphericalangle(p, q) = -\sphericalangle(q, p)$,
- $\sphericalangle(AB, p) = \sphericalangle(BA, p)$,
- $\sphericalangle(p, q) + \sphericalangle(q, r) = \sphericalangle(p, r)$.

Co kružnice?

V této sekci mějme kružnici ω se středem S. Pak body X na ω žijí přirozeně ve světě modulo 360°. Vezmeme libovolný bod jako bod 0 a kladný směr budeme brát proti směru hodinových ručiček. Tedy body na kružnici můžeme brát jako směry modulo 360° a sčítat je a odečítat je.

Oblouk AB na ω pak můžeme brát jako $B - A$ a přirozeně žije stále ve světě modulo 360°.

Definice. Pro pohodlnost budeme polovinu oblouku AB, tedy $\frac{B-A}{2}$, značit jako $\widehat{AB}$. Tento půloblouk orientovaný a žije ve světě modulo 180°.

Tvrzení (základní kámen úhlící geometrie*)). Mějme přímku p protínající ω v bodech A a B. Pak směr p je

$$p_{180^\circ} = \frac{(A+B)}{2} + 90^\circ.$$

Důkaz. Cvičení na pochopení definic. :-) ∎

Poznámka. Toto tvrzení platí, i když p je tečna, pak $A = B$ a dostáváme $p_{180^\circ} = A + 90^\circ$. To platí, protože tečna je kolmá na poloměr.

Poznámka. Dokud nebudeme míchat směry bodů na ω se směry přímek, tak si můžeme dovolit ignorovat těch $+90^\circ$ tím, že všechny směry otočíme o 90°.

Důsledek (obvodový a středový úhel). Mějme body A, B na ω. Pak C leží na ω, právě když

$$2 \cdot \sphericalangle(CA, CB)_{180^\circ} = \sphericalangle(SA, SB)_{360^\circ}.$$

Důsledek (obloučkové lemma). Mějme přímky p, resp. q protínající ω postupně v bodech A, B, resp. C, D. Pak

$$\sphericalangle(p, q)_{180^\circ} = \widehat{AC} + \widehat{BD}.$$

Antirovnoběžky a isogonály

Pozorování. Mějme přímky p, q a jejich obrazy p', q' v nějaké osové souměrnosti. Pak $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(q', p')$.

Definice. Mějme fixní úhel p, q†). Pak řekneme, že přímky a, b jsou *antirovnoběžné* vzhledem k p, q, pokud směr a je překlopený směr b podle osy $\sphericalangle pq$. Pokud navíc p, q, a, b prochází jedním bodem, pak říkáme, že a, b jsou *isogonální* vzhledem k úhlu p, q.

*) Ano, není to obvodový úhel. :-)

†) Jako dvě přímky, ne jen velikost úhlu mezi nimi.

Pozorování. Mějme přímky p, q a body $A, B \in p$ a $C, D \in q$. Pak $ABCD$ leží na jedné kružnici, právě když AC a DB jsou antirovnoběžné v úhlu $\sphericalangle pq$, protože $\sphericalangle(AC, AB = p) = \sphericalangle(DC = q, DB)$.

Pozorování. Pokud je dvojice a, b antirovnoběžná v $\sphericalangle pq$, pak je i p, q antirovnoběžné v $\sphericalangle ab$.

Pozorování. Pokud máme body A, B, C, D ležící na jedné kružnici, pak určují tři dvojice přímek. Každá taková dvojice je antirovnoběžná v úhlu určeném každou jinou dvojicí .

Měl(a) bys znát všechny

Příklad 2. Ať $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Buď $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukaž, že osy úhlů $\angle AQB$ a $\angle BPC$ jsou na sebe kolmé.

Příklad 3 (překlopené ortocentrum). Mějme trojúhelník ABC s ortocentrem H. Pak překlopení H podle středu BC padne na kružnici opsanou jako bod naproti A.

Příklad 4. Ortocentrum je vepsiště patového trojúhelníka.

Příklad 5. Vepsiště je ortocentrum trojúhelníka z připsišť.

Příklad 6 (Miquel). Mějme trojúhelník ABC a na přímkách AB, BC, CA zvolme body P, Q, R. Pak kružnice opsané (PQB), (QRC) a (RPA) prochází jedním bodem.

Příklad 7 (Miquel). Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Označme $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Dokaž, že kružnice opsané (PAD), (PBC), (QAB) a (QCD) prochází jedním bodem M. A bod M leží na PQ, právě když je $ABCD$ tětivový.

Poznámka. Rozmysli si, jak spolu Miquel a Miquel souvisí.

Příklad 8 (Brocard). Je dán trojúhelník ABC. Sestrojme kružnici, která se dotýká strany AB v bodě A a prochází bodem C. Analogicky (cyklickou záměnou) sestrojme další dvě kružnice. Ukaž, že tyto kružnice se protínají v jednom bodě.

Příklad 9 (existence kamaráda). Mějme trojúhelník ABC a bod P. Pak isogonály k AP, BP, CP vzhledem k úhlům $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ prochází jedním bodem nebo jsou rovnoběžné.

Příklad 10 (kamarádi v čtyřúhelníku). V čtyřúhelníku $ABCD$ má bod X kamaráda, právě tehdy když $\sphericalangle(XA, XB) = \sphericalangle(XD, XC)$

Příklad 11 (Simson). Mějme trojúhelník ABC a bod P na jeho kružnici opsané. Pak paty z P na AB, BC, CA leží na jedné přímce.

Příklad 12 (Švrčkův bod). Mějme trojúhelník ABC. Označme $\check{S}_A$ střed oblouku BC kružnice jemu opsané. Dále označme I střed kružnice vepsané a I_A střed kružnice A-připsané. Pak body B, I, C, I_A leží na kružnici se středem $\check{S}_A$

Příklad 13. Předchozí příklad má analogii s antišvrkem. Dokážeš je dokázat všechny zároveň? :-)

Příklad 14 (unlikely concurrence*)). V trojúhelníku ABC se A-střední-příčka, B-osa-úhlu a C-spojnice-bodů-dotyku-vepsané protínají v jednom bodě K. Zároveň je K pata z A na B-osu-úhlu.

Poznámka. Dobře si rozmysli, jak vhodně definovat bod K, aby byl důkaz co nejčistší. Zvládneš si „ušetřit práci" Simsonem?

Náhodné lehké

Příklad 15. Na kružnici k je dána tětiva AB. Označme S střed kratšího oblouku určeného body A a B. Bodem S vedeme dvě různé přímky, které protnou AB a k ve čtyřech dalších bodech. Ukaž, že tyto čtyři body leží na kružnici.

Příklad 16. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť A_1 je takový bod, že platí $A_1 \in BC$ a AA_1 je výška $\triangle ABC$. Obdobně zvolíme bod $B_1 \in AC$ tak, aby BB_1 byla výškou $\triangle ABC$. Ortocentrum $\triangle ABC$ označme H. Zvolme body A_2, B_2 takové, že $A_2 \in HB$, $B_2 \in HA$, úsečka A_1A_2 je výškou trojúhelníku HBA_1 a úsečka B_1B_2 je výškou trojúhelníku HB_1A. Dokaž, že jsou A_2B_2 a AB rovnoběžné.

Příklad 17. Máme dány dvě kružnice k a l, jež se protínají v bodech P, Q. Libovolně zvolíme bod A na kružnici k. Potom přímky AP a AQ protínají kružnici l v bodech B a C. Dokaž, že tečna ke kružnici k v bodě A je rovnoběžná s přímkou BC.

Příklad 18. Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě body dotyku jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokaž, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané $\triangle AKL$.

(Domácí kolo MO 2010)

Příklad 19. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a kružnici ω jemu opsanou. Bodem D vedeme kolmici na přímku AC. Bod, ve kterém se kolmice protne s AC, označíme E a bod, ve kterém se kolmice protne s ω, označíme F. Nechť l je kolmice na přímku BC, která prochází bodem F. Kolmice na přímku l procházející bodem A protíná přímku l v bodě G a kružnici ω v bodě H. Průsečík přímek GE a FH označíme I a průsečík přímek GE a CD označíme J. Dokaž, že body C, F, I a J leží na jedné kružnici.

Příklad 20. Budiž $ABCD$ lichoběžník se základnami AD a BC. Označme O průsečík jeho úhlopříček a o osu $\angle BOC$. Dále označme obrazy bodů B, C v osové souměrnosti podle o jako body B_1, C_1. Dokaž, že úhly $\angle BDB_1$ a $\angle CAC_1$ jsou stejně velké.

---

*) Také známé pod názvem *Iran lemma.*

Příklad 21. Budiž $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Body P, Q jsou po řadě paty kolmic z vrcholu A na přímky BC a CD. Body R a T jsou po řadě paty kolmic z vrcholu D na přímky AB a BC. Dokaž, že bodům P, Q, R, T lze opsat kružnice.

Příklad 22. Dvě zrcadla p, q tvoří úhel s vrcholem V. Z bodu A uvnitř tohoto úhlu vyšleme paprsek světla, který se odrazí v bodech B, C ležících postupně na přímkách p a q a pak se vrátí opět do A. Ukaž, že střed kružnice opsané VBC leží na přímce VA.

Těžší

Příklad 23. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ existuje na úhlopříčce AC takový bod E, že platí $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Dále buď M střed kružnice k opsané trojúhelníku BDE. Kružnice k protne AC podruhé v bodě F. Ukaž, že přímky FM, AD, BC procházejí jedním bodem. (MEMO 2010)

Příklad 24. Úhlopříčky lichoběžníka $ABCD$ se protínají v bodě P. Bod Q leží mezi rovnoběžkami BC a AD tak, že $|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle CQB|$ a přímka CD odděluje body P a Q. Dokaž, že $|\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle DAQ|$. (IMO shortlist 2007)

Příklad 25. Označme D střed strany BC rovnoramenného trojúhelníka ABC ($|AB| = |AC|$). Bod E leží vně trojúhelníka ABC tak, aby $CE \perp AB$ a $|BE| = |BD|$. Buď M střed úsečky BE a bod F nalezněme na kratším oblouku AD kružnice opsané trojúhelníku ABD tak, aby $MF \perp BE$. Dokaž, že $ED \perp FD$.

(China girls MO 2010)

Příklad 26. Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsaný do půlkružnice s průměrem AB. Označme P, Q, R, S paty kolmic z bodu Y postupně na přímky AX, BX, AZ, BZ. Dokaž, že ostrý úhel mezi přímkami PQ a RS má poloviční velikost oproti $\sphericalangle XOZ$, kde O je střed úsečky AB. (USAMO 2010)

Příklad 27. Kružnice k_1 a k_2 se středy O_1, O_2 se protínají v bodech A, B. Přímka vedená bodem A protne podruhé kružnice k_1, k_2 po řadě v bodech Y, Z. Nechť se tečny vedené body Y a Z postupně ke kružnicím k_1, k_2 protnou v bodě X a $P = YO_1 \cap ZO_2$. Označme ještě O střed kružnice opsané k trojúhelníku O_1O_2B a Q její druhý průsečík s přímkou XB. Dokaž, že PQ je průměr kružnice k.

(China 1991)

Příklad 28. Je dán rovnoběžník $ABCD$ a bod E takový, že čtyřúhelník $BCED$ je tětivový. Bodem A veďme přímku ℓ a její průsečíky s úsečkami DC a BC označme postupně F a G. Předpokládejme, že platí $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokaž, že ℓ je osa úhlu $\sphericalangle DAB$. (IMO 2007)

Příklad 29. Nechť ABC je trojúhelník, v němž průsečíky strany BC s osou úhlu $\sphericalangle BAC$ a těžnicí z vrcholu A označíme postupně N a M. Dále buďte P a Q body, v nichž kolmice k AN vedená bodem N protne postupně MA a BA. Konečně O je průsečík kolmice k AB vedené bodem P a přímky AN. Dokaž, že $OQ \perp BC$.

(APMO 2000)

Příklad 30 (Pascal theorem). Body A, B, C, D, E, F leží na jedné kružnici. Ukaž, že body $P = AE \cap BF$, $Q = BD \cap CE$, $R = AD \cap CF$ leží na přímce.

Příklad 31. Označme O střed kružnice opsané $\triangle ABC$. Přímka vedená bodem O protne AB, AC postupně v bodech M a N. Označme R a S středy CM a BN. Ukaž, že $|\sphericalangle ROS| = |\sphericalangle BAC|$. (KMS 09/10-$\gamma$)

Příklad 32. Na kratším oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC zvolme bod K. Kružnice k, ℓ mají obě vnitřní dotyk s kružnicí opsanou v bodě K. První z nich se dotýká strany AB v bodě M a druhá se dotýká AC v bodě N. Dokaž, že střed kružnice vepsané ABC leží na MN.

Příklad 33. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, jehož strany jsou všechny různě dlouhé. Označme M, N a P postupně středy stran BC, CA a AB. Osy stran AB a BC protínají přímku AM postupně v bodech D a E. Konečně buď $F = BD \cap CE$ bod uvnitř ABC. Dokaž, že body A, N, F, P leží na jedné kružnici.

(USAMO 2008)

Literatura a zdroje

[1] Mirek Olšák; *Orientované úhlení*, `prase.cz/library/OrientovaneUhleniMO/OrientovaneUhleniMO.pdf`

[2] Michal „Kenny“ Rolínek; *Angle chasing*, `prase.cz/library/AngleChasingMR/AngleChasingMR.pdf`

[3] Michal „Kenny“ Rolínek *Antirovnoběžnost* `prase.cz/library/AntirovnobeznostMR/AntirovnobeznostMR.pdf`

Funkcionální rovnice

Martin Raška

Abstrakt. Příspěvek představuje typické metody řešení funkcionálních rovnic (typicky nad reálnými čísly) a obsahuje množství příkladů na jejich procvičení.

Metody řešení

Nejzákladnější a nejobecnější metodou je **dosazování**. Dobré rady, jak a co dosazovat:

- Dosazujeme pěkné konstanty, jako 0, 1, -1, podle situace i jiné. Snažíme se v nich spočítat funkční hodnoty.
- Snažíme se vynulovat nebo zkonstantnit některé výrazy v argumentech funkcí (například když máme $f(x+y)$, tak můžeme zkusit $y := -x$).
- Snažíme se eliminovat výrazy na opačných stranách rovnice (například když máme na jedné straně $f(x+2f(x))$ a na druhé $f(y+f(x))$, tak volbou $y := x+f(x)$ tyto výrazy eliminujeme).

Na dosazování existují i sofistikovanější techniky, které vyžadují vhled do situace:

- Vyjadřování výrazů dvěma způsoby. Když například máme vztah $f(x+y) = V(x,y)$, tak $f(4x) = V(3x,x)$, ale rovněž $f(4x) = V(2x,2x)$, tedy $V(3x,x) = V(2x,2x)$. Tato metoda umí být nesmírně účinná na velké spektrum úloh.
- Symetrie v proměnných. Když například máme $xyf(f(x)f(y)) = f(x) + y$, tak záměnou x, y se levá strana nezmění a porovnáním dostaneme $f(x) + y = f(y) + x$, z čehož už je řešení nasnadě.
- Průběžné úpravy rovnice. Vyplatí se upravit rovnici tak, abychom mohli aplikovat nějaký objevený jednoduchý vztah. Například když víme $f(x^2) = xf(x)$ a v původní rovnici se nám objevuje $f(f(x)^2)$, tak tento výraz umíme nahradit $f(x)f(f(x))$, což může pomoct k získání nového pohledu na rovnici.

Často je velmi užitečné dělat úvahy o vlastnostech hledané funkce. Nejčastější a nejpoužívanější jsou:

- Sudost a lichost. Jdou dokazovat například z rovnic $f(x^2) = xf(x)$, resp. $f(x^2) = x^2f(x)$.
- Prostost (injekce). Tato jednoduchá vlastnost se vyskytuje velmi často i v těch nejtěžších úlohách. Dokázat se dá například ze vztahu $f(f(x)) = x$. Hlavní výhoda je, že nám ve výrazech eliminuje f-ka. Například z $f(f(x)) = f(x)$ dostaneme $f(x) = x$.
- Na (surjekce), resp. uvažování oboru hodnot. Tato vlastnost jde opět vidět např. z rovnice $f(f(x)) = x$. Často neumíme dokázat surjektivitu funkce na celý obor. Někdy ale stačí poznat jenom část oboru hodnot. Typickým příkladem je

ukázat, že funkce má nulový bod, ten si nějak označit a pak ho dosazovat. Nebo pokud víme, že obor hodnot funkce je shodný s jejím definičním oborem, tak můžeme nahradit výraz $f(x)$ novou proměnnou z (což vede například k rychlému vyřešení rovnice $f(f(x)) = f(x)^2 + 7$).

Existuje množství dalších triků a fíglů, kreativitě se meze nekladou. Čas od času, zejména v těžších úlohách, se dají uplatnit i následující metody:

- Vyřešit rovnici v menším oboru (například v $\mathbb{Q}$) a rozšířit řešení na větší obor (například $\mathbb{R}$).
- Nejen s předchozím bodem je spojená i matematická indukce. Například z rovnice $f(x+1) = f(x) + 1$ získáme $f(x+n) = f(x)+n$. I takováto malá zobecnění se můžou hodit.
- Použití monotonie, či jiných nerovností týkajících se funkčních hodnot. Někdy se dají rovnosti typu $f(x) = x$ dokázat sporem s rozlišením případů $f(x) < x$ nebo $f(x) > x$.
- Použití periodicity funkce. Platí, že pokud má funkce každou možnou reálnou periodu, tak už je konstantní. I toto umí být překvapivě užitečné tvrzení.
- Použití fixních bodů (bodů, kde $f(x) = x$). Tato metoda není až tak ojedinělá a vyskytuje se typicky v těžších úlohách.
- Různé funkcionální substituce – například když tušíme, že $f(x) = x^2$ je jediné řešení, tak není na škodu označit $g(x) = f(x) - x^2$ a přepsat původní rovnici v g, o které chceme dokázat, že je nulová. Často to nemusí přinést nic zásadně nového, ale může to situaci výrazně zpřehlednit.

Na závěr existuje pár věcí, na které se vyplatí myslet **vždy**:

- Pokud $f(x)^2 = x^2$, tak z toho neplyne, že $f(x) \equiv x$ nebo $f(x) \equiv -x$. Část definičního oboru může nabývat x, část $-x$ a situaci je třeba rozdiskutovat do konce.
- Vždy se hodí systematicky odhadnout řešení rovnice. Udělat si představu o konstantních, lineárních, případně kvadratických řešeních. Není radno se ukolébat nalezením jednoho řešení – stává se, že když je f řešením, tak je řešením i $-f$, apod.
- Prakticky vždy je třeba udělat zkouška. Je velká škoda ztratit bod kvůli tomu, že to tam chybí.

Ukázkové úlohy

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y vyhovují rovnici
$$f(x - y^2) = f(x) - y^2.$$

Úloha 2. Najděte všechny bijekce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují
$$f(f(x) + f(f(y))) = f(f(f(x)) + f(y)).$$

Úloha 3. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x).$$

Úloha 4. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(x + f(y)) = f(x) + f^2(y) + 2xf(y).$$

Úloha 5. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

Cauchyho rovnice

Jednou z velmi známých funkcionálních rovnic je následující úloha.

Úloha 6 (Cauchyho rovnice). Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Indukcí se dá ukázat, že na racionálních číslech musí platit $f(x) = f(1)x$. Očividně tato řešení fungují, i když je rozšíříme na celou reálnou osu. Obecně bohužel existují i jiná řešení této rovnice, která jsou více patologická a hůře se popisují.

Nicméně ve chvíli, kdy přidáme alespoň jednu z následujících podmínek, tak už platí, že výše zmíněná řešení $f(x) = f(1)x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ jsou skutečně jediná:

- f je monotónní na nějakém intervalu,
- f je omezená na nějakém intervalu,
- f je kladná pro $x \geq 0$,
- f je v nějakém bodě spojitá.

Úloha 7. Najděte všechny rostoucí funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, které pro všechna kladná reálná x, y splňují

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Lehčí úlohy na rozcvičení

Úloha 8. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(xy + 1) + f(x + y) = (f(x) + 1)(y + 1).$$

Úloha 9. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje rovnici $f(f(x)) = x + f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Najděte všechna řešení rovnice $f(f(x)) = 0$.

Úloha 10. Najděte všechny neklesající funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x splňují
$$f(f(x)) = x.$$

Úloha 11. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, které pro každé přípustné x splňují
$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x) \cdot (1 + xf(x)).$$

Úloha 12. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ splňující pro x různá od 0 a 1 rovnici
$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Úlohy z celostátka

Úloha 13. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují
$$f(y - xy) = f(x)y + (x-1)^2 f(y).$$

(66-A-III-3)

Úloha 14. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro všechna kladná reálná x, y splňují
$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}.$$

(60-A-III-6)

Úloha 15. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro všechna kladná reálná x, y splňují
$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y).$$

(53-A-III-6)

Úloha 16. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro všechna kladná reálná x, y splňují
$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

(51-A-III-6)

Úlohy z MEMO

Úloha 17. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují
$$f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y)).$$

(MEMO 2021, T1)

Úloha 18. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(xf(y) + 2y) = f(xy) + xf(y) + f(f(y)).$$

(MEMO 2019, I1)

Úloha 19. Mějme $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ splňují

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{\alpha}.$$

(MEMO 2018, I1)

Úloha 20. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y).$$

(MEMO 2017, I1)

Úloha 21. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(x)f(y) = xf(f(y - x)) + xf(2x) + f(x^2).$$

(MEMO 2016, T2)

Úloha 22. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, které pro všechna reálná nenulová x, y splňují

$$f(x^2 yf(x)) + f(1) = x^2 f(x) + f(y).$$

(MEMO 2015, T2)

Úloha 23. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$xf(y) + f(xf(y)) - xf(f(y)) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x + y).$$

(MEMO 2014, I1)

Úloha 24. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

(MEMO 2013, T1)

Úloha 25. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro všechna kladná reálná x, y splňují

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$

(MEMO 2012, I1)

Úlohy z IMO shortlistů

Úloha 26. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro všechna kladná reálná x, y splňují

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1.$$

(ISL 2020, A8)

Úloha 27. Nalezněte všechny funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, které pro všechna kladná reálná x, y splňují

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

(ISL 2018, A5)

Úloha 28. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy).$$

(ISL 2017, A6)

Úloha 29. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro všechna kladná reálná x, y splňují

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

(ISL 2016, A4)

Úloha 30. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x).$$

(ISL 2015, A4)

Pár dalších úloh

Úloha 31. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(f(x)) = x^2 - 2$ pro všechna reálná x.

Úloha 32. Pro kladné reálné konstanty a, b nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že

$$f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x.$$

(ISL 1992)

Úloha 33. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná x, y splňují

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos(y).$$

Literatura a zdroje

Velká část příspěvku je převzatá z níže zmíněného příspěvku od Patrika Baka, kterému bych tímto chtěl poděkovat.

[1] Patrik Bak; *Funkcionálne rovnice*, Prípravné sústredenie 2018,

[2] Vít Musil; *Funkcionální rovnice*
`https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/musil.pdf`

[3] Marko Radovanovic; *Functional Equations*

Hinty

Hint 1. Proveď dosazení $y = \sqrt{x}$. Pozor, že to platí jenom pro kladná x. Co pro záporná?
Hint 2. Opakovaně použij, že f je bijekce.
Hint 3. Zafixováním x ukaž, že je f bijekce a následně ukaž $f(0) = 0$. Použij získaný vztah k dokončení.
Hint 4. Po všimnutí si řešení 0 a $x^2 + c$ se nabízí substituce $g(x) = f(x) - x^2$. Jak ukázat, že g je konstantní? Ukaž pomocí vhodné substituce, že má všechny reálné periody.
Hint 5. Proveď vhodné dosazení a vyjde $f^2(x) = x^4$. Pozor na dokončení.
Hint 7. Která známá funkce splňuje zadanou vlastnost? (Substituce $g(x) = f(a^x)$ pro $a > 1$ udělá zázraky.)
Hint 8. Udělej vhodná dosazení malých hodnot.
Hint 9. Ukaž, že f je prostá.
Hint 10. Pro spor uvažuj, že existuje x pro které $f(x) > x$, nebo $f(x) < x$.
Hint 11. Všimni si, že rovnice je polynom v proměnné $xf(x)$. Pozor na dokončení.
Hint 12. Sérií vhodných substitucí jde dostat soustava rovnic (začni např. dosazením $\frac{1}{1-x}$ za x).
Hint 13. Konkrétními dosazeními dostaneme $f(1-x) = f(x)$. Co dosadit, abychom tohoto vztahu využili?
Hint 14. Osamostatníme $f(xf(y))$. Dosazujme 1 a zkoumejme $f(1)$, $f(f(1))$. Hodí se symetrie.
Hint 15. Ukaž, že $f(1) = 1$.
Hint 16. Zkus zesymetričtit levou stranu. Nejde potom výraz ještě nějak upravit?
Hint 17. Dosazeními ukaž $f(x^2) = xf(x)$. Z toho odvoď, že je f lichá. Co se stane, když prohodíme proměnné x a y?
Hint 18. Vyšetři nulové body. Ve zbylém případě ukaž prostotu (nejde např. levá strana zesymetričtit vhodným dosazením za x?).
Hint 19. Uvážením oboru hodnot dojdeme k případu $\alpha = 2$. Co dává dosazení $x = a + b$, $y = a - b$?
Hint 20. Ukaž, že f je nulová všude nebo pouze v 0. Následně ukaž $f(x)^2 = x^2$. Pozor na závěrečnou diskusi.
Hint 21. Po počátečním rozboru označ $C = f(1)$ a vyjádři $f(2), f(4)$ za pomocí C. Vhodnými dosazeními následně ukaž $C \in \{0, 3\}$ a $f(x+1) - f(x) = C$.
Hint 22. Všimni si, že $f(x^2 f(x)) = x^2 f(x)$. To naznačuje, že se vyplatí zkoumat pevné body (a taky zjistit hodnotu $f(1)$).
Hint 23. Dosazení jedniček určí f jednoznačně až na případ $f(1) = 0$. Všimni si, že umíme vypočítat hodnoty v celých číslech. Zkus nějaké z nich dosadit do původní rovnice.
Hint 24. Jednoduše získáme $f(2z) = f(z) + z$. Neumíme dále dosadit něco za y, aby se člen na levé straně s něčím vyrušil? Poté zkuste dvakrát různě vyjádřit $f(4z^2)$.
Hint 25. Uvažování rovnosti $x + f(y) = xy + 1$ nám něco řekne o znaménkách $f(y) - 1$ a $y - 1$. Pro $y > 1$ dále najdeme x, že $xy + 1 = y$ a použitím zmíněného pozorování ukažte $f(y) = \frac{1}{y}$ pro $y > 1$. Zbytek už jde dokončit.
Hint 26. Ukaž, že je funkce prostá a ostře rostoucí. Pro pevné y zvaž limitu zprava v 0 z výrazu zadání.

Hint 27. Sérií vhodných dosazení vytvoř soustavu rovnic, ze které půjde vše potřebné vyjádřit (je třeba trochu zatnout zuby). (Mohou se hodit dosazení $y := x$; $x := \frac{x}{c}$, $y := c \cdot x$; a další, pro vhodnou konstantu c.)

Hint 28. Na začátku lze dělat mnoho jednodušších krokům, jako třeba vyšetření nulových bodů. Jedna z možnost vede na případ, kdy $f(a) = 0 \iff a = 1$ a platí $f(x+n) = f(x)+n$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Pomocí tohoto přepišme zadaný vztah na $f(f(x)f(y) + 1) + f(x + y + n) = f(xy + n + 1)$. Pokud najdeme x, y, že $f(x + y + n) = f(xy + n + 1)$, tak nám to něco řekne o jejich hodnotě. Toho jde využít k důkazu prostosti f a pak už se úloha standardně dokončí.

Hint 29. Standardními metodami jako symetrie a dosazování jednotek jde získat spousta vztahů. Nakonec je třeba dokázat prostost.

Hint 30. Po dosazení $y = 1$ jde vidět, že se vyplatí dívat na pevné body. Těžší případ je $f(0) = 0$. Spolu s tímto cílem se rovněž vyplatí spočítat f v nějakých pěkných konstantách.

Hint 31. Označme $g(x) = x^2 - 2$. Diskutuj pevné body g, $g \circ g$ a f.

Hint 32. Pokud si označíme posloupnost $x_n = f(x_{n-1})$, tak se na zadanou rovnici dá dívat jako na rekurentní vztah. Ten vyřeš standardními metodami a uvaž $x_n > 0$.

Hint 33. Vyplatí se napsat si f jako součet sudé a liché funkce. Pak už stačí pouze chytré dosazení.

Lineárna algebra v kombinatorike

Michal Staník

Abstrakt. V prvej časti príspevok zavádza niektoré základné pojmy lineárnej algebry a vyslovuje o nich fundamentálne tvrdenia. Ukazuje sa totiž, že je možné ich s prekvapivým úspechom aplikovať na riešenia rôznych úloh stredoškolskej matematiky, najmä kombinatoriky. Druhá časť príspevku obsahuje úlohy vhodné k aplikácii týchto techník.

Začneme definíciami pojmov *teleso* a *vektorový priestor*.

Definícia. Množinu T spolu s binárnymi operáciami „+" a „·" a „význačnými prvkami" 0 a 1 nazveme *(komutatívnym) telesom*, ak pre všetky $x, y, z \in T$ platia nasledujúce vzťahy:

(1) $x + y = y + x \in T$,
(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
(3) $x + 0 = x$,
(4) $x \cdot y = y \cdot x \in T$,
(5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
(6) $x \cdot 1 = x$,
(7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
(8) existuje prvok $-x \in T$ taký, že $x + (-x) = 0$,
(9) ak $x \neq 0$, tak existuje prvok $x^{-1} \in T$ taký, že $x \cdot x^{-1} = 1$.

Niekedy sa ešte pridáva „axióma netriviality": $0 \neq 1$.

Bežnými telesami, s ktorými sa budeme stretávať, sú napríklad reálne, racionálne či komplexné čísla (so štandardnými operáciami sčítania a násobenia), ale taktiež aj $\mathbb{Z}_p$ pre prvočíslo p, kde sa sčíta a násobí modulo p.

Cvičenie. Rozmyslite si, že $\mathbb{Z}_n$ s modulárnymi operáciami je teleso práve vtedy, keď n je prvočíslo.

Definícia. Nech T je teleso, V množina, $\mathbf{o}$ jej prvok, „+": $V \times V \to V$ a „·": $T \times V \to V$ binárne operácie také, že pre všetky $a, b \in T$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí:

(1) $\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}$,
(2) existuje $-\mathbf{v} \in V$ taký, že $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{o}$,
(3) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,
(4) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$,
(5) $a \cdot (b \cdot \mathbf{u}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{u}$,
(6) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$,
(7) $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$,
(8) $(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$.

Potom štvoricu $(V, +, \cdot, \mathbf{o})$ nazveme *vektorovým priestorom nad* T. Prvky V sa nazývajú *vektory*, prvky T sa nazývajú *skaláry.*

Ak si vezmeme usporiadané n-tice prvkov z telesa T a ako operácie použijeme tie z T vykonávané po zložkách, dostaneme tzv. *aritmetický vektorový priestor.* Napríklad z reálnych čísel tak dostaneme známe euklidovské priestory $\mathbb{R}^n$. Inými príkladmi sú napríklad priestor všetkých postupností prvkov T alebo všeobecnejší priestor všetkých funkcií z nejakej množiny M do T.

Cvičenie. Overte, že polynómy stupňa najviac $n \in \mathbb{N}$ tvoria vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

V nasledujúcom bude vždy $\mathbf{V} = (V, +, \cdot, \mathbf{o})$ vektorový priestor nad telesom T.

Definícia. Ak je $\mathbf{V}$ vektorový priestor, $W \subseteq V$ a pre ľubovoľné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ a $a, b \in T$ platí $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in W$, hovoríme, že $\mathbf{W}$ (W s operáciami z $\mathbf{V}$) je *podpriestorom* $\mathbf{V}$.

Napríklad roviny či priamky v 3D sú podpriestormi $\mathbb{R}^3$.

Dostávame sa k pre nás kľúčovým pojmom *lineárna (ne)závislosť* a *generovanie*:

Definícia. Nech $X \subseteq V$. Množinu

$$\langle X \rangle = \{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \mid a_i \in T, \mathbf{v}_i \in X\}$$

nazývame *lineárnym obalom* X. Ak platí $\langle X \rangle = V$, hovoríme, že X *generuje* $\mathbf{V}$.

Lineárny obal X je množina všetkých *lineárnych kombinácií* vektorov z X. Ľahko sa nahliadne, že je to najmenšie podpriestor $\mathbf{V}$, ktorý obsahuje X.

Definícia. Nech $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}\}$ je konečná. Ak platí, že kedykoľvek $a_1, a_2, \cdots, a_k \in T$ spĺňajú $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$, tak už $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$, hovoríme, že M je *lineárne nezávislá.* V opačnom prípade je *lineárne závislá.*

Cvičenie. Máme skupinu aritmetických vektorov so zložkami 0 a 1. Dokážte, že ak je táto skupina lineárne nezávislá nad $\mathbb{Z}_p$, je lineárne nezávislá nad $\mathbb{Q}$.

Cvičenie. Dokážte, že skupina aritmetických vektorov s racionálnymi zložkami je lineárne nezávislá nad $\mathbb{Q}$ práve vtedy, keď je lineárne nezávislá nad $\mathbb{R}$.

Definícia. Množinu $B \subseteq V$, ktorá je lineárne nezávislá a súčasne generuje $\mathbf{V}$, nazývame *bázou* $\mathbf{V}$.

Cvičenie. Dokážte, že množina $B \subseteq V$ je bázou $\mathbf{V}$ práve vtedy, keď každý vektor z V sa dá jednoznačne zapísať v tvare $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, kde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in B$ a $a_1, a_2, \ldots, a_k \in T$.

Tvrdenie. Každý vektorový priestor má nejakú bázu. Všetky bázy daného vektorového priestoru majú rovnakú veľkosť – toto číslo nazývame *dimenziou* priestoru a značíme $\dim \mathbf{V}$.

Cvičenie. Spomeňte si na priestor polynómov stupňa najviac n. Nájdite aspoň dve jeho bázy. Aká je jeho dimenzia?

Cvičenie (ťažké). Máme tabuľku $m \times n$ reálnych čísel (drsňáci majú maticu). Keď sa pozrieme na riadky ako na aritmetické vektory $\mathbf{v}_i$ nad $\mathbb{R}$, môžeme označiť $D_r = \dim\langle\bigcup \mathbf{v}_i\rangle$ dimenziu nimi generovaného priestoru. Podobne definujeme D_c pre stĺpce. Dokážte, že $D_r = D_c$. Táto hodnota sa nazýva *hodnosť* matice.

Tvrdenie (zásadné). Množina viac než n vektorov v priestoru dimenzie n je lineárne závislá. Pre každú množinu menej než n vektorov existuje vektor mimo jej lineárny obal

Definícia. *Skalárny súčin* vektorov $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ a $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ definujeme ako

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n.$$

Skalárny súčin sa chová lineárne (keď niektorý z vektorov prenásobíme konštantou k, znásobí sa aj hodnota skalárneho súčinu k-krát).

Rovnosť tvaru $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{w}$ s neznámymi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sa dá chápať ako sústava rovníc (jedna rovnica pre každú zložku) a zapísať pomocou matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{v}_{11} & \mathbf{v}_{21} & \cdots & \mathbf{v}_{k1} & \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{22} & \cdots & \mathbf{v}_{k2} & \mathbf{w}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_{1n} & \mathbf{v}_{2n} & \cdots & \mathbf{v}_{kn} & \mathbf{w}_n \end{array}\right),$$

kde $\mathbf{v}_{ij}$ označuje j-tu zložku vektora $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{w}_j$ označuje j-tu zložku vektora $\mathbf{w}$.

- Ak hodnosť *rozšírenej matice* (celá matica vrátane posledného stĺpca s vektorom $\mathbf{w}$) je väčšia ako hodnosť *matice koeficientov* (bez posledného stĺpca), sústava nemá riešenie. Tento prípad nemôže nastať, ak $\mathbf{w}$ je nulový vektor.
- Ak sa hodnosti rozšírenej matice a matice koeficientov rovnajú, riešenie existuje. Ak je ich (spoločná) hodnosť rovná počtu premenných, existuje práve jedno riešenie.
- V opačnom prípade existuje nekonečne veľa riešení. Vieme ich popísať pomocou d voľných premenných (parametrov), kde d je rozdiel počtu premenných a hodnosti. Vektory $(a_1, \ldots, a_k)$, ktoré sú riešením, tvoria vektorový podpriestor dimenzie d.

Definícia. Hovoríme, že štvorcová matica je v *hornom trojuholníkovom tvare*, ak pod hlavnou diagonálou má samé nuly.

Cvičenie. Dokážte, že ak je matica sústavy rovníc v hornom trojuholníkovom tvare a na hlavnej diagonále nemá žiadne nuly, sústava má práve jedno riešenie (pre ľubovoľnú voľbu $\mathbf{w}$).

Úlohy

Úloha 1. V obdĺžnikovej divadelnej sále s r radmi po s sedadlách $r > s$ na niektorých miestach sedia ľudia. Dokážte, že môžeme vybrať niekoľko $k \geq 1$ radov tak, aby v každom stĺpci sedadiel bol počet ľudí vo vybraných radoch párny.

Úloha 2. V tabuľke 5×5 sú zapísané celé čísla. Je dovolené vybrať ľubovoľný štvorec 3×3 alebo 2×2 a zväčšiť v ňom všetky čísla o 1. Je vždy možné postupným vykonávaním týchto operácií získať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla deliteľné 2011?

Úloha 3. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_5, b_1, b_2, \ldots, b_5$ sú nie nutne rôzne čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$ také, že $a_i \geq b_i$ pre $1 \leq i \leq 5$. Dokážte, že existujú celé čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$, nie všetky nulové, také, že

$$\binom{a_1}{b_1}^{\alpha_1}\binom{a_2}{b_2}^{\alpha_2}\binom{a_3}{b_3}^{\alpha_3}\binom{a_4}{b_4}^{\alpha_4}\binom{a_5}{b_5}^{\alpha_5} = 1.$$

Úloha 4. V rade je N žiaroviek očíslovaných postupne 1 až N. Krokom rozumieme prepnutie troch žiaroviek, ktorých čísla a, b, c spĺňajú $a + c = 2b$. Určite všetky N, pre ktoré sa dá konečnou postupnosťou takýchto krokov všetky žiarovky zhasnúť nezávisle na ich počiatočnom stave. (C5, 1. ročník *i*KS)

Úloha 5. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ sú po dvoch rôzne podmnožiny množiny $M = \{1, \ldots, n\}$. Dokážte, že pre nejaké $1 \leq k \leq n$ sú množiny $A_i \setminus \{k\}$ tiež po dvoch rôzne.

Úloha 6. Majme prirodzené čísla k, n spĺňajúce $k < n$ a množinu $S = \{1, \ldots, n\}$. Nech $A_1, \ldots, A_k$ sú neprázdne podmnožiny S. Dokážte, že je možné ofarbiť niektoré prvky S dvoma farbami – červenou a modrou tak, aby boli splnené nasledujúce podmienky:

(i) každý prvok S je buď neofarbený, alebo je červený, alebo je modrý,
(ii) aspoň jeden prvok S je ofarbený,
(iii) každá z množiny A_i je buď celá neofarbená, alebo sa v nej vyskytuje aspoň jeden prvok z každej z dvoch farieb. (VJIMC 2009)

Úloha 7 (Lindströmova veta, „baby“ verzia). Ak sú $A_1, \ldots, A_m$ podmnožiny množiny $\{1, \ldots, n\}$ a $m > n$, potom existujú dve disjunktné množiny $I_1, I_2 \subset \{1, \ldots, m\}$, z ktorých je aspoň jedna neprázdna a pre ktoré platí

$$\bigcup_{i \in I_1} A_i = \bigcup_{i \in I_2} A_i.$$

Úloha 8 (Lindströmova veta). Ak naviac v predchádzajúcej úlohe $m > n + 1$, potom môžeme naviac požadovať, aby platilo

$$\bigcap_{i \in I_1} A_i = \bigcap_{i \in I_2} A_i.$$

Úloha 9. V Nepárno-párnom meste žije n ľudí a existuje m klubov takých, že každý z nich má nepárny počet členov a každé dva rôzne majú párny počet spoločných členov. Dokážte, že $m \leq n$.

Úloha 10. V meste žije n ľudí a existuje m filmových klubov $F_1, \ldots, F_m$ a m divadelných klubov $D_1, \ldots, D_m$ takých, že $2 \mid |F_i \cap D_j| \Leftrightarrow i \neq j$. Dokážte, že $m \leq n$.

Úloha 11. Nech p je nepárne prvočíslo a k prirodzené číslo. V meste žije n ľudí a existuje m klubov $K_1, \ldots, K_m$ takých, že $p^k \mid |K_i \cap K_j| \Leftrightarrow i \neq j$. Dokážte, že $m \leq n$.

Úloha 12. Dokážte, že $m \leq n$ aj v Párno-nepárnom meste. Ukážte, že pre nepárne n môže nastať rovnosť.

Úloha 13. Nech $n \in \mathbb{N}$ je párne a $A_1, \ldots, A_n \subseteq \{1, \ldots, n\}$ majú všetky párny počet prvkov. Dokážte, že existujú dve rôzne čísla $1 \leq i, j \leq n$ také, že $A_i \cup A_j$ má tiež párny počet prvkov.

Úloha 14 (Fisherova nerovnosť). V rybárskej dedine žije n rybárov, ktorí tvoria m odborových združení. Každé dve združenia zdieľajú presne k členov. Dokážte, že $m \leq n$.

Úloha 15. Súvislý graf má 1000 vrcholov a 2022 hrán. Koľkými spôsobmi môžeme nejaké hrany vymazať tak, aby každý vrchol výsledného grafu mal párny stupeň?

Úloha 16. Graf G má 42 vrcholov (žiadny izolovaný) a 60 hrán. Radek má 21 kružníc (podgrafov G) a tvrdí, že z nich vie „zlepiť“ ľubovoľný podgraf G, ktorého vrcholy majú všetky stupne párne. „Zlepením“ dvoch grafov vznikne graf, ktorého množina hrán je symetrickým rozdielom množín hrán pôvodných grafov. Dokážte, že G má najviac tri komponenty.

Úloha 17. Rozhodnite, či existujú reálne polynómy $a(x)$, $b(x)$, $c(y)$, $d(y)$ také, že

$$1 + xy + x^2y^2 \equiv a(x)c(y) + b(x)d(y).$$

(Putnam 2003 B1)

Úloha 18. Nech $P(x)$ je nenulový reálny polynóm. Dokážte, že existuje nenulový polynóm $Q(x)$ taký, že polynóm $R(x) = P(x)Q(x)$ má nenulové koeficienty iba u členov s prvočíselnými exponentmi.

Úloha 19. Sedem trpaslíkov po 16 dní pracovalo nasledujúcim spôsobom:

- každý trpaslík celý deň kutal striebro alebo zbieral maliny,
- pre každé dva dni platí, že počas nich aspoň traja trpaslíci robili oboje,
- prvý deň všetci kutali striebro.

Dokážte, že niektorý deň všetci trpaslíci zbierali maliny. (EGMO 2013/6)

Úloha 20. Je daný graf a v každom vrchole rozsvietená žiarovka. V jednom ťahu môžeme vybrať jeden vrchol a prepnúť žiarovku v ňom a vo všetkých vrcholoch s ním spojených hranou. Dokážte, že môžeme konečným počtom ťahov všetky žiarovky zhasnúť.

Úloha 21. Máme množinu 13 závaží s racionálnymi hmotnosťami. Ak odoberieme ktorékoľvek z nich, zvyšných 12 závaží sa dá vždy rozdeliť na dve skupiny po 6 s rovnakou celkovou váhou. Dokážte, že všetky závažia majú rovnakú hmotnosť. Čo ak by boli hmotnosti reálne čísla?

Úloha 22. V meste s n obyvateľmi je m klubov, každý klub má aspoň dvoch členov. Každému obyvateľovi chceme prideliť červený alebo modrý klobúk tak, aby v každom klube bol aspoň jeden obyvateľ s červeným a aspoň jeden s modrým klobúkom.

a) Dokážte, že ak každý klub má aspoň k členov a klubov je najviac $2k-1$, tak vhodné priradenie farieb existuje.
b) Nazvime situáciu *kritickou*, ak neexistuje žiadne vhodné priradenie farieb, ale bude existovať po zrušení ktoréhokoľvek klubu. Dokážte, že pre nepárne $n \geq 2$ existuje kritická situácia.
c) Dokážte, že v každej kritickej situácii platí $m \geq n$ za predpokladu, že každý obyvateľ je členom aspoň jedného klubu

Úloha 23. Dokážte, že ak všetky vzdialenosti medzi m bodmi v $\mathbb{R}^n$ sú rovnaké, tak platí $m \leq n+1$.

Úloha 24. Na matematickej konferencii sa každá dvojica matematikov buď navzájom pozná, alebo nepozná. Každý účastník bude obedovať v jednej z dvoch veľkých jedální. Každý matematik trvá na tom, aby jedol v jedálni, v ktorej má párny počet známych. Dokážte, že počet spôsobov, ako rozdeliť matematikov do jedální je mocninou dvoch (teda tvaru 2^k pre nezáporné celé číslo k). (USAMO 2008)

Literatúra a zdroje

Príspevok je z veľkej časti kópiou príspevku Davida Hrušky z roku 2014. Ďakujem mu za umožnenie jeho použitia.

[1] David Hruška; *Lineární algebra v kombinatorice*, zborník *i*KS, 2014.
[2] Lászlo Babai, Péter Frankl: *Linear algebra methods in combinatorics*, Dept. Comput. Sc., University of Chicago, 1992, Preliminary version 2.
[3] Jiří Matoušek: *Šestnáct miniatur.*
[4] Jiří Matoušek: *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, American Mathematical Society.
[5] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum 2010,
[6] `http://people.cs.uchicago.edu/~laci/CLASS/HANDOUTS-COMB/BaFrNew.pdf`.

Hinty

Hint 1. Vhodne reprezentujte sálu a využite nerovnosť.
Hint 2. Koľko máme (vhodne zvolených) vektorov? Aha, takže to vyjde tesne, alebo…
Hint 3. Zvoľte si lišiacky vektorový priestor.
Hint 4. Pre koľko najmenej žiaroviek už nagenerujete všetko? Potom použite indukciu.
Hint 5. Napíšte si do tabuľky charakteristické vektory. Nie je tam nejak veľa stĺpcov? Vyjadrite jeden pomocou ostatných a zahoďte ho.
Hint 6. Urobte si tabuľku charakteristických vektorov. V lineárnej kombinácii máte kladné a záporné koeficienty.
Hint 7. Závislosť charakteristických vektorov ste už isto objavili, teraz už len nejakú súvislosť so zjednotením. Spomeňte si na úlohu 6.
Hint 8. K štandardným charakteristickým vektorom pridajte ešte „inverzné“. Aká je dimenzia vzniknutého priestoru? Preveďte prieniky na zjednotenia a zopakujte postup z „baby“ verzie.
Hint 9. Dokážte (sporom), že charakteristické vektory sú nezávislé. Za týmto účelom urobte skalárny súčin príslušnej rovnosti s vhodným charakteristickým vektorom.
Hint 10. Analógia predchádzajúcej úlohy.
Hint 11. Skúste pracovať nad vhodnejším telesom.
Hint 12. Šikovne využite tvrdenie úlohy 9.
Hint 13. Sporom. Môžu byť charakteristické vektory nezávislé? Potom použite štandardný trik so skalárnym súčinom a nájdite nejaký pekný spor.
Hint 14. Chceme nezávislosť, skúsme nejaký iný násobiaci trik so skalárnym súčinom a lineárnou kombináciou.
Hint 15. Kružnice grafu spolu s ich „xorovaním“ generujú vektorový priestor. Aká je jeho dimenzia a aký je počet vektorov?
Hint 16. Radek musí mať aspoň toľko kružníc, aká je dimenzia príslušného priestoru kružníc.
Hint 17. Nie, sporom. Vhodným dosadením za y dostaňte na ľavej strane lineárne nezávislé polynómy v x. Čo na to pravá strana?
Hint 18. Predstavte si $P(x)$ a $R(x)$ ako vektory. Ako vyzerajú polynómy $x^k P(x)$ a ako je to s ich (ne)závislosťou? Zväčšujte k, dokým nebudete mať viac voľných premenných (neznámych, ktoré sa stanú koeficientmi R) než podmienok (rovností, ktoré musia platiť, aby $P(x)Q(x)$ spĺňal zadanie).
Hint 19. Každý deň reprezentujte sedemzložkovým vektorom nad $\mathbb{Z}_2$. Čo hovoria podmienky zo zadania? Zvyšok už musíte vymyslieť.
Hint 20. Urobte si tabuľku $n \times n$ (stĺpce sú vypínače, riadky žiarovky) podľa toho, čo čo prepína. Chcete nakombinovať stĺpce na samé jednotky. To vyzerá ako nejaká sústava, nie? Čo sa nesmie stať, aby sústava mala riešenie? Na zvyšok použite vlastnosti tabuľky, ktorá je odvodená z grafu.
Hint 21. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že závažia majú celočíselné hmotnosti, ďalej aj to, že jedno z nich je má hmotnosť 0 a že jedno z nich má nepárnu hmotnosť. Súčet každej 12-tice je párny, ale to platí aj pre súčet (skoro) každej 11-tice. Zostavte sústavu rovníc a ukážte, že všetky majú nulovú hmotnosť.

Hint 22.
a) Priraďte farby podľa hodu mincou. Ukážte, že očakávaná hodnota počtu klubov, v ktorých majú všetci členovia klobúk rovnakej farby, je ≤ 1.
b) Vytvorte dvojčlenné kluby.
c) Predpokladajte, že $m > n$ a využite lineárnu závislosť charakteristických vektorov.
Hint 23. Použite kosínovú vetu a s využitím skalárneho súčinu dokážte, že vektory z jedného bodu k ostatným sú lineárne nezávislé.

Lagrangeova interpolace

Rado Švarc

Abstrakt. Dostaneme-li několik bodů, umíme nalézt polynom, který jimi přesně prochází? Jak vysoký stupeň takový polynom bude muset mít? A lze takové úvahy nějak rozumně využít při řešení olympiádních úloh? Na všechny tyto otázky se v příspěvku pokusíme odpovědět.

Intro k interpolaci

Nejprve si ukážeme, jak zadanou $(n+1)$-ticí bodů provést polynom stupně nepřesahujícího n. Po zbytek přednášky pak budeme z této znalosti bohatě čerpat.

Věta. Ať $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ je $(n+1)$-tice po dvou různých reálných čísel, dále mějme libovolná reálná čísla $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Pak existuje jednoznačně určený reálný polynom f stupně nejvýše n takový, že $f(x_i) = y_i$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$.

Důkaz. Definujme $f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Protože x_i byla po dvou různá, je f dobře definovaný reálný polynom proměnné x stupně nejvýše n.

Zbývá ukázat, že jako takový je f určen jednoznačně. Vezměme libovolný reálný polynom g, který prochází všemi $n+1$ danými body a má stupeň nejvýše n. Potom $h = f - g$ je opět reálný polynom stupně nejvýše n, přičemž $h(x_i) = y_i - y_i = 0$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. Pokud ale má reálný polynom v nějakém bodě x_i kořen, musí být dělitelný polynomem $x - x_i$. Polynom h má ale víc kořenů, než jaký má stupeň, tedy je to nulový polynom, odkud $f = g$. ∎

Definice. Polynom f z předchozího tvrzení nazýváme *Lagrangeův interpolační polynom.*

Na interpolační předpis můžeme nahlížet tak, že každý polynom stupně nejvýše $n+1$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci $n+1$ polynomů, které mají právě v jednom z bodů x_i hodnotu jedna a ve všech ostatních x_i se nulují.

Poznámka. Věta o Lagrangeově interpolaci neplatí pouze pro reálné polynomy, ale také pro polynomy nad $\mathbb{Z}_p$ pro libovolné prvočíslo p.

Důkaz poznámky je zcela analogický předešlému důkazu. Obecněji věta o Lagrangeově interpolaci funguje pro libovolné těleso T. Nás ale stejně žádná jiná tělesa než ta výše uvedená zajímat nebudou.

Úloha 1. Ať $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ jsou po dvou různá a $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ libovolná. Potom má soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 a_1 + b_0^2 a_2 + \cdots + b_0^n a_n &= c_0, \\ a_0 + b_1 a_1 + b_1^2 a_2 + \cdots + b_1^n a_n &= c_1, \\ &\vdots \\ a_0 + b_n a_1 + b_n^2 a_2 + \cdots + b_n^n a_n &= c_n. \end{aligned}$$

právě jedno řešení $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Lagrangeův interpolační polynom není šikovný pouze tím, že existuje. Jeho krása tkví v tom, že ho můžeme explicitně napsat. To je společně s jeho jednoznačností velmi silná zbraň.

Hodnoty v bodech

Začneme jednoduchými úlohami, jejich cílem je spočítat hodnotu polynomu zadaného svými hodnotami v nějakém dalším bodě.

Úloha 2. Reálný polynom f stupně $\deg f \leq n$ splňuje $f(i) = 2^i$ pro všechna $i = 0, 1, \dots, n$. Spočtěte $f(n+1)$.

Úloha 3. Ukažte, že polynom f z předchozí úlohy má stupeň přesně n.

Úloha 4. Reálný polynom f stupně $\deg f \leq n$ splňuje $f(k) = \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$ pro všechna $k = 0, 1, \dots, n$. Spočtěte $f(n+1)$. (IMO Shortlist 1981)

Úloha 5. Polynom f s celočíselnými koeficienty splňuje $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Ať p je takové prvočíslo, že $f(k)$ dává zbytek 0 nebo 1 modulo p pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že f má stupeň alespoň $p - 1$. (IMO Shortlist 1997)

Úloha 6. Ať $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou nezáporná celá čísla. Dokažte, že konstantní člen součinu

$$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i} \qquad \text{je roven} \qquad \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)!}{\prod_{i=1}^n a_i!}.$$

Na procvičení ještě dodáme dva další úplně přímočaré příklady, jejichž dopočtení však vyžaduje o trochu víc práce.

Úloha 7. Ať F_i značí i-té Fibonacciho číslo.*) Ať polynom f stupně 990 splňuje $f(k) = F_k$ pro všechna $k = 992, 993, \dots, 1982$. Dokažte, že $f(1983) = F_{1983} - 1$. (IMO Shortlist 1983)

Úloha 8. Polynom $f(x)$ stupně $3n$ má hodnotu 0 v bodech $2, 5, 8, \dots, 3n - 1$, hodnotu 1 v bodech $1, 4, 7, \dots, 3n - 2$ a hodnotu 2 v bodech $0, 3, 6, \dots, 3n$. Navíc platí $f(3n+1) = 730$. Nalezněte n. (USAMO 1984)

---

*) Tedy $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$.

Kombinatorika a koeficienty

Pro důkazy některých identit často stačí spočítat některý koeficient nějakého polynomu dvěma způsoby.

Úloha 9. Dokažte, že pro libovolná po dvou různá celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a pro libovolné přirozené k je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

celé číslo. (Velká Británie)

Úloha 10. Jakých hodnot nabývá výraz z minulého příkladu pro přirozená $k = 0, 1, \ldots, n-1$?

Úloha 11. Vyjádřete předešlý výraz jako polynom v proměnných a_i pro $k = n$ a pro $k = n + 1$.

Úloha 12. Vyjádřete předešlý výraz jako polynom v proměnných a_i pro libovolné $k \geq n$.

Úloha 13. Ať $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom. Pro libovolná reálná b, h dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(b + kh) = a_n n! h^n.$$

Poznamenejme, že v předchozí úloze může být klidně $a_n = 0$, používáme totiž pouze horní odhad na stupeň f. Nyní přijde sprška kombinatorických identit. Některé jsou důsledky elementárních kombinatorických principů, jiné zcela lehké nejsou. Každopádně si je však rozmyslete pomocí předchozí úlohy či jiné interpolace.

Úloha 14. Pro $p = 0, 1, \ldots, n-1$ dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0.$$

Úloha 15. Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!.$$

Úloha 16. Ukažte rovnost

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Pro radost si můžete stejným způsobem spočítat podobné sumy i pro vyšší mocniny. Na závěr této sekce si zadáme jednu těžkou úlohu.

Úloha 17. Dokažte rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} (n-k)^n = n^n \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Polynomy a nerovnosti

Doteď jsme interpolaci používali k získávání rovností. Nyní se ji pokusíme aplikovat k důkazům různých nerovností s polynomy. Máme-li totiž nějakou podmínku na dostatek hodnot polynomu, Lagrangeova interpolace pak vynucuje nerovnosti v dalších bodech.

Úloha 18. Reálný polynom $f(x)$ stupně n splňuje na intervalu $[0,1]$ nerovnost $|f(x)| \le 1$. Dokažte, že $|f(\frac{-1}{n})| \le 2^{n+1} - 1$.

Úloha 19. Mějme reálný polynom $f = ax^2 + bx + c$ takový, že čísla $f(-1)$, $f(0)$ a $f(1)$ v absolutní hodnotě nepřesahují 1. Dokažte, že pro libovolné $x \in [-1,1]$ platí $|f(x)| \le \frac{5}{4}$ a $|x^2 f(\frac{1}{x})| \le 2$. (Španělsko 1996)

Úloha 20. Je dáno reálné $a \ge 3$ a polynom p stupně n. Dokažte, že

$$\max_{i=0,1,\dots,n+1} |a^i - p(i)| \ge 1.$$

(Indie 1998)

Úloha 21. Patrik si napsal reálný monický polynom stupně n, vyhodnotil jej v $n+1$ různých celočíselných bodech, vzal z nich absolutní hodnoty a vybral tu největší. Polynom i body volil tak, aby výsledná hodnota byla nejnižší možná. Kolik mu vyšlo? (iKS–5–A3)

Nyní si ještě zadáme několik dalších příkladů, které s interpolací úzce souvisí. V nich se typicky hodí tipnout správné body, ve kterých interpolaci provedeme. Pro polynomy nízkých stupňů je takové tipování možné, pro vyšší stupně se k němu hodí znalost takzvaných *Čebyševových polynomů*. Jejich zkoumání se ale vyhneme.

Úloha 22. Nalezněte maximum výrazu $a^2 + b^2 + c^2$, je-li $|ax^2 + bx + c| \le 1$ pro libovolné $x \in [-1,1]$.

Úloha 23. Reálná čísla a, b, c, d splňují $|ax^3 + bx^2 + cx + d| \le 1$ pro všechna $x \in [-1,1]$. Ukažte, že $|a| + |b| + |c| + |d| \le 7$. (IMO Shortlist 1996)

Úloha 24. Budiž $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ reálný polynom splňující $|p(x)| \le 1$ na intervalu $[-1,1]$. Maximalizujte $|c|$ a určete, pro které polynomy se maxima nabývá.

Úloha 25. Mějme funkci $F = \max_{x\in[0,3]} |x^3 - ax^2 - bx - c|$. Nalezněte její minimum přes všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$. (Čína TST 2001)

Na závěr poznamenejme, že silnou zbraní na mnoho takových polynomiálních nerovností je Čebyševova věta, která říká, že monický reálný polynom f stupně n na intervalu $[-1, 1]$ splňuje $\max_{x\in[-1,1]} |f(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Tento odhad přitom obecně vylepšit nelze. Všimněte si, že například poslední z našich úloh je pak triviální. My se však touto větou důkladněji zabývat nebudeme.

Další stylovou aplikací Lagrangeovy interpolační formule je její vypuštění na komplexní polynomy.

Literatura a zdroje

Bohužel, kvalitních zdrojů příkladů na interpolaci moc není. Příspěvek proto vychází z následujících dvou knih.

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*

[2] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Straight from the Book*

Příspěvek Kuy Löwita z iKSkového sousu v roce 2018 je taky celkem fajn a tvorbě tohoto příspěvku lehce napomohl.

Hinty

Hint 1. Interpretujte a_i jako koeficienty Lagrangeova polynomu.
Hint 2. Napište jej, s využitím vlastností kombinačních čísel vyjde $2^{n+1} - 1$.
Hint 3. Kdyby měl menší stupeň, musel by příslušnými body přesně procházet už ten předchozí polynom.
Hint 4. Postupujte jako minule, vyjde zbytek $n + 1$ po dělení dvěma.
Hint 5. Napište plný interpolační polynom v $\mathbb{Z}_p$ a ukažte, že má nenulový vedoucí koeficient.
Hint 6. Nejprve si všimněte, že onen zlomek v proměnných a_i je součtem podobných zlomků, kde je vždy jedno a_i zmenšeno o 1. Dokažte, že konstantní člen takových součinů splňuje tento rekurzivní vztah, pomůže interpolační rovnost $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (1 - \frac{x_i}{x_j})^{-1} = 1$.
Hint 7. Pomozte si třeba známým explicitním vyjádřením Fibonacciho čísel pomocí mocnění zlatého řezu.
Hint 8. Interpolace nám dává jednu podmínku. Nějak domlaťte, že funguje pouze $n = 4$.
Hint 9. Interpolujte polynom x^k. Je-li k moc velké, berte zbytek po dělení $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$.
Hint 10. Příslušný koeficient polynomu x^k je zřejmý: 0 pro $k \leq n - 2$ a 1 pro $k = n$.
Hint 11. Vyjde $\sum_{i=1}^{n} x_i$ a $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j$.
Hint 12. Zase stejně.
Hint 13. Interpolujte f a sledujte vedoucí koeficient. Případ $h = 0$ řešte zvlášť.
Hint 14. Triviálně z předchozího.
Hint 15. Taktéž.
Hint 16. Vymodulte polynom x^{n+1} vhodným polynomem stupně n a interpolujte.
Hint 18. Přímočaře interpolujte v bodech tvaru $\frac{k}{n}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$.
Hint 19. Interpolujte a nahlédněte, že stačí řešit jedinou (extrémní) volbu interpolačních koeficientů.
Hint 20. Interpolujte obecně v prvních $n+1$ bodech. Ať se zvolí povolené hodnoty sebelíp, v $n + 1$ bude p moc malý.
Hint 21. Interpolujte v oněch bodech, vyvoďte důsledky z moničnosti polynomu. Vyjde $\frac{n!}{2^n}$.
Hint 22. Interpolujte v bodech -1, 0, 1 a vyjádřete $a^2 + b^2 + c^2$ pomocí interpolačních koeficientů.

Obsah