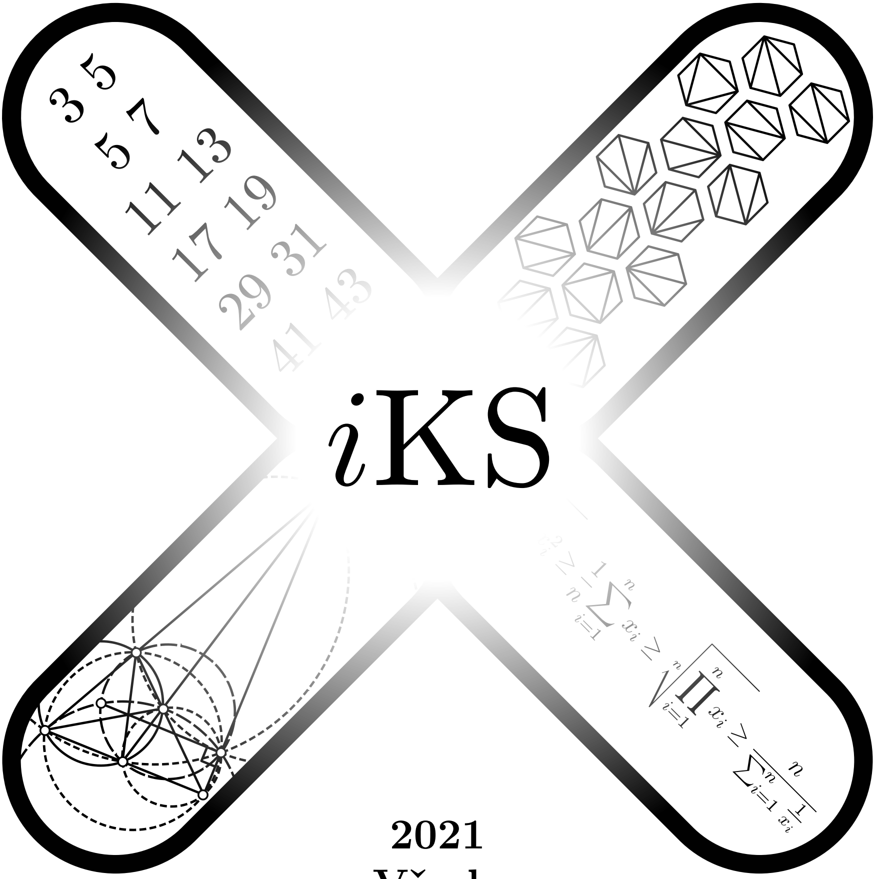


*i*KS

2021
Všude

Matěj Doležálek
Jakub Löwit
Josef Minařík
Radek Olšák

Iterace

Matěj Doležálek

Abstrakt. Jak zkrotit funkci aplikovanou mnohokrát za sebou? Nakreslíme si obrázek a vydáme se na cestu po šipkách. Možná půjdeme do nekonečna a ještě dál, anebo se možná dostaneme do bludného kruhu, ale s trochou štěstí nám obojí něco poví o zkoumané funkci.

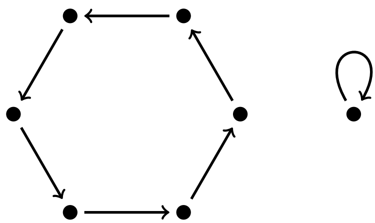
Úmluva. Nechť je f funkce. Pro přirozené n budeme značit

$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-krát}})(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n\text{-krát}} x)\ldots)),$$

tedy f aplikováno n-krát na x, a pro $n = 0$ dodefinujeme $f^0(x) = x$. Kdybychom náhodou chtěli zapsat n-tou mocninu hodnoty $f(x)$, napíšeme $(f(x))^n$.

Úmluva. S funkcí $f\colon M \to M$ budeme zacházet jako s orientovaným grafem na množině vrcholů M. Šipka z a do b povede právě tehdy, když $f(a) = b$. Následně budeme pro takovou funkci používat grafově motivované termíny:

- *Cyklem* nazveme konečnou posloupnost vrcholů, mezi nimiž dokola vedou šipky. Speciálně cyklus délky 1 je *pevný bod*, tedy prvek, který se zobrazuje sám na sebe.



- *Řetězem* nazveme posloupnost navzájem různých vrcholů spojených postupně šipkami, která je ve směru šipek nekonečná. Pokud je řetěz nekonečný i proti směru šipek, nazveme jej *oboustranným řetězem.*

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

- *Cestou* z vrcholu bude rozumět posloupnost vrcholů, na něž se dostaneme, když prostě půjdeme po šipkách, což odpovídá opakovanému aplikování funkce na příslušný prvek. Cesta se může buď zacyklit, nebo může být řetězem.

Pozorování. Funkcím $f\colon M \to M$ odpovídají právě ty grafy na množině vrcholů M, kde z každého vrcholu vychází právě jedna šipka.

Pozorování. Pro funkci na konečné množině se cesta z libovolného vrcholu zacyklí.

Pozorování. Nechť x leží v cyklu délky k na funkci f. Potom $f^n(x) = x$, právě když $k \mid n$.

Pozorování. Funkce uvažovaná jako graf je

- *prostá*, když do každého vrcholu vede *nejvýše* jedna šipka,
- *na*, když do každého vrcholu vede *alespoň* jedna šipka,
- *bijektivní*, když do každého vrcholu vede *právě* jedna šipka.

Pozorování. Nechť je M konečná množina. Potom je funkce $f\colon M \to M$ prostá, právě když je na.

Pozorování. Bijekce se sestává jen z navzájem disjunktních cyklů a oboustranných řetězů.

Pozorování. Prostá funkce se sestává jen z navzájem disjunktních cyklů, jednostranných řetězů a oboustranných řetězů. Počáteční vrcholy jednostranných řetězů jsou přitom přesně ty prvky, který chybí v oboru hodnot.

Úlohy s iteracemi dovedou být dost různorodé a kromě výše uvedených pozorování nemáme moc silnější zbraně. Časté postupy a nástroje zahrnují:

- *prostost a bijektivita*: Pokud dokážeme, že je funkce prostá či bijektivní, značně to zjednoduší obrázek. Následně už lze zvlášť pracovat s cykly a řetězy.
- *extremální princip*: Na cyklech se může vyplatit podívat se na největší nebo nejmenší prvek. Stejně tak může někdy pomoci minimální prvek oboru hodnot. Obecněji má každá podmnožina $\mathbb{N}$ minimum.
- *pořadí a vzdálenost*: Hodí se uvažovat o pořadí a vzdálenostech prvků na řetězu. Někdy se taky hodí porovnat to s pozicemi na číselné ose.
- *indukce*: Iterace často potkáme nad přirozenými čísly. Indukovat potom můžeme obyčejně podle argumentu, anebo třeba podle pořadí v cyklu či na řetězu.
- *funkcionálkové triky*: Funkcionálka s iterací je pořád funkcionálka. Chytré dosazení, úprava nebo symetrie mohou úlohu zpřehlednit.

Rozcvička I – procházky

Úloha 1. David na svých cestách zabloudil do země, kde je konečně mnoho silnic, každá z nich začíná a končí křižovatkou a každá křižovatka je tvaru Y. (Silnice mohou být klikaté a mimoúrovňově se křížit.) Řekl si, že by si ji rád prohlédl, ale trochu se obával, aby se tam úplně neztratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí ze křižovatky u hospody Na mýtince a střídavě bude na křižovatkách odbočovat doleva a doprava. Může si být jistý tím, že se po nějakém čase ocitne opět u hospody Na mýtince?

(PraSe 35–4j–5)

Úloha 2. Na kružnici leží několik hrobů. Do každého z nich dal Hamlet několik lebek (klidně žádnou), k nějakému neprázdnému se postavil a začal si hrát podle následujících pravidel. Pokud u sebe nemá žádné lebky, vezme si všechny z hrobu, u kterého právě stojí, a hned se posune o jeden dál. V opačném případě dá jednu lebku do hrobu, u něhož se nachází, a pokud ještě nějakou drží, přejde opět k dalšímu hrobu. Dokaž, že ať Hamlet rozmístí lebky jakkoli a postaví se kamkoli, budou po nějaké době počty lebek v jednotlivých hrobech stejné jako na začátku.

(PraSe 37–1j–5)

Úloha 3. V každém patře nekonečně vysoké začarované věže se nachází magický portál, na kterém je napsáno přirozené číslo. Tato přirozená čísla tvoří nerostoucí posloupnost a zároveň každé číslo udává, do kolikátého patra příslušný portál vede. Mezi patry věže lze cestovat pouze pomocí portálů a každý portál je pouze jednosměrný. V jednom z pater si malá myška usmyslela, že se vydá na výzvědy, a začala putovat skrze portály. Ukaž, že za nějakou dobu zůstane uvězněná ve dvojici pater, případně dokonce jen v jediném. (PraSe 35–1p–4)

Úloha 4. Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. *Centrem* nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Dokaž, že město má centrum. (PraSe 34–1j–6)

Úloha 5. Na tabuli jsou v nějakém pořadí napsána čísla 1 až 2021 v řadě. V jednom kroku se podíváme na první číslo, nechť je to k, a obrátíme pořadí prvních k čísel – tedy $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ přepíšeme na $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1$. Dokaž, že po konečném počtu kroků dostaneme na první pozici jedničku.

Rozcvička II – iterujeme jenom trochu

Úloha 6. Rozhodni, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $f(f(n)) < f(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (PraSe 36–4p–2)

Úloha 7. Je dána funkce $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zkonstruuj $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takovou, že $f^n(x) = 0$ má přesně $g(n)$ řešení pro každé $n \in \mathbb{N}$. (zobecněné PraSe 37–4p–3)

Úloha 8. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňují

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

Úloha 9. Rozhodni, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f(f(n)) = n + 2021$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (IMO 1987)

Úloha 10. Rozhodni, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující $f(f(n)) = 3n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. (USAYNO)

Úloha 11. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $f(f(x)) = x + f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Najdi všechna řešení rovnice $f(f(x)) = 0$.

Cykly

Úloha 12. Najdi všechny neklesající funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro něž existuje $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ splňující $f^{g(x)}(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 13. Je dána bijekce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Musí nutně existovat nekonečně mnoho funkcí $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f(g(x)) = g(f(x))$ pro každé $x \in \mathbb{R}$? (ELMO SL 2018)

Úloha 14. Najdi všechny bijekce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (Rumunsko 2004)

Úloha 15. Funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňuje

$$f^{f(n)}(n) = \frac{n^2}{f(f(n))}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Urči všechny možné hodnoty $f(2020)$. (USAMO 2019)

Úloha 16. Nechť $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Funkce $f\colon S \to S$ je *krutopřísná*, pokud pro každé $k \in S$ platí $f^{f(k)}(k) = k$. Dokaž, že každá krutopřísná funkce má alespoň $P+1$ pevných bodů, kde P je počet prvočísel v intervalu $(\sqrt{n}, n\rangle$. (PraSe 36–4p–7)

Úloha 17. O reálném polynomu $f(x) = x^2 + ax - 1$ je známo, že rovnice $f^{47}(x) = x$ má alespoň 50 reálných řešení. Dokaž, že tato rovnice má alespoň 96 řešení. (Russia TST 2020)

Úloha 18. Funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazveme *žůžovou*, pokud

$$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = n$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Najdi všechna m taková, že každá žůžová funkce f splňuje $f^{2021}(m) = m$. (ELMO SL 2014)

Úloha 19. Budiž $S = \{1, \ldots, n\}$. Pro bijekci $f\colon S \to S$ nechť $c(f)$ značí počet cyklů na f. Dokaž, že pro dvě bijekce f, g platí $c(f) + c(g) \leq c(f \circ g) + n$. (USA TST 2016)

Řetězy

Úloha 20. Jsou dána $a, k \in \mathbb{N}$. Dokaž, že funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f^k(n) = n + a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje, právě když $k \mid a$. Bonus: kolik takových funkcí existuje?

Úloha 21. Najdi všechna nezáporná celá čísla k, pro něž existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f^n(n) = n + k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 22. Najdi všechna přirozená k, pro než existují funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že g nabývá nekonečně mnoha hodnot a $f^{g(n)}(n) = f(n)+k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (MEMO 2020 I1)

Úloha 23. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1$$

pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{N}$. (ELMO 2020)

Úloha 24. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují

$$f^{x+1}(y) + f^{y+1}(x) = 2f(x+y)$$

pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ a navíc nabývají nekonečně mnoha různých hodnot. (upravené IMOC 2019)

Úloha 25. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, které splňují $f(f(f(n))) = f(n+1)+1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. (ISL 2013)

Úloha 26. Pro funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje k splňující $f^{2k}(n) = n+k$. Jako k_n označme nejmenší takové k. Dokaž, že posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neomezená. (ISL 2012)

Trocha teorie čísel

Úloha 27. Pro dané celé číslo $a_0 > 1$ definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pro každé $n \geq 0$ předpisem

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{pokud je } \sqrt{a_n} \text{ celé číslo,} \\ a_n + 3, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Urči všechny hodnoty a_0, pro něž existuje číslo A takové, že $a_n = A$ platí pro nekonečně mnoho indexů n. (IMO 2017)

Úloha 28. Definujme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takto: $a_1 = 1$ a pro každé přirozené k je $a_{k+1} = a_k^3 + 1$. Dokaž, že pro všechna prvočísla p tvaru $3\ell + 2$, kde ℓ je celé nezáporné, existuje přirozené n, že $p \mid a_n$. (MEMO 2018 T7)

Úloha 29. Urči největší přirozené $N < 2020$, pro něž existuje polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že $2020 \mid P^k(0)$, právě když $k \mid N$. Bonus: jak se odpověď změní, když místo 2020 napíšeme 2021? (USA EGMO TST 2020)

Úloha 30. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $x + f^x(y) \mid 2(x+y)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$. (IMOC 2018)

Úloha 31. Je dáno prvočíslo p a $S = \{1, 2, \ldots, p\}$. Urči počet funkcí $f\colon S \to S$, které splňují $f^p(1) = 2$.

Úloha 32. Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující:

(i) Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{f^n(m)-m}{n} \in \mathbb{N}$.
(ii) Množina $\mathbb{N} \setminus \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ je konečná.

Dokaž, že posloupnost $\{f(n) - n\}_{n=1}^{\infty}$ je periodická. (ISL 2015)

Náhodné

Úloha 33. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, jež pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ splňují

$$f^{f(x)}(y) = f(x)f(y).$$

Úloha 34. Najdi všechny páry funkcí (f, g) z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, které splňují

$$f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. (ISL 2011)

Úloha 35. Najdi všechny prosté funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$f^{f(a)}(b) \cdot f^{f(b)}(a) = \left(f(a+b)\right)^2$$

pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$. (Taiwan TST 2017)

Úloha 36. Nechť je $S \subseteq \mathbb{R}$. Dvojici funkcí (f, g) z S do S nazveme *španělskou*, pokud

(i) jsou obě rostoucí,
(ii) pro libovolné $x \in S$ platí $f(g(g(x))) < g(f(x))$.

Rozhodni, zda existuje španělská dvojice

(a) pro $S = \mathbb{N}$,
(b) pro $S = \left\{a - \frac{1}{b} : a, b \in \mathbb{N}\right\}$. (ISL 2008)

Úloha 37. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *chuťovka*, pokud existuje nekonstantní $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$f(n) + g(n) = f^{g(n)}(n) + g^{f(n)}(n)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Rozhodni, zda existuje $f_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že zároveň platí

(i) Pokud $f(n) \leq f_0(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak už f je chuťovka.
(ii) Pokud $f(n) > f_0(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak už f není chuťovka.

Literatura a zdroje

[1] Martin „Vodka“ Vodička: *Funkcionálky nad prirodzenými číslami*, Sborník *i*KS 2017
[2] Vít „Vejtek“ Musil: *Funkcionální rovnice*, Oldřichov 2012
[3] Rado van Švarc: *Dvě neobvyklé existenční techniky*, Hojsova Stráž 2016

Hinty

Hint 1. Jako stavy Davidovy cesty ber třeba trojice (silnice, směr, parita).

Hint 2. Stačí si rozmyslet, že proces jde jednoznačně obrátit.

Hint 3. Každá cesta se zacyklí – podívej se na cyklus.

Hint 4. Rozmysli si, že ve městě neexistují zatáčky, které zároveň nejsou křižovatky. Potom se zkus procházet uvnitř města.

Hint 5. Podívej se na cyklus a učiň extremální volbu.

Hint 6. Podívej se na cestu z libovolného n.

Hint 7. Prostě si nakresli stromeček.

Hint 8. Nahlédni prostost a poté indukuj.

Hint 9. Každý řetěz musí střídavě procházet dvě zbytkové třídy mod 2021.

Hint 10. Zkus si tipnout.

Hint 11. Je to jen 0.

Hint 12. Neklesajícnost je v cyklu dost omezující.

Hint 13. Rozděl komponenty souvislosti na oboustranné řetězy, pevné body a ostatní cykly.

Hint 14. Oboustranné řetězy vysporuj, v cyklech učiň extremální volbu.

Hint 15. Rozmysli si, že f musí být poskládána z dvojcyklů a pevných bodů.

Hint 16. Délky cyklů.

Hint 17. Kolik je cyklů délek 1 a 47?

Hint 18. Rozmysli si bijektivitu. Uvnitř cyklu indukuj proti směru šipek.

Hint 19. Funkci zeslab na neorientovaný graf, místo cyklu ber komponentu souvislosti.

Hint 20. Kolik prvků se s každou aplikací f ztrácí z oboru hodnot?

Hint 21. Cesta z n musí navštívit (skoro všechny) prvky zbytkové třídy n mod k. Najdi spor pomocí toho, že po vhodném n následuje na řetězu $n+k$ příliš brzo.

Hint 22. Cesta z $f(n)$ navštíví skoro celou zbytkovou třídu $f(n)$ mod k. Buď najdi spor s neomezeností g, anebo zkus vhodně poskládat graf.

Hint 23. Řetěz z 1 musí obsahovat vše. S pomocí úlohy 20 si rozmysli $1 \mapsto 2 \mapsto 3$ a je vyhráno.

Hint 24. Vyindukuj $f(n) = f^n(1)$. Nekonečnost oboru hodnot potom zpřehlední situaci.

Hint 25. Uprav do $f^4(n) = n+c$, následně porovnávej, kolik prvků chybí v oborech hodnot f a f^3. Pak už si stačí rozmyslet pořadí prvních čtyř prvků na řetězu – jsou dvě možnosti, které fungují.

Hint 26. Omez se na cestu jdoucí z 1 a označ $g(n) = f^{2k_n}(n) = n + k_n$. Využij toho, že g posouvá věci na cestě z 1 dvakrát dál, než je posouvá na číselné ose. Kolik bude mít řetězů?

Hint 27. Rozmysli si modulo 3. Potom se dívej na minimum cyklu.

Hint 28. Trik: $0^3 + 1 \equiv 1 \pmod p$.

Hint 29. Rozlož úlohu do $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_{101}$. Jak funguje délka cyklů při skládání zpět?

Hint 30. Zafixuj y a ber dostatečně velké x.

Hint 31. Prostě kombinatoricky počítej, prvočíselnost zařídí, že skoro žádná délka cyklu nevadí. Až nebudeš vědět, co se sumou, zkus teleskop.

Hint 32. Rozmysli si prostost a vysporuj cykly. Pro fixní a si rozmysli, že když nějaké T splňuje $\frac{f^d(a)-a}{d} = T$ pro nekonečné mnoho různých d, pak už je řetěz jdoucí z a aritmetická posloupnost s diferencí T.
Hint 33. Je to trochu troll. Rozmysli si $\frac{f(f(x))}{f(x)} = c$ a dále pracuj jen na oboru hodnot.
Hint 34. Zeslab rovnost na $f^{g(n)+1}(n) < f(n+1)$. Indukuj najednou, že

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(a-1) < f(a) < f(\text{cokoliv většího než } a)$$

a zároveň $f(n) = n$ pro $n \leq a-1$.
Hint 35. Existuje jen jedno řešení. Nejdřív urozebírej $1 \mapsto 2 \mapsto 3$, potom indukuj.
Hint 36. V (a) vyindukuj $g^k(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in S$, $k \geq 0$. V (b) najdi konstrukci: zkus, aby na číslech tvaru $a - \frac{1}{b}$ funkce f měnila a, zatímco g mění b.
Hint 37. Pro (ii) zkus zvolit f_0 tak, se dalo zdola odhadnout $g(n) - g^{f(n)}(n)$. To napoví správnou konstrukci funkce f_0, pro (i) pak zkus vymyslet dost postačujících podmínek. Pevné nervy a dobrou chuť!

Kombinatorické identity

Jakub Löwit

Abstrakt. V přednášce se budeme zabývat nahlížením různých identit. V první části si připomeneme všemožná kombinatorická pozorování, která nám takové nahlížení umožní. V druhé části představíme takzvaný *diskrétní kalkulus* – malého bratříčka derivací a integrálů – a ukážeme si některá jeho pěkná použití.

Na světě existuje nepřeberné množství různých identit s kombinačními čísly. Podobně existuje nepřeberné množství metod, jak takové identity hledat a dokazovat. My si ukážeme dva – velmi odlišné – přístupy.

Prvním bude *kombinatorické nepočítání*, které nám umožní řešit příklady meditací nad zadáním. Nepočítání umí být velmi zábavné a elegantní, občas ale vyžaduje netriviální dávku invence.

V druhé půlce přednášky si naopak ukážeme takzvaný *diskrétní kalkulus*. To je metoda ryze početní. Některé snadné úlohy tak může řešit zbytečně složitě, jindy ale poskytuje přehledný a přímočarý způsob jejich uchopení.

Upřímně však přiznejme: na některé úlohy nestačí ani jeden z těchto přístupů.

Úmluva. Není-li řečeno jinak, všechna čísla v tomto příspěvku jsou celá.

Úmluva. V textu se vyskytuje několik poznámek označených jako *formální*. Ty typicky vysvětlují vcelku nedůležité konceptuální detaily. Pokud jsou matoucí, mohou být s klidem v duši ignorovány.

Kombinace

Definice. Mějme celé číslo $n \geq 0$. Potom $n! = n(n-1)\cdots 1$ značí počet možností, jak seřadit n předmětů.

Definice. Mějme celá čísla $n \geq k \geq 0$. Kombinační číslo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pak značí počet možností, jak vybrat z n předmětů nějakou k-tici.

Základní vlastností kombinačních čísel je platnost binomické věty.

Tvrzení (Binomická věta). Pro $n \geq 0$ platí polynomiální identita

$$\sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-i} \binom{n}{i} = (x+y)^n.$$

Navíc se dají přehledně uspořádat do *Pascalova trojúhelníku.*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& \binom{0}{0} &&&&& \\
&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&& \\
&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&& \\
&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} && \\
& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Pascalův trojúhelník může na první pohled působit banálně. Přesto nám ale dává dobrou grafickou interpretaci různých algebraických identit. A taková interpretace se může hodit jak pro jejich zapamatování, tak pro jejich použití.

Nepočítací rozcvička

Začneme několika nejdůležitějšími vztahy kombinačních čísel, které lze všechny nahlédnout kombinatoricky. Rozmyslet si následujících pár úloh bez počítání by měla být poměrně dobrá investice. Pro grafickou názornost si je posléze můžeme vepsat do Pascalova trojúhelníka.

Úloha 1. Pro $n \geq i \geq 0$ dokažte

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}.$$

Úloha 2. Pro $n \geq i \geq 0$ dokažte

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Úloha 3. Pro $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Úloha 4 (Vandermonde). Pro $n, m, r \geq 0$ splňující $m + n \geq r$ nahlédněte

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Úloha 5. Pro $n, r \geq 0$ nahlédněte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+r}{r} = \binom{n+r+1}{r+1}.$$

Úloha 6. Pro $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

Snadné identity

V zájmu dalšího procvičení přidejme ještě několik snadnějších identit.

Úloha 7. Pro $n \geq k \geq 0$ dokažte

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Úloha 8. Pro $n \geq r \geq k \geq 0$ nahlédněte

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Úloha 9. Pro $n \geq 0$ nahlédněte

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Úloha 10. Pro $n \geq m \geq 0$ ukažte

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{n-i}{m-i} = \binom{n}{m}2^m.$$

Úloha 11. Pro $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Úloha 12. Pro $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Inkluze a exkluze

Ukažme si nyní takzvaný *princip inkluze a exkluze* – kombinatorické tvrzení, které dává do souvislosti velikost sjednocení a průniků pro nějaký systém množin.

Tvrzení (Princip inkluze a exkluze). Mějme konečnou množinu indexů I velikosti $|I| = n$ a systém konečných množin $(A_i)_{i \in I}$. Potom platí

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq I} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|.$$

Jinými slovy, na určení sjednocení všech A_i nám stačí znát velikosti průniků všech jejich neprázdných skupinek.

Poznámka (formální). Trochu víc konceptuálně lze $\bigcup_{i\in I} A_i$ vnímat jako průnik prázdného systému. Princip inkluze a exkluze pak můžeme přepsat do údernějšího tvaru

$$\sum_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}\left|\bigcap_{j\in J} A_j\right| = 0.$$

Vraťme se teď k tématu naší přednášky, kombinatorickým identitám. Máme-li nějaký systém množin $(A_i)_{i\in I}$, princip inkluze a exkluze nám dovoluje spočítat velikost jeho sjednocení dvěma způsoby. Při sčítání kombinatorických sum pak řešíme opačný problém – lze sumu interpretovat pomocí principu inkluze a exkluze? Zejména výskyt alternujících znamének může být dobrým indikátorem takové interpretace.

Úloha 13. Pro $n \geq 0$ sečtěte

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(n-i)\binom{n}{i}.$$

Úloha 14. Pro $n \geq 0$ pomocí principu inkluze a exkluze znovu nahlédněte

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0.$$

Úloha 15. Pro $n \geq 0$ určete hodnotu součtu

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^n.$$

Úloha 16. Pro $m > n \geq 0$ spočtěte

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(m-i)^n.$$

Úloha 17. Pro celé $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)!\right) = n!.$$

Další triky

Dosavadní ponaučení by mělo být následující: „porovnávací“ kombinatorická tvrzení se dají přepisovat do algebraických identit. Pokud tedy chceme dokázat nějakou podezřelou algebraickou identitu, můžeme ji zkusit kombinatoricky interpretovat – pokud se to povede, máme vyhráno. Vhodná kombinatorická interpretace ale občas může být dost triková.

Úloha 18. Pro přirozená m, n nahlédněte dělitelnost $m!(n!)^m \mid (mn)!$.

Úloha 19. Pro $s, t \geq 0$ spočtěte

$$\sum_{j=0}^{t} \binom{s+j}{j} 2^{t-j} + \sum_{j=0}^{s} \binom{t+j}{j} 2^{s-j}.$$

Úloha 20. Pro $n \geq 0$ označme

$$g(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} 2^{2i}.$$

Dokažte $g(n) + g(n-1) = 3^{n-1}$.

Úloha 21. Pro $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}.$$

Úloha 22. Pro $n \geq 0$ sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(n-i+1)} \binom{2i}{i} \binom{2(n-i)}{n-i}.$$

Úloha 23. Pro $n \geq 0$ označme

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k.$$

Dokažte $f(n) + f(n-1) = 2^n$.

Diskrétní kalkulus

Pojďme se teď na počítání sum podívat z úplně jiného úhlu. Začneme motivační úlohou.

Úloha 24. Sečtěte
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$
(folklor)

Řešení. Trikově upravme.
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Vskutku, v prvním kroku jsme pouze upravili zlomek uvnitř sumy; v druhém kroku se požrala většina sousedních členů.

Přijít na takový trik napoprvé určitě není lehké. Ale když už o něm víme, nejde zobecnit i na další sumy? Pointa předchozího výpočtu přece spočívala pouze ve vyjádření členů sumy pomocí rozdílů následujících členů nějaké vhodné posloupnosti.

Naším základním objektem budou celočíselné posloupnosti – ty si budeme představovat jako funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ nebo trochu obecněji $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Posloupnosti umíme sčítat i násobit po prvcích; každé $c \in \mathbb{Z}$ určuje konstantní posloupnost s odpovídající hodnotou.

Definice. Diskrétní derivací funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ myslíme funkci Δf definovanou jako
$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Značení. Pro $n \geq 0$ značíme symbolem $\Delta^n f$ opakované n-násobné použití diskrétní derivace na funkci f. Funkce $\Delta^n f$ se nazývá *n-tá diskrétní derivace* funkce f.

Definice. Diskrétním integrálem funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ myslíme libovolnou funkci $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující $\Delta g = f$. Značíme jej Σf.

Poznámka. Diskrétní integrál funkce f je jednoznačně určený až na přičtení celočíselné konstanty c. Striktně vzato, symbol Σf označuje jednu konkrétní volbu diskrétního integrálu. Všechny ostatní pak můžeme získat přičítáním celočíselných konstant.

Poznámka (formální). Ještě trochu formálněji, symbol Σf může označovat množinu všech diskrétních integrálů funkce f. Tím se lze zbavit vší nejednoznačnosti.

Poznámka (formální). Definice diskrétní derivace Δ a diskrétního integrálu Σ se nápadně podobají definicím derivace a integrálu reálných funkcí a v mnoha ohledech se proto chovají podobně. My však tuto analogii k ničemu potřebovat nebudeme.

Z našich definic je jasné, že operace Δ a Σ jsou k sobě v podstatě inverzní – pro jakoukoli posloupnost f platí $\Delta\Sigma f = f$, zatímco $\Sigma\Delta f = f$ platí až na přičtení konstanty.

Diskrétní integrál Σf má ale mnohem přímočařejší interpretaci – až na konstantu je dán prefixovými součty posloupnosti f. Přesněji, pro libovolná $a \leq b \in \mathbb{Z}$ platí*)

$$(\Sigma f)(b+1) - (\Sigma f)(a) = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b).$$

Skutečně – pokud totiž zafixujeme a, obě strany rovnosti mají stejnou diskrétní derivaci jakožto funkce proměnné b a zároveň se rovnají pro $b = a$.

Všimněme si přitom, že levá strana rovnosti nezávisí na konkrétní volbě diskrétního integrálu – přičtení jakékoli konstanty c k funkci Σf je irelevantní. Na spočtení dlouhého součtu napravo nám tak stačí nalézt diskrétní integrál funkce f a dosadit do něj dvě hodnoty. Zkoumání diskrétních derivací a integrálů nám tak – mimo jiné – dává přímočaré metody sčítání různých sum.

Výše zmíněný rozdíl hodnot posloupnosti v bodech a, b se někdy značí následujícím způsobem.

Definice. Pro funkci $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a hodnoty $a, b \in \mathbb{Z}$ označme

$$[g]_a^b = g(b) - g(a).$$

Předchozí vztah tak můžeme přepsat jako $[\Sigma f]_a^{b+1} = \sum_{i=a}^{b} f(i)$. Čistě z technických důvodů si ještě zavedeme značení pro posun indexů dané posloupnosti.

Definice. Pro posloupnost $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definujeme její *posunutí* Ef pomocí předpisu $Ef(a) = f(a+1)$. Obecněji, pro celé n značíme $E^n f$ posloupnost definovanou jako $E^n f = f(a+n)$.

Poznámka (formální). Symboly Δ, Σ, E vždy umíme napsat před nějakou posloupnost f, a tím získat novou posloupnost. S trochou představivosti je proto můžeme vnímat jako *operátory na množině všech posloupností.* Tento pohled trochu zjednodušuje značení: chceme-li třeba říct „při výpočtech nezáleží na vzájemném pořadí diskrétního derivování a posouvání“, stačí napsat $E\Delta = \Delta E$. Podobně je zřejmé, že operátor Δ^n je n-násobným složením operátoru Δ.

Cvičení. Spočtěte Δf a Σf konstantní posloupnosti f s hodnotou 1.

Cvičení. Spočtěte Δf a Σf Fibonacciho posloupnosti f definované na nezáporných celých číslech.

Cvičení. Buď $d \geq 0$. Jaká je diskrétní derivace posloupnosti $f(x) = \prod_{i=0}^{d} \frac{1}{x-i}$ definované na přirozených číslech?

Cvičení. Je-li funkce f zadaná polynomem, platí $\deg \Delta f < \deg f$.

---

*) Pozor na indexy! Na levé straně opravdu vystupuje $b+1$, ale napravo sčítáme jenom k b.

Cvičení. n-tá diskrétní derivace posloupnosti f je explicitně dána vztahem

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot f(x+i).$$

Diskrétní derivace se chovají pěkně ke sčítání a přeškálovávání posloupností. Zároveň se však chovají rozumně i k násobení.

Tvrzení (Základní vlastnosti diskrétní derivace).

(i) Buď $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ posloupnost a $c \in \mathbb{Z}$. Potom platí $\Delta(c \cdot f) = c \cdot \Delta f$.
(ii) Mějme dvě posloupnosti $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Potom platí $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$.
(iii) Mějme dvě posloupnosti $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Potom platí $\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + \Delta f \cdot Eg$. Tato rovnost se někdy označuje jako *Leibnitzovo pravidlo*.

Důsledek. Mějme dvě posloupnosti $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Potom platí

$$\Delta^n (f \cdot g) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (\Delta^i f) \cdot (\Delta^{n-i} E^i g).$$

Z předchozího tvrzení vyplývají obdobné vlastnosti pro diskrétní integrály – ty tedy opět respektují přeškálovávání a sčítání. Pro násobení dostáváme přepsáním Leibnitzova pravidla takzvanou *integraci per partes*:

$$\Sigma(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \Sigma(\Delta f \cdot Eg).$$

Integraci per partes lze interpretovat následovně. Chceme-li určit diskrétní integrál součinu dvou funkcí f, h a zároveň známe diskrétní integrál g funkce h, stačí nám alternativně spočítat diskrétní integrál součinu $\Delta f \cdot Eg$.

V mnoha případech se může hodit repertoár některých základních diskrétních derivací – nejdůležitější pro nás budou následující dvě a jejich drobné obměny.

Tvrzení (Diskrétní derivace některých funkcí).

(i) Buď $c \in \mathbb{Z}$. Posloupnost $f(x) = c^x$ má diskrétní derivaci $\Delta f(x) = (c-1)c^x$.
(ii) Buď $d \in \mathbb{N}$. Posloupnost $f(x) = \binom{x}{d}$ má diskrétní derivaci $\Delta f(x) = \binom{x}{k-1}$.

Všimněme si, že funkce $\binom{x}{d} = \frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (x-i)$ je polynomem v proměnné x s racionálními koeficienty. Její násobek $d! \cdot \binom{x}{d} = \prod_{i=0}^{d-1} (x-i)$ je pak polynom s celočíselnými koeficienty – tento polynom se mnohdy dlouze nazývá *d-tá klesající mocnina* a značí se $x^{\underline{d}}$. Z druhé části našeho tvrzení pak vyplývá následující.

Důsledek.*) Funkce $f(x) = x^{\underline{d}} = \prod_{i=0}^{d-1} (x-i)$ má diskrétní derivaci $d \cdot x^{\underline{d-1}}$.

Poznámka. Klesající mocniny lze smysluplně definovat i pro záporná d jako $x^{\underline{d}} = \prod_{i=0}^{d} = \frac{1}{x-i}$. Vztah z předchozího důsledku pak platí pro všechna $d \neq 0$.

---

*) Z hlediska diskrétní derivace se tedy $x^{\underline{d}}$ chová podobně jako x^d vzhledem k derivacím reálným.

Kalkulujme...

Pojďme si teď nabyté znalosti vyzkoušet na několika příkladech. Jak už jsme zmínili výše, nejpřímočařejším použitím diskrétního kalkulu je prosté sčítání sum. Myšlenka je přímočará. Sumační index si představíme jako proměnnou a posléze se pokusíme spočítat diskrétní integrál posloupnosti v sumě. Pokud se to povede, stačí správně dosadit krajní hodnoty.

Úloha 25. Pro $n \geq 0$ sečtěte
$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1).$$

Úloha 26. Pro $n \geq 0$ znovu sečtěte
$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

Rozmyslete si, že podobně umíme postupovat i pro vyšší exponenty.

Úloha 27. Pro $n \geq 0$ sečtěte
$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^i.$$

Úloha 28. Pro $n \geq 0$ sečtěte
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2.$$

Myšlenka diskrétního kalkulu se může hodit i ve více kombinatorických úlohách. Pokud se třeba snažíme vyjádřit nějakou kombinatoricky zadanou posloupnost algebraickým předpisem, stačí kombinatoricky určit její diferenci. I když člověk diskrétní kalkulus moc nezná, dívat se na diference se zkrátka vyplatí.

Přemýšlejme...

Čas od času však člověk může narazit i na sofistikovanější úlohu, kterou výše předvedená teorie značně ulehčí.

Úloha 29. Pro $m > n \geq 0$ znovu sečtěte
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (m-i)^n.$$

Úloha 30. Pro $n \geq 0$ znovu sečtěte
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^n.$$

Úloha 31. Buď p prvočíslo. Posloupnost celých čísel $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *péčková*, jestliže pro každé přirozené číslo e existuje takové $d \geq 0$, že pro všechna celá $m \geq d$ platí

$$p^e \mid \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} z_i.$$

Dokažte, že pokud jsou obě posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ péčkové, je péčková i posloupnost $(x_n y_n)_{n=0}^{\infty}$. (USA TST 2011)

Úloha 32. Pro $n > m \geq 0$ dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{2n+1}{n-k} \cdot (2k+1)^{2m+1} = 0.$$

(Crux 2019)

Úloha 33 (Pólya).*) Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ s racionálními koeficienty se nazývá *numerický*, jestliže se dá zapsat jako celočíselná lineární kombinace polynomů $\binom{x}{d}$ pro $d \in \mathbb{N}_0$. Dokažte, že polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ je numerický právě tehdy, když na celých číslech nabývá pouze celočíselných hodnot.

Literatura a zdroje

[1] Martin Tancer: *Kombinatorika*, PraSe, seriál 2007/2008
[2] Mirek Olšák: *Kombinatorické nepočítání*, *i*KS 2016
[3] Štěpán Šimsa: *Počítání dvěma způsoby*, PraSe 2013, Horní Lysečiny
[4] Michal Szabados: *Diskrétny kalkulus*, PraSe 2010, Oldřichov
[5] Dragomir Grozev: *Finite Differences in Olympiads*

*) Toto tvrzení tedy v jistém smyslu vysvětluje, proč se kombinační čísla objevují tak často: kdykoli lze nějakou celočíselnou posloupnost definovat racionálním polynomem, už se dá zapsat jako jejich celočíselná kombinace.

Hinty

Hint 1. Vybrat nějakou k-tici je to samé jako vybrat její doplněk.
Hint 2. Rozlište, zda byl do výsledné $(i+1)$-tice vybrán jeden konkrétní prvek.
Hint 3. Počet možností jak vybrat podmnožinu n-prvkové množiny.
Hint 4. Rozdělte případy podle toho, jak je r předmětů rozděleno mezi m a n.
Hint 5. Vybíráme $r+1$ předmětů ze seřazených $n+r+1$. Rozdělte případy podle nejvyššího vybraného předmětu.
Hint 6. Lichých podmnožin n prvkové množiny je stejně jako sudých. Zafixujte jeden prvek, bijekci definujte jeho přidáváním/odebíráním.
Hint 7. Z n-lidí vyberte k-členné družstvo a zvolte mu kapitána.
Hint 8. Z n lidí zvolte družstvo velikosti r a jeho poddružstvo velikosti k.
Hint 9. V řadě je $n+1$ políček. Vyberte některé z nich a do políček vlevo od něj položte dvě rozlišitelné figurky.
Hint 10. Z n kuliček vyberte m kuliček, vybrané kuličky obarvěte dvěma barvami.
Hint 11. Vybírejte dětské družstvo libovolné velikosti a jednomu dítěti dejte bonbon.
Hint 12. Postupujte podobně jako v předchozí úloze – mezi vybrané děti ale rozdejte dva bonbony.
Hint 13. Uvažte $A_i = \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Vyjde n.
Hint 14. Vezměte n krát tu samou jednoprvkovou množinu $A_1 = \cdots = A_n = \{1\}$. Ale ano, výsledek úlohy jsme potřebovali při důkazu principu inkluze a exkluze.
Hint 15. Pro $i = 1, \dots, n$ zvolte za A_i množinu těch funkcí $f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, které nenabývají hodnoty i. Výsledný součet je $n!$.
Hint 16. Vizte předchozí hint, pouze někde zaměňte n za m. Vyjde 0. No není to veselé?
Hint 17. Pomocí principu inkluze a exkluze interpretujte vnitřní sumu jako počet permutací k-prvkové množiny bez pevného bodu.
Hint 18. Kolika způsoby lze rozdělit mn lidí do m stejně velkých skupin?
Hint 19. Interpretuje sumu jako počet způsobů jak obarvit $s+t+1$ kuliček stříbrnou a tyrkysovou. Nejprve rozdělte případy podle toho, zda je stříbrných ostře víc než s, nebo tyrkysových ostře víc než t. Vyjde 2^{s+t+1}.
Hint 20. Interpretujte $g(n)$ jako počet slov nad abecedou $\{a, b, c\}$, která obsahují lichý počet a a sudý počet b.
Hint 21. Cesty v mřížce, které vedou doprava a nahoru. Levá strana dává cesty v mřížce $n \times n$ z rohu do rohu s význačným bodem na diagonále. Vytvořte bijekci s cestami délky $2n$, které mohou končit kdekoli. Pro další hint se podívejte do Mirkova starého příspěvku na nepočítání.
Hint 22. Znáte Catalanova čísla, tj. počet cest mřížce $n \times n$ nepřekračujících diagonálu. Potřebujete o nich vědět dvě věci. Vyjde $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Hint 23. Zase mřížka.
Hint 24. Přečtěte si řešení.
Hint 25. Diskrétní integrál funkce $x(x+1)$ už – až na posunutí – znáte. Výsledek bude $\frac{1}{3}(n+2)(n+1)n$.
Hint 26. Rozepište polynom x^2 pomocí klesajících mocnin, jejichž diskrétní integrály už znáte. Vyjde $\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$. Podobný postup funguje pro jakýkoli pevně zvolený exponent

– pouze je třeba přecházet mezi běžným tvarem polynomu a jeho rozepsáním do klesajících mocnin.

Hint 27. Diskrétní integrál funkce 2^x je opět 2^x, použijte per partes. Pozor na posun indexu! Vyjde $2^{n+1}(n-1)+2$.

Hint 28. Per partes. A pak? Per partes. Pokud se nepřepočítáte, vyjde $\frac{(-1)^n n(n+1)}{2} = (-1)^n\binom{n+1}{2}$.

Hint 29. Vezměte polynom $f(x) = (m-x)^n$. Jaký stupeň má Δf? Vyjádřete její hodnotu v 0 druhým způsobem.

Hint 30. Vezměte polynom $f(x) = x^n$ a opět se zamyslete nad polynomem $\Delta^n f$ a jeho hodnotou v 0.

Hint 31. Posloupnost f je péčková, právě když se $\Delta^m f(0)$ při zvětšování m stává víc a víc dělitelné p. Použijte Leibnitzovo pravidlo. Co zbývá ukázat o výrazech $\Delta^m g(j)$ pro péčkovou posloupnost g a čísla $j \geq 0$?

Hint 32. Tipněte polynom $f(x) = (2n+1-2x)^{2m+1}$. Spočtěte $\Delta^{2n+1} f(0)$ jednoduše a složitě. Posléze formálně přepište Leibnitzovskou sumu jako dvojnásobek zadaného výrazu.

Hint 33. Použití operací Δ a Σ zachovává numeričnost. Úlohu dokazujte indukcí podle stupně f.

Kombinatorická teorie čísel

Josef Minařík

Abstrakt. Pod kombinatorickou teorií čísel si můžeme představit nějakou úlohu o číslech, kterou můžeme řešit kombinatorickou úvahou. Celá čísla nám obvykle dají jenom nějakou strukturu, na které úloha pracuje, a dále už skoro žádná tvrzení z teorie čísel nepotřebujeme.

Nejdříve si ukážeme několik druhů úloh, na které můžeme narazit. Každá sekce obsahuje jednoduché příklady na procvičení daného principu. Následují další, většinou už o něco těžší úlohy seřazené víceméně podle obtížnosti.

Dirichletův princip

Docela často se nám bude hodit v řešení využít Dirichletův princip. Tvrzení je to sice jednoduché, ale jeho použití zdaleka nemusí být triviální.

Tvrzení. Máme-li více než nk věcí, které rozdělujeme do n přihrádek, bude v nějaké přihrádce aspoň $k+1$ věcí.

Úloha 1. Dokaž, že když z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vybereme více než n čísel, budou nějaká dvě z nich nesoudělná.

Úloha 2. Dokaž, že když z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vybereme více než n čísel, bude některé z nich dělit jiné. (Erdős)

Úloha 3. Je dáno n přirozených čísel. Dokaž, že nějaká jejich neprázdná podmnožina má součet dělitelný n.

Úloha 4. Dokaž, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nenulové Fibonacciho číslo, které je jím dělitelné.

Úloha 5. Nechť S je množina 10 dvouciferných čísel. Dokaž, že existují dvě disjunktní neprázdné podmnožiny S se stejným součtem. (IMO 1972/1)

Nekonečno

Následuje několik úloh, ve kterých se vyskytuje nekonečno (třeba jako počet přirozených čísel). Nemusíme se ale bát, žádné temno tady potřebovat nebudeme, obvykle si vystačíme s elementárními úvahami.

Úloha 6. Přirozená čísla jsou rozdělena do konečně mnoha disjunktních množin. Dokaž, že některá z těchto množit obsahuje nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla. (BMC 1999)

Úloha 7. Rozhodni, zda existuje nekonečná rostoucí posloupnost $a_1, a_2, \dots$ taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje posloupnost $a_1 + k, a_2 + k, \dots$ pouze konečně mnoho prvočísel.

Úloha 8. Nechť S je podmnožina přirozených čísel. Dokaž, že pokud má každá konečná podmnožina S společného dělitele většího než 1, potom má i S společného dělitele většího než 1.

Úloha 9. Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel, která obsahuje každé přirozené číslo právě jednou, taková, že n dělí součet prvních n členů pro všechna n?

Úloha 10. Nechť jsou přirozená čísla rozdělena do konečně mnoha disjunktních množin. Dokaž, že mezi nimi existuje množina A a číslo d takové, že pro každé $k \in N$ existují $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ z A splňující $a_{i+1} - a_i \leq d$. (Shortlist 1990)

Indukce

V téhle sekci se podíváme na úlohy řešitelné indukcí. Často se nebude jednat o indukci v pravém slova smyslu, ale budeme postupovat od menších podproblémů k větším.

Úloha 11. Dokaž, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet čísel tvaru $2^a 3^b$ tak, aby žádné z nich nedělilo jiné.

Úloha 12. Máme n přirozených čísel se součtem $s < 2n$. Dokaž, že každé $m \leq s$ umíme vyjádřit jako součet několika našich čísel.

Úloha 13. Dokaž, že existuje libovolně velká množina celých čísel M taková, že pro všechna $a, b \in M$ platí $(a-b)^2 \mid ab$. (USA 1998)

Úloha 14. Nechť $S = \{1, 2, \ldots, 10^6\}$. Dokaž, že pro libovolnou 101-prvkovou množinu $A \subset S$ existuje 100-prvková množina B taková, že čísla $a+b$, $a \in A$, $b \in B$ jsou po dvou různá. (IMO 2003/1)

Úloha 15. Nechť A je množina n zbytků modulo n^2. Dokaž, že existuje n-prvková množina B taková, že $a + b \bmod n^2$, $a \in A$, $b \in B$ dává aspoň $\frac{1}{2}n^2$ různých hodnot. (Shortlist 1999)

Motivační úložky

Úloha 16. Nechť A a B jsou neprázdné množiny přirozených čísel. Dokaž, že počet čísel, která můžeme zapsat ve tvaru $a + b$, kde $a \in A$, $b \in B$, je aspoň $|A| + |B| - 1$.

Úloha 17. Je vybráno 50 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 99\}$ tak, že součet žádné dvojice z nich není 99 ani 100. Jak musela vypadat vybraná čísla?

Úloha 18. Dokaž, že mezi každými deseti po sobě jdoucími přirozenými čísly je jedno nesoudělné se všemi ostatními.

Úloha 19. Je možné čísla 1 až 100 pokrýt dvanácti geometrickými posloupnostmi? (Rusko 1995)

Úloha 20. Dokaž, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje posloupnost n po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž žádné není mocninou prvočísla (ani první). (IMO 1989/5)

Další úlohy

Úloha 21. Je dáno 81 přirozených čísel, jejichž všichni prvočíselní dělitelé jsou z množiny $\{2, 3, 5\}$. Dokaž, že můžeme vybrat 4 z našich čísel, jejichž součin je čtvrtou mocninou přirozeného čísla. (Řecko 1996)

Úloha 22. Rozhodni, zda existuje nekonečná množina celých čísel S taková, že každé celé číslo lze jednoznačně vyjádřit jako $a + 2b$ pro $a, b \in S$. (USA 1996)

Úloha 23. Je dáno 2000 čísel se součtem 1, z nichž každé má absolutní hodnotu nejvýše 1000. Dokaž, že z nich můžeme vybrat několik s nulovým součtem.
(Kanada 2000)

Úloha 24. Nechť $n \geq 6$ je přirozené číslo a všechna čísla, která jsou menší než n a jsou s ním nesoudělná, tvoří aritmetickou posloupnost. Dokaž, že n je prvočíslo nebo mocnina dvou. (IMO 1991/2)

Úloha 25. Jsou dány posloupnosti přirozených čísel $0 < x_1 \leq \cdots \leq x_{19} \leq 93$ a $0 < y_1 \leq \cdots \leq y_{93} \leq 19$. Dokaž, že nějaká neprázdná, ne nutně souvislá podposloupnost x má stejný součet jako nějaká podposloupnost y. (Putnam 1993)

Úloha 26. Přirozená čísla jsou rozdělena do konečně mnoha (aspoň dvou) disjunktních aritmetických posloupností. Dokaž, že nějaké dvě z těchto posloupností musí mít stejnou diferenci.

Úloha 27. Mějme posloupnost $2n - 1$ přirozených čísel. Dokaž, že některá její n-prvková podposloupnost má součet dělitelný n. (Erdős–Ginzburg–Ziv)

Úloha 28. Nechť $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$. Najdi nejmenší n takové, že každá n-prvková podmnožina S obsahuje 5 po dvou nesoudělných čísel. (IMO 1991/3)

Něco těžšího na závěr

Úloha 29. Dokaž, že existuje množina přirozených čísel A s následující vlastností: Pro každou nekonečnou množinu prvočísel S platí, že existují čísla $m \in A$, $n \notin A$, která jsou součinem k různých prvočísel z S. (IMO 1994/6)

Úloha 30. Nechť p je liché prvočíslo. Kolik p-prvkových podmnožin $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ má součet dělitelný p? (IMO 1995/6)

Úloha 31. Nechť $f(n)$ značí počet rozkladů čísla n na součet mocnin 2. Dokaž $2^{\frac{n^2}{4}} \leq f(2^n) \leq 2^{\frac{n^2}{2}}$. (IMO 1997/6)

Literatura a zdroje

[1] Gabriel Carroll: *Combinatorial Number Theory (Teacher's Edition)*
[2] Reid Barton: *Combinatorial Number Theory*, MOP 2003
[3] Ricky Liu: *Combinatorial Number Theory*, MOP 2011

Hinty

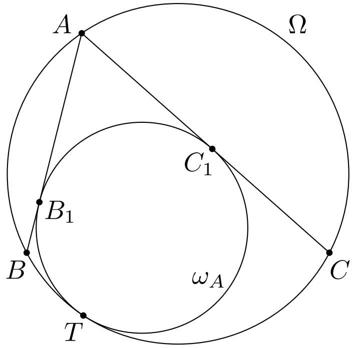
Hint 1. Uvaž sousední dvojice.
Hint 2. Rozděl čísla podle největšího lichého dělitele.
Hint 3. Uvaž prefixové součty.
Hint 4. Dvojic F_i, F_{i+1} mod n je jenom konečně mnoho.
Hint 5. Kolik je celkem neprázdných podmnožin? Najdi libovolné dvě se stejným součtem.
Hint 6. Pro každou množinu uvaž číslo, které v ní má jenom konečně mnoho násobků.
Hint 7. Ano, existuje.
Hint 8. Předpokládej, že tvrzení neplatí a najdi nějakou posloupnost podmnožin S se zmenšujícím se NSD.
Hint 9. Ano, existuje. Na sudé pozice můžeme pokaždé umístit nejmenší chybějící číslo.
Hint 10. Ukaž, že $A_i \cup \cdots \cup A_n$ obsahuje libovolně dlouhou souvislou posloupnost po sobě jdoucích čísel.
Hint 11. Když je číslo sudé, vyděl ho dvěma, jinak odečti mocninu 3.
Hint 12. Když jsou to samé jedničky, je to jasné, jinak odeber největší číslo.
Hint 13. Čísla šikovně posuň a přidej nulu.
Hint 14. Postupně přidávej čísla do B, kolik jich bude v každém kroku zakázaných?
Hint 15. Postupně přidávej čísla do B, je možné každým z nich zabrat $\frac{1}{2}N$ zbytků?
Hint 16. Zkus čísla setřídit a najít rostoucí posloupnost součtů.
Hint 17. Rozděl do dvojic, ukaž, že tam musí být 50. Není zbytek jednoznačně určen?
Hint 18. Vyber to nedělitelné 2, 3, 5 ani 7.
Hint 19. Podívej se na prvočísla.
Hint 20. Buď najdi konstrukci pomocí faktoriálů, nebo použij asymptotické odhady.
Hint 21. Stačí nám jich i 25 (vlastně nevím, proč je jich v zadání 81). Nejprve najdeme 9 dvojic, jejichž součiny jsou čtverce, pak použijeme stejnou myšlenku znovu.
Hint 22. Ano, existuje. Induktivně vytvářej množinu a vždy přidej a a b tak, aby nevznikly duplicity a šlo z nich vytvořit nejmenší dosud chybějící číslo.
Hint 23. Seřaď čísla tak, aby měly prefixové součty omezené hodnoty, a použij Dirichleta.
Hint 24. Pro liché n uvaž 1 a 2. Která čísla je potřeba uvážit pro $n \equiv 2$ a 0 mod 4?
Hint 25. Myslíš, že to funguje jenom pro 19 a 93? Uvaž prefixové součty a pro každý prefix první posloupnosti najdi nejkratší prefix té druhé s aspoň tak velkým součtem.
Hint 26. Uvaž nsn diferencí a představ si to jako mnohoúhelník. Můžou se ti hodit odmocniny z jedničky.
Hint 27. Stačí to dokázat pro prvočísla. Potom indukcí dokaž následující lemma: když $(2i-1)$-prvková posloupnost neobsahuje i stejných čísel, pak její i-prvkové podposloupnosti dávají aspoň i různých součtů mod p.
Hint 28. 216 nestačí, uvaž násobky 2, 3, 5 a 7. Pak najdi 6 hezkých množin, ve kterých je každých 5 čísel po dvou nesoudělných.
Hint 29. Funguje množina všech čísel, která jsou součinem n různých prvočísel větších než n-té nejmenší prvočíslo pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.
Hint 30. Vyjde to $2 + \left(\binom{2p}{p} - 2\right)/p$. Uvaž množinu jinou než $\{1, 2, \ldots, p\}$ a $\{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$. Podívej se na její průnik s $\{1, 2, \ldots, p\}$ a zkus ho rotovat.
Hint 31. Dokaž rekurence $f(2n+1) = f(2n)$, $f(2n) = f(2n-2) + f(n)$. Pak počítej.

Mixtilinear incircles

Radek Olšák

Abstrakt. Podíváme se na jednu konkrétní geometrickou konstrukci a pokusíme se z ní vytěžit co nejvíce zajímavých pozorování.

Definice (Základní konfigurace)**.** Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou Ω. Kružnice, která se dotýká stran AB, AC v B_1, C_1 a kružnice opsané v bodě T, se nazývá A-*mixtilinear incircle* trojúhelníka ABC. My ji budeme značit ω_A.



Vlastnosti v konfiguraci

Tyto úlohy využívají značení základní konfigurace a postupně ho rozšiřují, tedy definice bodů může být v předchozích úlohách. Úlohy jsou řazeny tak, aby se k vyřešení dané úlohy mohlo hodit tvrzení předchozích úloh, tedy ne nutně podle obtížnosti. Na konci příspěvku je seznam úloh, u kterých moje řešení vyžadují umět inverzi, respektive umět projektivní geometrii.

Úloha 1. Označme M_A, M_B a M_C postupně středy oblouků BC, AC a AB kružnice Ω. Dokažte, že T, B_1, M_C leží na přímce. Analogicky T, C_1, M_B leží na přímce.

Úloha 2. Označme střed kružnice vepsané ABC jako I. Pak I je střed B_1, C_1.

Úloha 3. $|\sphericalangle ATM_C| = |\sphericalangle ITM_B|$.

Úloha 4. Označme M_A^* střed oblouku BC kružnice ABC obsahující bod A. Čtyřúhelníky $CM_CM_A^*M_B$, $BM_CM_A^*M_B$ a $AM_CM_BM_A^*$ jsou potom rovnoramenné lichoběžníky.

Úloha 5. Přímka TI prochází *bodem nahoře* na ω_A.

Úloha 6. Označme E bod dotyku A-připsané kružnice v ABC se stranou BC. Pak $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle EAC|$.

Úloha 7. Označme D bod dotyku vepsané kružnice se stranou BC. Potom platí $|\sphericalangle ATB| = |\sphericalangle CTD|$.

Úloha 8. Čtyřúhelníky BB_1IT a CC_1IT jsou tětivové.

Úloha 9. Přímky BI a CM_B jsou tečny ke kružnici opsané CC_1IT. Analogicky CI a BM_C jsou tečny k opsané BB_1IT.

Úloha 10 (projektivní bonus)**.** Čtyřúhelníky BB_1IT a CC_1IT jsou harmonické.

Úloha 11 (projektivní bonus)**.** Čtyřúhelník AM_BTM_C je harmonický.

Úloha 12. Bod T je střed spirální podobnosti zobrazující BI na IC.

Úloha 13. Překlopme I podle T na I', pak I' leží na kružnici opsané BIC.

Úloha 14. Průsečík přímek AI a BC leží na kružnici opsané DTM_A.

Úloha 15 (zobecnění předchozí úlohy)**.** Mějme bod X na Ω. Průsečík přímek AX a BC leží na kružnici opsané XTD.

Úloha 16. Mějme bod X na Ω. Tečny k vepsané z X protnou BC v X_1, X_2, dokaž, že X_1, X_2, X, T leží na jedné kružnici.

Úloha 17. Přímky BC, TM_A a B_1C_1 se protínají v jednom bodě.

Úloha 18. Přímky TM_A a AD se protínají na ω_A.

Víc mixtilineárních kružnic zároveň.

Označme ω_A, ω_B, ω_C postupně mixtilinear incircles pro body A, B, C.

Úloha 19. Označme I střed kružnice vepsané a D bod dotyku vepsané s BC. Dále nechť je M_A střed oblouku BC na kružnici opsané. Střed ID označíme N. Dokaž, že NM_A je chordála ω_A a ω_B.

Úloha 20. Označme A_1, A_2 body dotyku ω_B a ω_C s BC. Dále je T_A bod dotyku ω_A s opsanou a M_A střed oblouku BC. Dokaž, že $M_AA_1A_2T_A$ leží na kružnici.

Úloha 21. Označme T_A, T_B, T_C body dotyku mixtilineárních kružnic s kružnicí opsanou a M_A střed oblouku BC a I střed vepsané. Pak přímky T_CT_B, BC, T_AM a kolmice na AI v Iprochází jedním bodem.

Úloha 22. Označme S potenční střed ω_A, ω_B a ω_C a I střed vepsané a O opsané. Pak S leží na OI a to tak, že $OS : SI = -2R : r$, kde R je poloměr opsané a r poloměr vepsané.

Úlohy „bez“ mixtilineárních kružnic

Úloha 23. Označme M střed oblouku BC kružnice opsané obsahujícího bod A. Označme I střed kružnice vepsané. Druhý průsečík AI a BC je L a druhý průsečík MI a kružnice opsané je K. Kružnice opsaná KLA protne podruhé BC v P. Dokaž, že $PI \perp AM$. (Peru TST 2015)

Úloha 24. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníka ABC. Označme A_1 průsečík kolmice na AI v I a BC. Dále budiž B_1 průsečík kolmice na BI v I a CA, obdobně budiž C_1 průsečík kolmice na CI v I a AB. Pak A_1, B_1, C_1 leží na přímce.

Úloha 25. Mějme trojúhelník ABC se středem kružnice vepsané I. Středy oblouků BC, CA a AB na kružnici opsané nechť jsou postupně M_A, M_B, M_C. Označme body $X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$ takové, že $XI \perp AI$, $YI \perp BI$ a $ZI \perp CI$. Dokaž, že kolmice na XM_A skrz M_A, kolmice na YM_B skrz M_B a kolmice na ZM_C skrz M_C prochází jedním bodem.

Úloha 26. Mějme trojúhelník ABC s vepsištěm I. Označme M střed BC a M' střed oblouku BC obsahujícího A. Označme A' průsečík $M'I \cap BC$ a K průsečík $MI \cap M'A$. Dokaž, že $|\sphericalangle AKA'| = 90°$.

Úloha 27. Označme D bod dotyku A-připsané s BC, E bod dotyku B-připsané s CA a F bod dotyku C-připsané s AB. Dokaž, že průsečík AD, BE, CF je kamarád středu stejnolehlosti zobrazující vepsanou na připsanou.

Úloha 28. Mějme ABC se středem vepsané I. Vepsaná se dotýká BC v D. Označme D' bod naproti D na vepsané. Tečna k vepsané v D protne kružnici opsanou v X, Y. Druhé tečny k vepsané skrz X a Y se protnou v Z. Dokaž, že kružnice opsaná BDZ prochází středem BI.

Úloha 29. Mějme trojúhelník ABC. Na oblouku AB leží bod X. Označme O_1, O_2 středy kružnic vepsaných $\triangle XCA$ a $\triangle XCB$. Dokaž, že kružnice opsaná XO_2O_1 prochází pevným bodem nezávislým na X. (IMO 1999 SL, G8)

Úloha 30. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s kružnicí opsanou Ω. Kružnice vepsaná se dotýká BC v D. Osa úhlu $\sphericalangle BAC$ protne BC v E a Ω v T. Označme druhý průsečík kružnice opsané DEF s kružnicí opsanou jako T. Dokaž, že kružnice opsaná ABC, kružnice A-připsaná a přímka AT prochází jedním bodem.
(USA TST 2016, P2)

Úloha 31. Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou Ω a středem vepsané I. Přímka kolmá na CI skrz I protne BC a oblouk BC opsané postupně v U, V. Rovnoběžka skrz U s AI protne AV v X. Rovnoběžka s AI skrz V protne AB v Y. Označme W, Z středy AX a BC. Předpokládejme, že I, X, Y leží na jedné přímce. Dokaž, že I, W, Z leží na jedné přímce. (IMO 2014 SL, G7)

Invertivní řešení: 6, 30.
Projektivní řešení: 2, 10, 11, 16, 17, 29.

Literatura a zdroje

[1] https://web.evanchen.cc/handouts/Mixt-GeoGuessr/Mixt-GeoGuessr.pdf
[2] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1754889p11453049

Hinty

Hint 1. Stejnolehlost, B_1 je „bod dole“.
Hint 2. Pascal to zpackal.
Hint 3. Těžnice a symediána.
Hint 4. Využij úhly z předchozích úloh.
Hint 5. Najdi velikost úhlu $\sphericalangle M_A T I$.
Hint 6. $\sqrt{bc}$-inverze.
Hint 7. Překlop T podle osy BC.
Hint 8. Zakresli si úhly, co už z předchozích úloh znáš, a úhli.
Hint 9. Zakresli si úhly, co už z předchozích úloh znáš, a úhli. Ke druhé tečně využij vlastnosti Švrčkova bodu.
Hint 10. Přímo z předchozí úlohy.
Hint 11. Promítej svazky pomocí předchozí úlohy.
Hint 12. Podobné trojúhelníky už máme přímo ze známých úhlů.
Hint 13. Střed symediány je střed spirálky.
Hint 14. Využij $|\sphericalangle ATB| = |\sphericalangle CTD|$.
Hint 15. Stejné úhlení jako v předchozí úloze.
Hint 16. Desarguesova involuce.
Hint 17. Packáme Pascalem.
Hint 18. Najdi šikovné stejnolehlosti.
Hint 19. Dokresli správné známé kružnice a využij, že k nim znáš tečny skrz M. Bod N je potenční střed ω_B, ω_C a vepsané.
Hint 20. Dokresli průsečík MT_A a BC.
Hint 21. Všechny tyhle přímky už známe.
Hint 22. Přistejnolehli trojúhelník z dotyků vepsané koeficientem $\frac{1}{2}$ k I.
Hint 23. K je A-mixtilinear touchpoint. Prohlédni si znovu, co všechno o něm víme.
Hint 24. Zadané body jsou středy stejnolehlostí mixtilineárních kružnic. Monge zbytek vyřeší.
Hint 25. Překlop vepsiště podle opsiště.
Hint 26. Dokresli A-mixtilinear touchpoint. Přenášej úhel $KM'A'$.
Hint 27. Isogonála k AD je AT_A.
Hint 28. Z je A-mixtilinear touchpoint. $\triangle IDB$ je pravoúhlý.
Hint 29. Je to T_C. Dokresli švrky a použij poměry v harmonickém čtyřúhelníku.
Hint 30. $\sqrt{bc}$-invertuj. Překlop si body podle AF.
Hint 31. Dokresli U' jako druhý průsečík UX a AB. Pak $U'IUB$ je tětivový a X je střed UU'.

Obsah