Soustředění i**KS**

X

Hostětín 31.8.–5.9. 2012

Editor Jakub Opršal

Vysázeno systémem mksTEX
Praha 2012

Od Dirichleta k pravděpodobnosti

Mirek Olšák

Abstrakt. Příspěvek ukazuje typy příkladů na Dirichletův princip a od nich pak navazuje na takové, kde pomůže představa pravděpodobnosti. Na konci najdete návody k úlohám a očíslovaným tvrzením.

Dirichletův princip

Tvrzení. (Dirichletův princip) *Nechť k, n jsou přirozená čísla. Pak, kdykoli umístíte $kn+1$ objektů do n přihrádek, tak alespoň v jedné přihrádce bude alespoň $k+1$ těchto objektů.*

Toto tvrzení není slavné svou objevností, ale širokou použitelností.

Úloha 1. Dokažte, že kdykoli umístíme na šachovnici $n+1$ šachových věží, můžeme z nich vybrat 5 věží, které se vzájemně neohrožují. (PraSe 00/01, 3. série)

Úloha 2. Je dána 52-prvková množina přirozených čísel. Dokažte, že v ní najdeme dvě čísla, jejichž rozdíl nebo součet je dělitelný 100.

Úloha 3. V prostoru je dáno 9 mřížových bodů. Dokažte, že uvnitř některé úsečky dané těmito body leží další mřížový bod (ne nutně jeden z devíti daných).

Úloha 4. Buď n přirozené číslo a M množina některých vrcholů daného pravidelného n-úhelníku. Dokažte, že pokud $|M| \geq \lfloor\sqrt{2n+1/4}+3/2\rfloor$, tak z M můžeme vybrat čtyři body tvořící vrcholy lichoběžníka.

Úloha 5. Je daná 20-prvková množina přirozených čísel menších než 70. Dokažte, že mezi všemi rozdíly tvořenými dvojicemi z této množiny se některé číslo vyskytne čtyřikrát.

Klíčová slova. kombinatorika, nekonstruktivní důkazy, Dirichletův princip, pravděpodobnost

Úloha 6. Rostoucí posloupnost přirozených čísel $(a_n)_1^\infty$ splňuje pro všechna přirozená čísla n nerovnost $a_{n+1} - a_n \leq 2012$. Dokažte, že je možné najít dva různé její prvky a_i, a_j, taková že $a_i \mid a_j$

Velká čísla

Úloha 7. Dokažte, že je možné najít 10000 deseticiferných násobků sedmi lišících se jen pořadím číslic. (Československé střetnutí 1995)

Úloha 8. Dokažte, že rovnice $\lfloor x^{3/2} \rfloor + \lfloor y^{3/2} \rfloor = a$ má pro nekonečně mnoho hodnot a alespoň 2012 řešení v přirozených číslech. (Rusko 1980)

Úloha 9. Dokažte, že existuje číslo, které je možné napsat alespoň 100 způsoby jako součet 2012-ti 2011-tých mocnin. Zápisy lišící se jen pořadím sčítanců považujeme za stejné. (Prase 11/12, myšmaš)

Odčítací trik

Často není použití Dirichletova principu finálním krokem, ale pouze prostředním. Po nalezení dvou stejných hodnot často bývá třeba od sebe tyto dva výsledky odečíst pro získání požadovaného objektu.

Příklad. Přirozené číslo n je nesoudělné s desítkou. Dokažte, že existuje násobek n, jehož zápis (v desítkové soustavě) je složený ze samých jedniček.

Řešení. Uvažujme $n+1$ čísel tvaru $1, 11, 111, \ldots$ Dle Dirichletova principu najdeme dvě taková čísla, které dávají stejný zbytek po dělení n. Jejich odečtením získáme násobek n, který začíná samými jedničkami a pokračuje samými nulami. Jinými slovy je to číslo tvaru $k \cdot 10^l$, kde k je číslo tvořené samými jedničkami a l je přirozené. Pak díky tomu, že n je nesoudělné s desítkou máme že i k je násobek n.

Úloha 10. Je daná n-prvková množina přirozených čísel. Dokažte, že některá její neprázdná podmnožina má součet prvků dělitelný n.

Úloha 11. Je dána množina deseti dvojciferných čísel. Dokažte, že můžem najít dvě její disjunktní podmnožiny se stejným součtem prvků. (IMO 1972)

Úloha 12. Dokažte, že libovolnému dostatečně velkému[1] číslu neobsahujícímu v ciferném zápisu nulu můžeme odebrat některé cifry ze začátku a z konce a získat tak nenulový násobek čísla 2011. (Kanadská MO 2011)

Úloha 13. Dokažte, že z šestnácticiferného čísla můžeme vybrat několik po sobě jdoucích cifer, jejichž součin je druhou mocninou přirozeného čísla. (PraSe 08/09, 5. série)

Úloha 14. Do tabulky $n \times 2^n$ jsou do řádků napsány všechny n-tice čísel $1, -1$. Po té jsou některá políčka nahrazena nulami. Dokažte, že je možné zvolit neprázdnou

[1] Tento obrat znamená, že můžeme najít n takové, že tvrzení platí pro všechna čísla větší než n.

množinu řádků, která v součtu (sčítá se po složkách) dává nulový řádek.

(Turnaj měst 1996)

Úloha 15. Je dáno přirozené číslo n. Předpokládejme, že existuje celé číslo s takové, že $n \mid s^2 + 1$. Dokažte, že pak je možné n napsat jako součet druhých mocnin celých čísel.

Úloha 16. Šachista trénuje 77 dní, každý den alespoň jednou, celkem nejvýše 132-krát. Dokažte, že několik dní po sobě trénoval v součtu přesně 21-krát.

Částečná uspořádání

Definice. (Částečné uspořádání) Relace $\leq$ na množině M se nazývá částečné uspořádání, pokud pro libovolné prvky x, y, z množiny M platí:

(1) $x \leq x$. (reflexifita)
(2) Pokud $x \leq y$ a současně $y \leq x$, pak už nutně musí $x = y$. (slabá antisymetrie)
(3) Pokud $x \leq y$ a současně $y \leq z$, pak platí $x \leq z$. (tranzitivita)

Příkladem částečných uspořádání může být dělitelnost na přirozených číslech (definujeme, $a \leq b$ jako a dělí b) nebo inkluze na množině všech podmnožin dané množiny (definujeme, $a \leq b$ jako a je podmnožina b).

Definice. (Porovnatelnost) Definice částečného uspořádání nevyžaduje, aby ze dvou různých prvků byl nutně některý větší. Řekneme tedy, že dva různé prvky x, y množiny M jsou *porovnatelné*, pokud $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V opačném případě jsou *neporovnatelné*.

Definice. (Řetězec, antiřetězec) Podmnožinu X částečně uspořádané množiny nazveme *řetězcem*, pokud každé dva prvky množiny X jsou porovnatelné. Pokud jsou naopak všechny dvojice prvků množiny X neporovnatelné, nazýváme ji *antiřetězcem*.

Úloha po nás může chtít dokázat, že kdykoli vybereme k prvků ze zadané uspořádané množiny M, tak některé dva z nich jsou porovnatelné. To může být dokázáno tak, že pokryjeme celou M pomocí $k-1$ řetězců, dle Dirichletova principu pak musí dva prvky spadnout do jednoho řetězce. Následující tvrzení říká, že takový postup dává nejlepší odhad.

Tvrzení 17. (Dilworthova věta) *Buď k počet prvků největšího antiřetězce v M. Pak je možné pokrýt množinu M pomocí k řetězců.*

Úloha 18. Dokažte, že mezi $n + 1$ čísly z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ najdete taková dvě různá čísla, že jedno dělí druhé.

Úloha 19. Je dáno 1001 obdélníků s celočíselnými délkami stran nepřesahujícími 1000. Dokažte, že je možné najít 3 obdélníky, které se do sebe vejdou (jeden do druhého, druhý do třetího). Obdélníky je možné otáčet, stejně velké obdélníky se do sebe vejdou.

Úloha 20. 49 studentů řešilo test skládající se ze sedmi úloh. Za každou úlohu bylo možné získat 0 až 7 bodů. Dokažte, že existují dva studenti takoví, že první získal z každé úlohy aspoň tolik bodů, co druhý.

A na závěr můžem z Dilworthovy věty odvodit ještě jedno známé tvrzení.

Tvrzení 21. (Erdös, Szekeres) *Jsou dána přirozená čísla a, b. Z každé prosté (neopakující-se) posloupnosti délky $ab+1$ je pak možné vybrat rostoucí délky $a+1$ nebo klesající délky $b+1$.*

Dělení oblasti

Další typický výskyt Dirichletova principu je v úlohách typu „Je hodně bodů na malém prostoru, dokažte, že nejsou od sebe příliš daleko.“ Takové úlohy bývají řešitelné rozdělením oblasti na části tak, aby v každé části si byly body blízko.

Příklad. V kruhu o poloměru 1 je 7 bodů. Dokažte, že vzdálenost některých dvou z nich je 1 nebo méně.

Řešení. Rozdělíme kruh na šestiny (jako koláč). Dle Dirichletova principu musí být v některé části dva body. Vzdálenost těchto dvou bodů pak musí být menší rovna jedné.

Úloha 22. Na okraji čtverce o straně délky 1 je 5 bodů. Dokažte, že vzdálenost některých dvou je menší než $\sqrt{2}$.

Úloha 23. Na stole 1×1m leze 51 much. Dokažte, že pomocí kruhového hrnce s poloměrem $\frac{1}{7}$m můžeme chytit 3 mouchy najednou.

Úloha 24. New York je kromě jiného znám i pravidelností svých ulic – má 151 severojižních a 151 východozápadních ulic, které se vždy po 100 metrech kříží. V městě je na ulicích celkem rozmístěných 11401 telefonních automatů. Dokážeme najít dva automaty, které jsou vzdálené maximálně 200 metrů chůze po chodníku?

Úloha 25. V rovině je $2n+1$ bodů rozmístěno tak, že žádný trojúhelník s vrcholy v těchto bodech nemá všechny strany větší než 1. Dokažte, že $n+1$ z těchto bodů je možné pokrýt kruhem o poloměru 1.

Úloha 26. V kruhu o poloměru 1 je šest bodů. Dokažte, že některé dva jsou vzdáleny maximálně 1.

Úloha 27. Dokažte, že kdykoli rozdělíme kruh na 5 částí, v některé budou dva body vzdálené víc jak jedna.

Úloha 28. Kruhový terč o poloměru 12cm zasáho 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7cm. (Celostátní kolo MO 2009/2010)

Pravděpodobnostní metoda

Podívejme se na následující příklad řešitelný Dirichletovým principem:

Příklad. V jazykové škole se vyučuje $2n$ jazyků. Každý z 500 místních učitelů umí mluvit alespoň n jazyky. Dokažte, že najdeme 14 nebo méně jazyků, tak, aby každý učitel mluvil alespoň jedním z nich.

Řešení. Nakresleme si tabulku o $2n$ sloupcích (jazyky) a 500 řádcích (učitelé). Vybarvěme políčko tabulky právě když příslušný učitel zná daný jazyk. Takto vybarvíme alespoň $500n$ z celkových $1000n$ řádků tabulky a proto (z Dirichletova principu) najdeme jazyk, kterým mluví alespoň 250 učitelů. Zvolme tedy tento jazyk jako první z našich 14 a pokračujme, zbývá nám už jen 250 nepokrytých učitelů a 13 jazyků, co můžem volit. Stejným argumentem můžeme toto zredukovat na 125 učitelů a 12 jazyků, 62 učitelů a 11 jazyků, 31 učitelů a 10 jazyků, 15 učitelů a 9 jazyků až konečně 7 učitelů a 8 jazyků. Jelikož nám zbylo více jazyků než učitelů, stačí každému zbývajícímu učiteli přiřadit jeden zbývající jazyk a úloha je vyřešena.

Vidíme, že toto řešení je trochu pracné, vícenásobné používání Dirichletova principu, postupné dělení dvěma. Na stejnou úlohu se podíváme pravděpodobnostní metodou. Nejprve zavedeme základní pravděpodobnostní terminologii:

Definice. Elementárním jevem nazýváme kompletní situaci, která nastala po náhodném procesu, tedy například „Na první kostce padla trojka, na druhé dvojka a na třetí trojka.“ Jevem pak nazýváme nějakou vlastnost takové situace, například „Na první kostce padlo sudé číslo.“ Pravděpodobnost, že jev A nastal značíme $P(A)$. Jev „Nastal jev A a současně nastal jev B“ značíme $A \cap B$. Jev „Nastal jev A a nebo nastal jev B“ značíme $A \cup B$. Nezávislé jevy jsou takové, pro které $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Připomeňme (uvědomme) si ještě jedno tvrzení o pravděpodobnosti, které se v pravděpodobnostní metodě vyskytne často:

Tvrzení. *Nechť A, B jsou dva jevy (ne nutně nezávislé). Pak*

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

A nyní přistupme opět k řešení úlohy.

Řešení. Zvolme si náhodnou 14-tici jazyků (uspořádanou, jazyky se můžou opakovat) a pevného učitele. Pravděpodobnost, že tento učitel nezná první jazyk je nejvýše $\frac{1}{2}$, stejně tak u druhého jazyku, ... Celkem je tedy pravděpodobnost, že tento učitel nezná ani jeden z 14 jazyků rovna nejvýše 2^{-14}. Za pomoci tvrzení výše získáváme, že pravděpodobnost, že alespoň jeden učitel nezná ani jeden z těchto 14-ti jazyků je nejvýše $500 \cdot 2^{-14}$. Tedy pravděpodobnost, že všichni učitelé znají alespoň jeden z těchto 14 jazyků je $1 - 500 \cdot 2^{-14} > 0$. A nyní přichází klíčová myšlenka pravděpodobnostní metody: Má-li jev nenulovou pravděpodobnost, tak může nastat. Tedy opravdu existuje 14-tice jazyků, že každý učitel mluví alespoň jedním z nich.

Pokud byste z nějakých důvodů nechtěli použít pravděpodobnostní terminologii, můžete pravděpodobnostní řešení přeformulovat na počítání dvěma způsoby:

Řešení. Uvažujme všechny 14-tice jazyků (je jich celkem $(2n)^{14}$). Budem počítat, kolik jich je nevyhovujících. 14-tice jazyků je nevyhovující pro daného učitele, pokud tento učitel nezná ani jeden z nich. Pro jednoho učitele je nevyhovujících čtrnáctic nejvýše n^{14}. Celkem pro všech 500 učitelů je tedy nevyhovujících 14-tic nejvýše $500n^{14}$. To je méně než počet všech 14-tic, proto existuje některá vyhovující.

Úloha 29. Jsou dána nesoudělná přirozená čísla m, n. Jaký je počet cest po mřížce v obdélníku $m \times n$ z levého dolního rohu do pravého horního, které vedou jen doprava a nahoru a jsou celé pod úhlopříčkou? (Prase 06/07, 5. série)

Úloha 30. Buď X taková množina konečných posloupností nul a jedniček, že žádná posloupnost z X není začátkem další posloupnosti z X. Pro $p \in X$ označme $|p|$ délku posloupnosti. Dokažte

$$\sum_{p \in X} \frac{1}{2^{|p|}} \leq 1.$$

Úloha 31. (Spernerova věta) Buď F antiřetězec na množině všech podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ uspořádané inkluzí. Dokažte

(1) $\displaystyle\sum_{S \in F} \frac{1}{\binom{n}{|S|}} \leq 1,$

(2) $F \leq \dbinom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$

Úloha 32. Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupince aspoň jednoho kamaráda. (Celostátní kolo MO 2011/2012)

Úloha 33. 200 studentů se účastnilo matematické soutěže. V té každý řešil 6 úloh. Je známo, že každou úlohu správně vyřešilo alespoň 120 studentů. Dokažte, že můžeme najít dva studenty, kteří dohromady vyřešili všechny úlohy. (IMC 2002)

Úloha 34. Mějme 2^{d-1} d-prvkových množin, $d \geq 2$. Dokažte, že je možné obarvit prvky množin dvěma barvami tak, aby každá množina obsahovala prvky obou barev.

Úloha 35. Ukažte, že je možné obarvit prvky množiny $\{1, 2, \dots, 1987\}$ čtyřmi barvami tak, aby nešlo najít jednobarevnou desetiprvkovou aritmetickou posloupnost. (IMO Shortlist 1987)

Úloha 36. Dokažte, že hrany úplného grafu na méně než $2^{\frac{k}{2}}$ vrcholech je možné obarvit dvěma barvami tak, aby v něm nebyl žádný úplný jednobarevný podgraf na k vrcholech.

Úloha 37. V rovině je dáno 100 bodů v obecné poloze. Dokažte, že počet ostroúhlých trojúhelníků nepřevyšuje 70% počtu všech trojúhelníků. (IMO 1970)

Úloha 38. V turnaji n hráčů hrál každý s každým právě jednou. Turnaj nazveme k-neseřaditelný, pokud pro každou k-prvkovou množinu hráčů najdeme dalšího hráče, který porazil všechny hráče z této množiny. Dokažte, že pro každé k najdeme $n > k$ takové, že turnaj n hráčů může být k-neseřaditelný.

Úloha 39. Řekneme, že permutace $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ na množině $\{1, 2, \dots, 2n\}$ má vlastnost V, pokud pro některé $i \in \{1, 2, \dots 2n-1\}$ platí $|x_{i+1} - x_i| = n$. Dokažte, že pro každé n je více permutací s vlastností V než bez ní. (IMO 1989)

Střední hodnota

Definice. Náhodná veličina je reálné číslo, které spočteme na základě elementárního jevu, tedy například „číslo, které padlo na první kostce“ nebo „počet kostek, na kterých padla trojka“.

Definice. Střední hodnota náhodné veličiny X je její „průměrná hodnota“ a značí se $E(X)$. Přesněji je $E(X)$ vážený aritmetický průměr přes všechny hodnoty X na elementárních jevech, kde váhy jsou pravděpodobnosti těchto jevů.

Tvrzení. (počítání střední hodnoty)

(1) *Buď A jev a I_A náhodná veličina, která dává nulu resp. jedničku, pokud A nastal resp. nenastal. Pak $E(I_A) = P(A)$.*
(2) *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, pak $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*
(3) *Nechť X je náhodná veličina a r reálné číslo $E(r \cdot X) = r \cdot E(X)$*

Pozor! Další zobecnění tohoto tvrzení jako například $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ již obecně neplatí.

Tvrzení. (použití střední hodnoty) *Buď X náhodná veličina. Pak existuje elementární jev, na kterém $X \geq E(X)$ a také jiný elementární jev, na kterém $X \leq E(X)$.*

Úloha 40. Je dáno n reálných čísel takových, že jejich součet je nula, ale nejsou všechna nulová. Dokažte, že je možné je očíslovat $a_1, \dots, a_n$ tak, aby

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 < 0.$$

(BAMO 2004)

Úloha 41. Je dána náhodná permutace $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Buď $k \leq n$ největší takové přirozené číslo, že $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ tvoří rostoucí posloupnost. Vyjádřete co nejjednodušeji $E(k)$.

Úloha 42. Číslo $p_n(k)$ značí počet permutací n-prvkové množiny s právě k pevnými body. Dokažte

$$\sum_{x=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

(IMO 1987)

Úloha 43. Se značením stejným jako v předchozí úloze spočtěte

$$\sum_{x=0}^{n} kp_n(k).$$

Úloha 44. V soutěži je a soutěžících a b porotců, kde $b \geq 3$ je liché číslo. Každý porotce hodnotí každého soutěžícího buď jako „dobrý" nebo jako „špatný". Předpokládejme, že k je takové číslo, že pro libovolnou dvojici porotců se jejich hlasy shodovaly u nejvýše k soutěžících. Dokažte $k/a \geq (b-1)/(2b)$ (IMO 1987)

Úloha 45. V turnaji n hráčů hrál každý s každým právě jednou. Hamiltonovská cesta je takové uspořádání n hráčů, že první porazil druhého, druhý třetího, ... Dokažte, že turnaj mohl dopadnout tak, že existuje alespoň $n!/2^{n-1}$ Hamiltonovských cest.

Úloha 46. Na večírku je $n \geq 2$ lidí, někteří se znají, znání se je vzájemné. Dokažte, že existují dva lidé A, B takoví, že mezi zbylými $n-2$ najdeme $\lfloor n \rfloor - 1$ lidí, kteří mají stejný vztah k A jako B. (USAMO 1985)

Úloha 47. Buď S množina $n \geq 3$ bodů v prostoru. Všechny úsečky spojující tyto body mají různou délku a r z těchto úseček je obarveno červeně. Nechť m je nejmenší přirozené číslo splňující $m \geq 2r/n$. Dokažte, že lze najít navazující cestu z m červených úseček, jejichž délky jsou seřazeny vzestupně. (IMO Shortlist 1986)

Úloha 48. Pravidelnému 432-úhelníku bylo 108 vrcholů obarveno červeně, 108 zeleně, 108 modře a zbylých 108 žlutě. Dokažte, že je možné najít 4 shodné trojúhelníky takové, že vrcholy jednoho jsou všechny červené, druhého žluté, třetího modré a čtvrtého zelené. (USAMO 2012)

Úloha 49. Řekneme, že množina je bezsoučtová, pokud pro libovolné dva její prvky (mohou být stejné) jejich součet neleží v této množině. Buď A libovolná n-prvková množina nenulových celých čísel. Ukažte, že existuje alespoň $n/3$-prvková bezsoučtová podmnožina množiny A.

Spojitá pravděpodobnost

Doposud jsme pracovali s diskrétní pravděpodobností, tedy takovou, která má pouze konečně mnoho elementárních jevů s nenulovou pravděpodobností. Naproti tomu spojitá pravděpodobnost spočívá v náhodném výběru reálného čísla z intervalu či bodu z nějaké oblasti. Elementárních jevů tak je nekonečně mnoho a všechny mají nulovou pravděpodobnost.

Pravděpodobnost jevu se spočte jako poměr obsahu jevu ku obsahu celého prostoru. Počítání obsahů je mimo jiné další přístup k úlohám typu „Máme hodně bodů na malém prostoru, dokažte, že nejsou moc daleko.“

Úloha 50. Bílé sféře jsme přebarvili 12% obsahu na černo. Dokažte, že je stále možné na ní najít 8 bílých vrcholů jednoho kvádru.

Úloha 51. Dokažte, že pro každé k existuje neprázdná množina bodů v rovině taková, že každý její bod má právě k dalších bodů vzdálených přesně 1.

Úloha 52. Je dán mnohoúhelník s obsahem n. Dokažte, že je možné jej umístit do roviny tak, aby pokrýval n mřížových bodů.

Úloha 53. V obdélníku 20×25 je 650 čtverečků o straně délky 1. Dokažte, že je do něj možné umístit kruh o průměru 1, který neprotíná žádný čtvereček.
(All Russian Olympiad 1961)

Úloha 54. V jednotkovém čtverci leží několik kružnic s celkovým obvodem 10. Dokažte, že existuje přímka, která protíná alespoň 4 z těchto kružnic.

Úloha 55. Tulák má kabát o obsahu 1 a na něm 5 záplat o obsahu $\frac{1}{2}$. Dokažte, že dvě záplaty se překrývají na obsahu alespoň $\frac{1}{5}$.

Úloha 56. V kruhu o poloměru 16 je dáno 650 bodů. Dokažte, že je možné najít mezikruží o vnitřním poloměru 2 a vnějším 3, které pokryje alespoň 10 bodů.

Volíme si pravděpodobnost

Ne vždy musí být $\frac{1}{2}$ optimální hodnota pro pravděpodobnost. V následujících úlohách bude výhodné si stanovit pravděpodobnost jako nějaké p, až po výpočtu si pak rozmyslet, které p řeší úlohu.

Úloha 57. Mějme graf s n vrcholy a $\frac{nd}{2}$ hranami, $d \geq 1$. Dokažte, že je možné v něm najít množinu vrcholů velikosti $\frac{n}{2d}$ takovou, že žádné dva vrcholy z této množiny nejsou spojeny hranou.

Úloha 58. Mějme graf G s n vrcholy a $m \geq 4n$ hranami. Dokažte, že kdykoli takový graf nakreslíme do roviny, bude obsahovat alespoň $\frac{m^3}{64n^2}$ průsečíků.

Návody

1. V alespoň jedné z osmi posunutých osmipolíčkových úhlopříček bude alespoň 5 věží.

2. Rozdělte čísla podle posledních dvou cifer a popárujte (01-99), (02-98), ...

3. Mají-li dva body stejnou paritu všech tří souřadnic, pak je jejich střed opět mřížovým bodem.

4. Úhlopříčky n-úhelníku mají pouze n různých směrů. Kolik úhlopříček je možné sestrojit z bodů z M?

5. Stačí použít 69 rozdílů sousedních čisel. Tyto rozdíly v součtu dávají nejvýše 68. Bylo by to možné, kdyby bylo každé hodnoty nabyto maximálně třikrát?

6. Kdykoli si vezmeme posloupnost 2012 po sobě jdoucích čísel, najdeme mezi nimi prvek posloupnosti. Myšlenka řešení je sestrojit rostoucí posloupnost takovýchto „pastí“, ve které se pro každé k navzájem dělí k-té prvky.

7. Kolik je deseticiferných násobků sedmi? A kolik je možností, která cifra bude kolikrát obsažena v daném čísle (bez ohledu na pořadí)?

8. Zvolme přirozené číslo n. Vezměme všechny dvojice (x, y) z množiny $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$. Kolik možných dvojic to je? A kolika různých hodnot může nabývat $floor(x^{3/2}) + floor(y^{3/2})$?

9. Volme přirozené číslo n. Kolik je 2012-tic čísel menších než n? A kolika různých hodnot mohou nabývat součty 2011-tých mocnin se základy menšími než n?

10. Očíslujme si prvky a_1, a_2, ..., a_n. Pak mezi množinami

$$\{\}, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \dots \{a_1, \dots, a_n\}$$

najdeme dvě se stejným zbytkem po dělení n.

11. Podmnožin je více než možných součtů, tedy najdeme dvě (ne nutně disjunktní) se stejným součtem. Pak zbývá od obou odečíst jejich průnik.

12. Předpokládejme, že číslo je alespoň 2013-ciferné. Pro $k = 0, 1, 2, \dots, 2011$ uvažujme číslo složené z posledních k cifer. Některá dvě taková čísla mají stejný zbytek po dělení 2013.

13. Mezi součiny prvních k cifer najdete dva takové, které se shodují paritou exponentů v prvočíselném rozkladu u prvočísel 2, 3, 5, 7.

14. Sestrojte posloupnost n-tic nul a jedniček. Začněte samými nulami a každý další definujte rekurentně z předchozí n-tice X takto: Y je n-tice, která vznikne z X nahrazením minus jedničky za jedničku a jedničky za nulu. V Y nahraďte některá políčka nulami tak, aby se jednalo o některý řádek tabulky a přičtěte ho k X. V takto definované posloupnosti najdete dva stejné prvky.

15. Z dirichletova principu najdeme dvě dvojice (x, y) nezáporných celých čísel nepřevyšující $\sqrt{n}$, se stejnou hodnotou $x - sy \pmod{n}$. Odečtením najdeme nenulovou dvojici (x, y) nezáporných celých čísel nepřevyšujících $\sqrt{n}$ takovou, že $x \equiv \pm sy \pmod{n}$. Umocněním dostáváme kýžený výsledek.

16. Označme h_i počet tréninků do i-tého dne (včetně). Mezi 154 čísly

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

najdete 2 stejná, protože nejvyšší možná hodnota je 153.

17. Odeberte nějaký takový prvek a, který nad sebou nemá žádné další prvký (je tzv. maximální). Z indukčního předpokladu pro nějaké k ve zbytku existuje k-prvkový antiřetězec a současně je tento zbytek pokrytelný k řetězci. V každém z těchto řetězců najděte největší prvek, který je prvkem nějakého k-prvkového antiřetězce. Dokažte, že tato množina je opět antiřetězcem. Pokud je nějaký prvek b tohoto antiřetězce porovnatelný s a, tak je možné vzít řetězec složen z prvku a, b a všech prvků pod b uvnitř příslušného řetězce (z pokrytí). Po odstranění takto sestrojeného řetězce v množině nenajdete k-prvkový antiřetězec a tak (indukční předpoklad) pokryjete zbytek $k - 1$ řetězci.

18. Volte řetězce ve tvaru $l \cdot 2^k$, kde l je pevné liché číslo.

19. Definujte k-tý řetězec jako množinu obdélníků, ve kterých se výška od šířky liší právě $k-1$. Takto pokryjete množinu všech obdélníků 500-ti řetězci

20. Představte si množinu všech možných bodových zisků jako krychli $8 \times 8 \times 8$. Jedno patro až na 16 bodů pokryjete čtyřmi řetězci. Toto pokrytí použijte na každé patro, zbytek krychle pokryjete 16 řetězci a máte tak $4 \times 8 + 16 = 48$ řetězců.

21. Posloupnost ze zadání označme $(x_n)_1^{ab+1}$. Tuto posloupnost můžem chápat jako množinu dvojic (x_n, n). Zvolte uspořádání, aby rostoucí podposloupnost byla řetězcem a klesající antiřetězcem. Předpokládejte, že největší antiřetězec má délku b a za použití Dilworthovy věty a Dirichletova principu odvoďte dolní odhad pro nejdelší řetězec.

22. Rozdělte okraj čtverce na 4 „rohy“. Pozor na přesné zadání množin, aby vyloučilo rovnost (v úloze je ostrá nerovnost).

23. Rozdělte na čtverečky o straně $\frac{1}{5}$m.

24. Strážník stojící na křižovatce dohlédne každým směrem 100 metrů. Rozmístěte na křižovatky šachovnicově strážníky a najděte strážníka, který vidí dva automaty.

25. Pokud žádná vzdálenost není větší než jedna, dá se celá množina pokrýt jedním kruhem. V opačném případě, jsou-li A, B body s vzdáleností větší než jedna, pak celou množinu pokryjete dvěma kruhy se středy v A, B.

26. Uvažujte stejné rozkrájení jako v příkladu a natočte si ho tak, aby některý bod ležel na hranici dvou oblastí.

27. Vezměte na okraji kruhu pět bodů, jejichž vzájemná vzdálenost je větší než 1. Natočte je tak, aby bylo možné přidat blízoučko k jednomu z nich ještě jeden ale do jiné oblasti.

28. Rozdělte kruh s poloměrem 7 na šestiny (jako v příkladu) a zbylé mezikruží rozdělte na dvanáctiny. Poznámka: otáčecím trikem z předchozích dvou úloh je opět možné zmenšit počet potřebných bodů o jedna.

29. Libovolnou cestu (nemusí být nutně celá pod úhlopříčkou) z levého dolního rohu do pravého horního rohu si na obě strany periodicky. Jaká je pravděpodobnost, že když na ní náhodně posadíte levý spodní vrchol obdélník, bude celá pod úhlopříčkou? Pro větší názornost si mřížku natočte, aby úhlopříčka vedla vodorovně.

30. Postupně náhodně generujte posloupnost (nula i jednička s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Zastavte se v okamžiku, kdy získáte posloupnost z X nebo posloupnost, která je delší než všechny z X. Jaká je pravděpodobnost, že posloupnost, na které skončíte bude v X?

31. (i) Maximální řetězec obsahuje od každé velikosti množin jednu (už proto, že je řetězcem jich nemůže obsahovat víc). Jaká je pravděpodobnost, že náhodný maximální řetězec obsahuje daný prvek F? A jaká je pravděpodobnost, že náhodný antiřetězec obsahuje nějaký prvek F? (ii) Plyne z (i) a z nerovnosti

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

32. Rozdělte děti náhodně do skupinek. Jaká je pravděpodobnost, že jedno dané dítě nemá ve své skupině žádného kamaráda? Omezte shora pravděpodobnost, že alespoň jedno dítě nemá ve své skupince žádného kamaráda.

33. Vezměte dva náhodné studenty. Jaká je pravděpodobnost, že pro pevnou úlohu ji ani jeden z nich nevyřešil? A jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna úloha má tuto vlastnost?

34. Obarvěte prvky náhodně (s pravděpodobností $\frac{1}{2}$). Jaká je pravděpodobnost, že daná množina je jednobarevná? A jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna? Ostrou nerovnost získejte z faktu, že jevy „i-tá množina je jednobarevná“ se nevylučují.

35. Obarvěte množinu náhodně (každá barva na každém políčku s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). Jaká je pravděpodobnost, že daná desetiprvková posloupnost je jednobarevná? A kolik je aritmetických desetiprvkových posloupností?

36. Obarvěme graf náhodně červeně a modře. Jaká je pravděpodobnost, že úplný podgraf na pevná k-prvkové množině je celý červený? Dokažte, že pravděpodobnost, že některá k-prvková množina indukuje celočervený podgraf je menší než $\frac{1}{2}$.

37. Dokažte, že tvrzení platí pro pět bodů. Nyní odhadněte pravděpodobnost, že náhodný trojúhelník bude ostroúhlý. Náhodný trojúhelník přitom vyberte tak, že nejprve vyberete 5 náhodných bodů a pak náhodné 2 zahodíte.

38. Nechme turnaj dopadnout náhodně. pravděpodobnost, že pro danou množinu hráčů daný další hráč prohrál s některým jejím prvkem je konstantna (nezávislá na n). Pravděpodobnost, že všichni hráči prohráli s některým prvkem (ne nutně stejným) této množiny pak je exponenciální v závislosti na n. Počet všech k-prvkových množin přitom je pouze polynomiální v závisloti na n.

39. Označme A_i jev, že $|x_{i+1} - x_i| = n$. Kolik je $P(A_i)$? A kolik $P(A_i \cap A_j)$? Pomocí principu inkluze a exkluze odhadněte $P(V)$.

40. Očíslujte je náhodně. Dokažte, že $E(a_1 a_2) < 0$.

41. Buď A_i jev $k \geq i$. Pak $k = \sum A_i$.

42. Jak je definovaná střední hodnota počtu pevných bodů? A jaká je její hodnota?

43. Jak je definovaná střední hodnota všech dvojic pevných bodů? A jaká je její hodnota? Výsledek úlohy je 2n! pro $n \geq 2$.

44. Vezměte náhodného soutěžícího a označte x počet dvojic soudců, které se u tohoto soutěžícího shodovali. Dokažte $x \geq \frac{(b-1)^2}{4}$ a odhadněte střední hodnotu x pomocí k.

45. Předpokládejte náhodné výsledky. Jak je střední hodnota Hamiltonovských cest?

46. Uvažujte pevného člověka a náhodnou dvojici A, B. Odhadněte ze spoda pravděpodobnost, že tento člověk má stejný vztah k A jako k B? Jaká je střední hodnota počtu lidí, kteří mají stejný vztah k A jako k B?

47. Umistěte lezce na náhodný bod. Po té lezec provede r kroků. V i-tém kroku se podívá na i-tou nejmenší červenou úsečku, a pokud může (stojí u ní) tak po ní popoleze na další bod, jinak stojí na místě. Dokažte, že v každém kroku je pravděpodobnost výskytu lezce na každém bodu rozmístěna rovnoměrně. Jaká je střední hodnota počtu popolezení?

48. Dokažte, že červené a zelené body je možné vůči sobě pootočit, aby se překrývali alespoň v 28 bodech. Pak je možné pootočit modré body tak, aby se s těmito 28 body překrývali v osmi bodech a nakonec je možné pootočit žluté body, aby se s těmito osmi překrývali ve třech bodech. Využijte při tom, že existují zcela disjunktní natočení.

49. Uvažujte prvočíslo tvaru $p = 3k+2$ které nedělí žádný prvek A. Cílem je najít množinu, která bude dokonce bezsoučtová modulo p. Všimněte si, že množina Z těch zbytků z modulo p, které splňují $k+1 \leq z \leq 2k+1$ je bezsoučtová. Volte náhodné přirozené číslo x mezi jedničkou a p. V závislosti na něm vyberte z A všechny ty prvky a, které splňují $ax \in Z$. Jaká je střední hodnota počtu prvků takové bezsoučtové množiny?

50. Náhodně vyberte bod sféry a pomocí předem daných rovinných symetrií z něj sestrojte body kvádru. Pravděpodobnost, že je některý bod černý je nejvýše 96%.

51. Zvolte náhodných k vektorů s jednotkovou velikostí. Uvažujte množinu bodů tvořenou všemi 2^k součty některých z těch k vektorů. Dokažte, že tato konstrukce funguje s pravděpodobností 1.

52. Umístěte jej náhodně (pomocí posouvání, neotáčejte s ním). Jaká je střední hodnota počtu mřížových bodů, které pokrývá?

53. Jaká je největší možná pravděpodobnost, že náhodně umístěný kruh protíná daný čtverec?

54. Volte náhodnou vodorovnou přímku. Jaká je pravděpodobnost, že protne danou kružnici o obvodu o? Jaká je střední hodnota počtu kružnic, které protne?

55. Vezměte náhodný bod kabátu. Označte d počet záplat v tomto bodu. Odvoďte nerovnost $\binom{d}{2} \geq 2d - 3$. Spočtěte střední hodnotu obou stran. Kolik je střední hodnota d? A jak použít střední hodnotu $\binom{d}{2}$?

56. Volte náhodné mezikruží, které se alespoň částí překrývá s velkým kruhem. Spočtěte pravděpodobnost, že toto mezikruží pokrývá jeden daný bod. Jaká je střední hodnota počtu bodů, které pokrývá?

57. Volte náhodnou podmnožinu vrcholů, vrchol s pravděpodobností p. Uvažujte podgraf indukovaný touto množinou. Jaká je střední hodnota počtu vrcholů a jaká je střední hodnota počtu hran? A jaká je střední hodnota počtu vrcholů minus počet hran? Chcete, aby to bylo alespoň $\frac{n}{2d}$, z takového grafu umíte získat kýženou množinu. Vhodná hodnota p vyjde $1/d$.

58. Nejprve pomocí Eulerova vzorce odvoďte, že počet křížení v grafu s v vrcholy a h hranami je je vždy alespoň $h - 3v$. Vezměte si rozumné (bez zbytečných křížení) nakreslení grafu G. Volte náhodnou množinu vrcholů, každý vrchol s pravděpodobností p, a uvažujte podgraf indukovaný touto množinou. Spočtěte střední hodnoty počtů křížení, hran a vrcholů v závislosti počtu křížení, hran a vrcholů grafu G. Použijte na střední hodnoty v úvodu dokázanou nerovnost. Pro řešení se úkáže vhodná volba $p = \frac{4n}{m}$.

Literatura a zdroje

[1] Ravi Boppana, *Unexpected Uses of Probability.*
[2] Noga Alon, Joel H. Spencer, *The Probabilistic Method.*
[3] Paul Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving.*
[4] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book.*
[5] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies.*
[6] Peter Korscok, *O hranici neporiadku.*
[7] Ondrej Budáč, Tomáš Jurík, Ján Mazák, *Zierka úloh KMS.*
[8] Martin Aigner, Gütner M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK.*

Trojúhelník tam, zpátky a ještě dál

Michal Rolínek

Abstrakt. Příspěvek utváří přehled o klasických tvrzeních geometrie trojúhelníka a jejich aplikací v MO. Dále se věnuje několika zajímavějším konfiguracím z moderní geometrie trojúhelníka. Na konci najdete návody k úlohám a očíslovaným tvrzením.

V celém příspěvku budeme pracovat s trojúhelníkem ABC o stranách a, b, c a vnitřních úhlech α, β, γ. Poloměr opsané kružnice bude R, vepsané r a připsaných postupně r_a, r_b, r_c. Obsah budeme značit K. Výšky budeme značit h_a, h_b, h_c, těžnice m_a, m_b, m_c a osy úhlů l_a, l_b, l_c.

Trojúhelník tvořený středy stran budeme nazývat *středový*, patami výšek *ortický*, tečnami k opsané *tečnový*.

Základní body

Opsiště

V následujících tvrzeních budeme značit trojúhelník ABC, jeho opsiště O, kružnici opsanou ω a středy stran postupně A_1, B_1, C_1.

Tvrzení. *Platí vztahy* $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ *(v ostroúhlém!)* $K = abc/(4R)$, $OA_1 = R\cos\alpha$, $OB_1 = R\cos\beta$, $OC_1 = R\cos\gamma$.

Tvrzení. *Ceviána AO je izogonální s výškou.*

Tvrzení. *Platí* $bc = 2Rh_a$

Těžiště

Těžiště značíme G.

Klíčová slova. geometrie trojúhelníka, středy trojúhleníka, symediána, Lemoinův bod, Lemoinova věta, Feuerbachova věta, Brocardovy body

Tvrzení. $m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$.

Kolmiště

Kolmiště trojúhelníka značíme H, paty výšek značíme A', B', C'.

Tvrzení. *Platí $\sphericalangle BHC = 180 - \alpha$, $AH = 2R\cos\alpha$.*

Tvrzení. *Kružnice opsané BHC, CHA, AHB mají poloměr R.*

Tvrzení. *Platí $HA' \cdot HA = HB' \cdot HB = HC' \cdot HC$.*

Tvrzení. *Obrazy H přes strany i přes jejich středy padnou na kružnici opsanou.*

Tvrzení. *Paty kolmic, středy stran a středy úseček AH, BH, CH leží na jedné kružnici se středem ve v půlce mezi H a O a poloměrem $R/2$.*

Tvrzení. *H, G a O leží v přímce (v tomto pořadí) a $GH = 2GO$.*

Vepsiště a připsiště

Vepsiště značíme I a připsiště E_a, E_b, E_c. Švrčkovy body označme $\check{S}_a$, $\check{S}_b$, $\check{S}_c$ a antišvrky N_a, N_b, N_c.

Tvrzení. *Body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou na každé strane symetrické podle jejího středu.*

Tvrzení. *Platí $2K = r(a + b - c) = r_a(b + c - a) = r_b(c + a - b) = r_c(a + b - c)$.*

Tvrzení. *Platí $\sphericalangle BIC = 90° + \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle BE_aC = 90° - \frac{1}{2}\alpha$.*

Tvrzení. *Kružnice opsaná je kružnicí devíti bodů $\triangle E_aE_bE_c$.*

Tvrzení. *$BICE$ leží na kružnici se středem v $\check{S}_a$.*

Tvrzení. *Je-li A_1 střed strany BC, pak $A_1\check{S}_a = \frac{1}{2}(r_a - r)$ a $A_1\check{N}_a = \frac{1}{2}(r_b + r_c)$.*

Úlohy na základní středy

Úloha 1. Dokažte $OH < 3R$.

Úloha 2. Ukažte, že středy kružnic připsaných ortického trojúhelníka jsou samotné vrcholy A, B, C.

Úloha 3. Ukažte, že OI je Eulerova přímka $\triangle E_aE_bE_c$.

Úloha 4. Dokažte $rr_ar_br_c = K^2$.

Úloha 5. Dokažte $4R + r = r_a + r_b + r_c$.

Úloha 6. Dokažte

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}.$$

Úloha 7. Dokažte $OI^2 = R^2 - 2Rr$, $OE_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

Úloha 8. Pevným bodem A na kružnici ω jsou vedeny tětivy AB a AC tak, že součin $AB \cdot AC$ je konstantní. Ukažte, že všechny tětivy BC se dotýkají téže kružnice.

Úloha 9. Ukažte, že obvod ortického trojúhelníka je $2K/R$.

Úloha 10. Ukažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků BHC, CHA, AHB prochází jedním bodem.

Zajímavější úlohy

Úloha 11. V pevném úhlu je dán pevný bod. Veďte jím přímku tak, aby z úhlu odsekla trojúhelník o předem daném obvodu.

Úloha 12. Uvažme všechny trojúhelníky s pevnou vepsanou a opsanou kružnicí. Ukažte, že trojúhelníky z jejich antišvrků mají pevné těžiště.

Úloha 13. Jsou-li P a P' dva body naproti na opsané, pak PG půlí $P'H$.

Úloha 14. Let ABC be a triangle with $\angle ABC = 120°$. The bisector of $\angle B$ meets AC at M and the external bisector of $\angle BCA$ meets AB at P. Segments MP and BC intersect at K. Prove that $\angle AKM = \angle KPC$.

Úloha 15. Ukažte, že součin vzdáleností bodu na kružnici opsané od stran trojúhelníka je stejný jako součin vzdáleností téhož bodu od stran tečnového trojúhelníka.

Úloha 16. Tři shodné kružnice se středy postupně v A, B, C protnou odpovídající strany středového trojúhelníka každá ve dvou bodech. Ukažte, že vzniklá šestice bodů leží na kružnici se středem v H.

Úloha 17. Triangle ABC has $BC = 20$. The incircle of the triangle evenly trisects the median AD at points E and F. Find the area of the triangle.

Úloha 18. Let AB be a diameter of a circle with center O. Let C and D be two different points so that points A, B, C, D lie on the circle in this order and let the lines tangent to the circle at points C and D meet at E. Segments AC and BD meet at F. Lines EF and AB meet at M. Prove that E, C, M and D are concyclic.

Úloha 19. Ukažte, že vzdálenost I od A-těžnice je $(b-c)r/(2m_a)$.

Úloha 20. Let ABC be a triangle and I its incenter. Denote by A_1 the midpoint of BC and by M_a' the midpoint of arc BC containing vertex A. Prove that $\angle IA_1B = \angle IM_a'A$.

Úloha 21. (Lagrange formula) Buď M bod, pak

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2.$$

Odvoďte dále

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Pokročilejší středy

Isogonal conjugates – stejnoúhlý kamarád

Dva body P a P' nazveme *Isogonal conjugates* vůči $\triangle ABC$, jestliže ceviány z každého vrcholu skrz P a P' jsou izogonální.

Trojúhelník z pat kolmic na strany nazveme *pedal triangle* daného bodu.

Tvrzení. *Každý, kdo neleží na kružnici opsané, má kamaráda.*

Tvrzení. *H a O jsou kamarádi. Připsiště i vepsiště jsou „samokamarádi“*

Tvrzení. *Body P a P' ležící uvnitř $\triangle ABC$ jsou kamarádi, právě když $\sphericalangle BPC + \sphericalangle BP'C = 180° + \alpha$ a cyklické obdoby pro zbylé úhly.*

Tvrzení. (Simson Line) *Pedal triangle degeneruje do přímky právě pro body na opsané.*

Tvrzení. (Six Feet Theorem) *Pedal triangles od dvou kamarádů P a P' sdílejí opsanou kružnici, která má střed ve středu PP'.*

Symediány

Ceviány izogonální s těžnicemi nazveme symediánami a jejich průsečík Lemoinovým bodem. Značíme ho K.

Tvrzení. *Symediána je množina středů antirovnoběžek s protější stranou.*

Tvrzení. *Symediána z vrcholu A je množina vnitřních bodů X úhlu BAC, pro něž je $d(X, AB)/d(X, AC) = c/b$.*

Tvrzení. *A-symediána prochází průsečíkem tečen k opsané v bodech B a C.*

Tvrzení. (Kosinová kružnice) *Bodem K vedeme antirovnoběžky se stranami. Ty na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed této kružnice je K.*

Tvrzení. (Lemoinova kružnice) *Bodem K vedeme rovnoběžky se stranami. Ty na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed této kružnice je střed úsečky OK.*

Tvrzení. (Tuckerovy kružnice) *Strany trojúhelníka přistejnolehlíme ke K s koeficientem menším než jedna. Obrazy na obvodu trojúhelníka vytnou šestici koncyklických bodů. Střed kružnice je na úsečce OK.*

Tvrzení. (Lemoine Theorem) *Lemoinův bod je jediný bod, který je těžištěm svého pedal triangle.*

Pár pat kolmic

Označme H_a patu kolmice z H na A-těžnici. Podobně definujme H_b a H_c.

Tvrzení. *H_a leží na následujících křivkách:*

(i) *Kružnice nad průměrem AH*
(ii) *Těžnice*
(iii) *Kružnice nad průměrem HG*
(iv) *Kružnice BHC*
(v) *Kružnice dotýkající se BC v B a procházející A. (resp. dotýkající se v C)*
(vi) *Kružnice $BC'A_1$ (C' je pata výšky, A_1 střed BC) a $CB'A_1$.*

Označme O_a patu kolmice z O na symediánu. Podobně definujme O_b a O_c

Tvrzení. *O_a leží na následujících křivkách*

(i) *Kružnice nad průměrem AO*
(ii) *Symediána*
(iii) *Kružnice nad průměrem OK*
(iv) *Kružnice BOC*
(v) *Kružnice dotýkající se AB v A a procházející C. (resp. dotýkající se v AC v A procházející B)*

Tvrzení. *O_a je střed spirální podobnosti, která zobrazí AB na AC.*

Tvrzení. *O_a a H_a jsou kamarádi.*

Úlohy

Úloha 22. Nad AB a AC připíšeme čtverce a protneme jejich strany rovnoběžné s AB, resp AC. Dokažte, že průsečík leží na A-symediáně.

Úloha 23. We have a quadrangle $ABCD$ Point M is on diagonal AC and $AM = MC$, $\angle BMC = \angle CMD = \angle BAD$. Prove, that we can inscribe quadrangle $ABCD$ in a circle.

Úloha 24. Ukažte, že trojice přímek spojujících střed strany se středem odpovídající výšky prochází Lemoinovým bodem.

Úloha 25. Ukažte, že kosinová kružnice je rozpůlena Lemoinovou kružnicí.

Úloha 26. Ukažte, že projekce vrcholů ortického trojúhelníka (6 bodů) leží na jedné kružnici. Ukažte dále, že to je jedna z Tuckerových kružnic.

Úloha 27. In a scalene triangle ABC, H and G are the orthocenter an centroid respectively. Consider the triangle formed by the lines through A, B and C perpendicular to AG, BG and CG respectively. Prove that the centroid of this triangle lies on the line HG.

Úloha 28. Let $ABCD$ be a quadrilateral inscribed in a semicircle ω with diameter AB and center O. Lines CD and AB intersect at M. Let K be the second point of intersection of the circumcircles of triangles AOD and BOC. Prove that $\angle MKO = 90°$.

Úloha 29. Těžnice rozdělí trojúhleník na šest trojúhelníků. Ukažte, že jejich opsiště leží na kružnici

Úloha 30. Let ABC be an acute, scalene triangle, and let M, N, and P be the midpoints of BC, CA, and AB, respectively. Let the perpendicular bisectors of AB and AC intersect ray AM in points D and E, respectively, and let lines BD and CE intersect in point F, inside $\triangle ABC$. Prove that points A, N, F, and P all lie on one circle.

Návody

1. Užijte Eulerovu přímku a $OG < R$.

2. Např. spočtěte úhly.

3. O je středem kružnice 9b a I je kolmištěm $\triangle E_a E_b E_c$

4. Vzorce pro obsah + Heron.

6. Vynásobte R a převeďte na součet vzdáleností O od středů stran. Budou se hodit švrci, antišvrci i výsledek předchozího cvičení.

7. Mocnost I (E_a) k opsané.

8. $h_a = bc/R$.

9. $a \cdot OA' + b \cdot OB' + c \cdot OC' = 2K$

10. Mají společnou kružnici 9b.

11. Sestrojte kružnici připsanou!

12. Dokreslete připsiště, ta sdílejí těžiště s antišvrky. Pak Euler line.

13. Nakreslete jen P, P', O, G a H.

14. Poznejte připsiště!

15. Vzdálenosti vyjádřete pomocí PA, PB, PC a R. Hodí se $h_a = bc/R$.

16. Ukažte, že poloměr hledané kružnice je $R_1^2 - p(H, \omega)$, kde R_1 je poloměr daných kružnic a ω opsaná kružnice.

17. Mocnost z konců těžnice!

18. Poznejte obrázek s ortocentrem.

19. Porovnejte obsahy. Pamatujte, že $(b-c)/2$ je to od bodu dotyku ke středu strany.

20. Doplňte na obrázek s připsišti a porovnejte úhly u těžnic v podobných trojúhelnících.

21. Označte M střed AG a opakovaně užijte vzorce pro těžnice.

22. Průsečík má správný poměr vzdáleností od stran.

23. Poznejte bod v trojúhelníku BAD.

24. Ukažte, že každá z přímek je množina středů obdélníků vepsaných do $\triangle ABC$ ležících na jedné ze stran. Pak si jen vzpomeňte na Lemoinovu kružnici.

25. Stačí, že K leží na jejich chordále.

26. Dotvořte trojúhelník, který je stejnolehlý s ABC a ukažte, že střed stejnolehlosti je K.

27. Místo H pracujte s O. Ve velkém je G Lemoine a zbytek zajistí Six Feet Theorem.

28. Doplňte obrázek, poznejte bod K a najděte další kružnice (nebo si vzpomeňte na harmonickou teorii).

29. Vzdalte osy stran dvakrát dál od G. Pracujte vůči vzníklému trojúhelníku kolmému na těžnice. Použijte Lemoine Theorem a Tuckerovu kružnici.

30. Trochu úhlete a pak poznejte, jaký bod chcete. Dokažte pak nějakou jeho jinou vlastnost.

Literatura a zdroje

[1] Nathan Altschiller-Court, *College Geometry.*
[2] `www.cut-the-knot.org`.
[3] `www.artofproblemsolving.com`.
[4] Ondrej Budáč, Tomáš Jurík, Ján Mazák, *Zbierka úloh KMS.*
[5] Coxeter, Greitzer, *Geometry Revisited.*

Prirodzenočíselné funkcionálne rovnice

Filip Sládek

Abstrakt. Príspevok robí prierez vlastnosťami prirodzených čísel a ich využitie pri riešení olympiádových funkcionálnych rovníc na prirodzených číslach.

Nulu nepovažujeme za prirodzené číslo. Multiplikatívna funkcia f je taká, že $f(mn) = f(m)f(n)$ pre všetky nesúdeliteľné m, n. Totálne multiplikatívna je keď to platí pre všetky dvojice m, n, nie len nesúdeliteľné. *Dobre usporiadaná množina* je usporiadaná množina, ktorej každá podmnožina obsahuje svoj najmenší prvok.

To čo si potrebujeme uvedomiť pred riešením celočíselných funkcionálok, sú všetky vlastnosti množiny prirodzených čísel. Sú to čísla kladné, väčšie rovné 1, celé, množina je usporiadaná, dokonca dobre usporiadaná, funguje na nej indukcia a takisto môžeme využívať všetky veci z teórie čísel ako sú deliteľnosť, prvočísla, … Nakoniec netreba zabudnúť, že desiatková sústava, ktorú používame často skresľuje naše vnímanie a iné sústavy nám môžu dať názornejší pohľad.

Takisto je podstatné skúmať samotné vlastností funkcií, a triky, ktoré poznáme z riešenia funkcionálnych rovníc.

Skoro tá istá úloha vyžaduje všímať si vždy iné vlastnosti prirodzených čísel

Úloha 1. Nájdite všetky rastúce totálne multiplikatívne funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(2) = 2$.

Úloha 2. Nájdite všetky rastúce multiplikatívne funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(2) = 2$.

Úloha 3. Dokážte, že neexituje rastúca totálne multiplikatívna funkcia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $f(2) = 3$.

Kľúčové slová. funkcionálna rovnica, dobre usporiadaná množina, multiplikatívna funkcia, prvočíselný roklad, injektívnosť, bijektívnosť

Úloha 4. Nájdite všetky totálne multiplikatívne funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(2) = 2$.

Úloha 5. Pre ktoré a existuje nejaká rastúca multiplikatívna funkcia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $f(2) = a$.

Úloha 6. Nájdite všetky rastúce totálne multiplikatívne funkcie $f\colon \mathbb{N} \to [1, \infty)$ také, že $f(2) = 2$.

Nerovnosti a vynútený priebeh

Úloha 7. Majme rastúcu funkciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takú, že $f(f(n)) = 3n$. Nájdi $f(2011)$.

Úloha 8. Majme funkciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ takú, že $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}$, $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ a $f(9999) = 3333$. Nájdi $f(1982)$.

Úloha 9. Rozhodnite, či existuje funkcia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$ pre všetky $n \geq 2$.

Úloha 10. Nájdite všetky prosté funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2}$.

Other base

Úloha 11. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ také, že $f(0) = 0$ a $f(2n+1) = f(2n) + 1 = f(n) + 1$.

Úloha 12. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(1) = 1$, $f(2n) < 6f(n)$ a $3f(n)f(2n+1) = f(2n)(3f(n)+1)$.

Úloha 13. Majme funkciu $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takú, že $f(4n) = f(2n) + f(n)$, $f(4n+2) = f(4n+1)$ a $f(2n+1) = f(2n) + 1$. Dokážte, že počet nezáporných čísel m takých, že $f(3m) = f(4m)$ a $m < 2^k$ je $f(2^{k+1})$.

Úloha 14. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ také, že $f(1) = 1$ a $f(2n+1) = f(2n) + 1 = 3f(n) + 1$.

Úloha 15. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(1) = 1$, $f(3) = 3$, $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$ a $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$.

Fixed point

Úloha 16. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ také, že

$$f(f(n)+m) = f(f(m)) + f(n).$$

Prime decomposition

Úloha 17. Nájdite všetky surjektívne funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$m \mid n \Leftrightarrow f(m) \mid f(n).$$

Úloha 18. Uvažujme všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(nf(m)) = mf(n)$. Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(2007)$.

Úloha 19. Uvažujme všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(n^2 f(m)) = mf^2(n)$. Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(1998)$.

Uniqueness

Úloha 20. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{R}$ také, že $f(p,q,r) = 0$ pre $pqr = 0$ a

$$\begin{aligned} f(p,q,r) = \frac{1}{6}\big(&f(p+1,q-1,r) + f(p-1,q+1,r) + f(p+1,q,r-1) \\ &+ f(p-1,q,r+1) + f(p,q-1,r+1) + f(p,q+1,r-1)\big) \end{aligned}$$

inak.

Extremal principle and well ordering

Úloha 21. Nájdite všetky bijekcie $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f^3(n) + g^3(n) + h^3(n) = 3ng(n)h(n).$$

Úloha 22. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

Úloha 23. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ také, že

$$6f(n+3) - 3f(n+2) - 2f(n+1) - f(n) = 0.$$

Úloha 24. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(f(n)) < f(n+1)$.

Úloha 25. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$2n + 2001 \le f(f(n)) + f(n) \le 2n + 2002.$$

Miscellaneous

Úloha 26. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(f(n) + f(m)) = m + n$.

Úloha 27. Rozhodnite, či existuje rastúca funkcia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $f(1) = 2$ a $f(f(n)) = f(n) + n$.

Literatura a zdroje

[1] Venkatachala, B. J., *Functional equations – A problem solving approach*, Prism Publications.
[2] *Slovenská matematická olympiáda*, *www.skmo.sk*.
[3] Djukić D., Janković V., Matić I., Petrović N., *The IMO Compendium*, Springer, 2006.
[4] Titu Andreescu, Iurie Boreico, *Functional equations*, Electronic edition, 2007.

Primitivní prvek a kvadratická reciprocita

ALEXANDER „OLIN“ SLÁVIK

ABSTRAKT. Primitivní prvek i kvadratická reciprocita jsou v olympiádní teorii čísel spíše okrajové nástroje, ale vyplatí se o jejich existenci vědět. Některé problémy jsou jim přímo šité na míru.

Definice. Buď n přirozené číslo. Celé číslo x je *invertibilní modulo* n, pokud existuje $y \in \mathbb{Z}$ takové, že $xy \equiv 1 \pmod{n}$.

Pozorování. *Z Bézoutovy věty plyne, že x je invertibilní modulo n právě tehdy, když*[1] $(x, n) = 1$.

Pozorování. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je součin invertibilních prvků opět invertibilní a příslušné inverzní prvky invertibilních prvků jsou také invertibilní.*

Vezmeme-li všechny invertibilní prvky z množiny $\{0, \ldots, n-1\}$ a vybavíme je operací násobení modulo n, obdržíme grupu, kterou zpravidla značíme $\mathbb{Z}_n^*$. Má právě $\varphi(n)$ prvků, kde φ značí Eulerovu funkci.

Definice. Pro $n, x \in \mathbb{N}$ splňující $(n, x) = 1$ nazveme *řád prvku x modulo n* nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x^k \equiv 1 \pmod{n}$. Značíme $\operatorname{ord}_n(x)$.[2]

Lemma. *Pro $n, x \in \mathbb{N}$ splňující $(n, x) = 1$ platí*

$$x^a \equiv x^b \pmod{n} \iff a \equiv b \pmod{\operatorname{ord}_n(x)}.$$

Definice. Buď n přirozené číslo. Přirozené číslo g nazveme *primitivním prvkem*[3] *modulo* n, pokud $\operatorname{ord}_n(g) = \varphi(n)$.

Pozorování. *Číslo g je primitivní prvek modulo n, právě když*

$$\{1, g \bmod n, g^2 \bmod n, g^3 \bmod n, \ldots\} = \mathbb{Z}_n^*.$$

KLÍČOVÁ SLOVA. Řád prvku, Primitivní prvek, Legendreův symbol, zákon kvadratické reciprocity

[1] Kulatými závorkami značíme největšího společného dělitele.

[2] Tato definice se shoduje s pojmem řád užívaným v teorii grup – jde o speciální případ pro grupu $\mathbb{Z}_n^*$.

[3] Anglicky *primitive root.*

Věta. (O existenci primitivního prvku) *Primitivní prvek modulo n existuje právě pro $n = 2, 4, p^k, 2p^k$, kde p je liché prvočíslo a $k \in \mathbb{N}$.*

Důsledek. (Wilsonova věta) *Pro všechna prvočísla p platí $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.*

Lemma. *Pokud existuje primitivní prvek g modulo n, pak existuje právě $\varphi(\varphi(n))$ (navzájem nekongruentních) primitivních prvků – jsou to g^k pro $1 \leq k \leq n-1$ splňující $(k, \varphi(n)) = 1$.*

Úlohy

Úloha 1. Nechť $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je permutace čísel od 1 do n taková, že součet $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$ není dělitelný $n+1$ pro všechna $1 \leq i < j \leq n$. Najděte takovou permutaci pro (a) $n = 12$, (b) $n = 22$. (Crux Mathematicorum)

Úloha 2. Nechť p je liché prvočíslo. Najděte všechna přirozená čísla k taková, že $1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k$ je dělitelné p. (Hungary-Israel Math Competition 2009)

Úloha 3. Nechť p je prvočíslo splňující $p \equiv 3 \pmod 8$ nebo $p \equiv 5 \pmod 8$. Nechť navíc $p = 2q + 1$, kde q je také prvočíslo. Spočtěte $\omega^2 + \omega^4 + \cdots + \omega^{2^{p-1}}$, kde $\omega \in \mathbb{C}$ splňuje $\omega^p = 1$, $\omega \neq 1$. (Mathematical Reflections)

Úloha 4. Pro prvočíslo p určete, jaký je součet všech kvadratických zbytků modulo p. Jak je to s kvadratickými nezbytky?

Úloha 5. Pro každé liché prvočíslo p položme

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \qquad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

kde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Určete $f(p)$. (Chinese TST 1993)

Úloha 6. Buď p prvočíslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ různá přirozená čísla menší než p. Předpokládejme, že $p \mid a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k$ pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$. Určete $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. (Mathematical Reflections)

Úloha 7. Dokažte, že součin všech primitivních prvků modulo p (mezi 1 a $p-1$) je kongruentní $1 \pmod p$.

Úloha 8. Ukažte, že 2 je primitivní prvek modulo 3^n pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 9. Dokažte, že pokud je p Fermatovo prvočíslo (tedy tvaru $2^{2^k} + 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$), pak je každý kvadratický nezbytek modulo p současně primitivním prvkem.

Úloha 10. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že nejmenší prvek p je větší jak n.

Úloha 11. Jsou-li p, q prvočísla, pak kongruence $x^q \equiv 1 \pmod{p}$ má právě jedno řešení (v $\mathbb{Z}_p$), pokud $q \nmid p-1$, a právě q řešení, pokud $q \mid p-1$. Dokažte.

Jak je to s počty řešení obecnější úlohy $x^q \equiv a \pmod{p}$?

Úloha 12. Pro $a \in \mathbb{N}_0$ definujme $n_a = 101a - 100 \cdot 2^a$. Pro $0 \le a, b, c, d \le 99$ ukažte

$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100} \quad \Longrightarrow \quad \{a, b\} = \{c, d\}.$$

(Putnam 1994)

Úloha 13. Určete počet všech posloupností reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že pro všechna přirozená čísla m, n platí $a_m \cdot a_n = a_{m \cdot n}$ a zároveň $a_n = a_{n+2011}$.
(MKS)

Úloha 14. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že číslo $n^4 + 1$ má prvočíselného dělitele většího než $2n$. (MKS)

Úloha 15. Najděte všechna dvojciferná přirozená čísla n (kde $n = 10a + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) taková, že $k^a \equiv k^b \pmod{n}$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 16. Nechť p je liché prvočíslo, $m, n \in \mathbb{N}$ nejsou dělitelná p, $s \in \mathbb{N}_0$ a $p \mid m^{2^s} + n^{2^s}$. Dokažte, že pak $p \equiv 1 \pmod{2^{s+1}}$.

Úloha 17. Nechť p je liché prvočíslo a A, B dvě různé neprázdné podmnožiny $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ splňující

(i) $A \cup B = \{1, 2, \ldots, p-1\}$,
(ii) pokud $a, b \in A$ nebo $a, b \in B$, pak $ab \bmod p \in A$,
(iii) pokud $a \in A$ a $b \in B$, pak $ab \bmod p \in B$.

Najděte všechny takové množiny A, B. (Indická MO)

Kvadratické zbytky a reciprocita

Definice. Buď p prvočíslo a a celé číslo. Pak *Legendreův symbol* $\left(\frac{a}{p}\right)$ definujeme předpisem

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } p \nmid a \text{ a } a \text{ je kvadratický zbytek modulo } p, \\ -1 & \text{pokud } p \nmid a \text{ a } a \text{ je kvadratický nezbytek modulo } p, \\ 0 & \text{pokud } p \mid a. \end{cases}$$

Lemma. (Vlastnosti Legendreova symbolu) *Buď p prvočíslo a a, b celá čísla.*

(i) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ *(Eulerovo kritérium).*
(ii) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

Lemma. *Pro liché prvočíslo p platí*

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

tedy -1 je kvadratický zbytek právě pro $p \equiv 1 \pmod 4$, 2 pro $p \equiv \pm 1 \pmod 8$. Dále platí, že 3 je kvadratický zbytek pro $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$ a 5 pro $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$.

Následující lemma se obvykle bere jako základ pro důkaz zákona kvadratické reciprocity.

Lemma. (Gaussovo Lemma) *Nechť p je liché prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}$ splňuje $(a,p) = 1$. Dále nechť a_j je takové (unikátní) celé číslo, že zároveň platí $aj \equiv a_j \pmod p$ a $-\frac{n}{2} < a_j \leq \frac{n}{2}$, a ℓ označuje počet čísel $j \in \left\{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right\}$, pro která $a_j < 0$. Pak $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\ell}$.*

Věta. (Zákon kvadratické reciprocity) *Pro různá lichá prvočísla p, q platí*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Úlohy

Úloha 18. Dokažte, že kongruence $x^8 \equiv 16 \pmod p$ má řešení pro každé prvočíslo p.

Úloha 19. Dokažte, že pro každé prvočíslo p existuje kvadratický nezbytek a splňující $a < \sqrt{p} + 1$. (Crux Mathematicorum)

Úloha 20. Je-li a kvadratický zbytek modulo každé prvočíslo, pak je a čtverec. Dokažte. (Crux Mathematicorum)

Úloha 21. (Zesílení předchozí úlohy) Pokud $a \in \mathbb{N}$ není čtverec, pak $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ pro nekonečně mnoho prvočísel p. Dokažte.

Úloha 22. Nechť $a \in \mathbb{N}$. Ukažte, že pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $b, c \in \mathbb{N}$ taková, že $a + n^2 = b^2 + c^2$, pak je a čtverec. (Mathematical Reflections)

Úloha 23. Nechť f je kvadratický trojčlen s celočíselnými koeficienty. Dále nechť pro každé prvočíslo p existuje alespoň jedno $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $p \mid f(n)$. Dokažte, že kořeny f jsou racionální čísla.

Úloha 24. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ jsou taková přirozená čísla, že $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2004}^n$ je čtverec pro každé $n \in \mathbb{N}$. Kolik nejméně z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ musí být nulových?

Úloha 25. Dokažte, že pokud je $p = 2^n + 1$ prvočíslo ($n \geq 2$), pak $p \mid 3^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

Úloha 26. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nemá $3^n + 2$ žádného prvočíselného dělitele tvaru $24k + 13$ ($k \in \mathbb{N}$).

Úloha 27. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nemá $n^2 - 5$ dělitele, jehož poslední cifra je 3 nebo 7.

Úloha 28. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nemá $2^n + 1$ žádného prvočíselného dělitele tvaru $8k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$). (Vietnamese TST 2004)

Úloha 29. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ má $2^{3^n} + 1$ alespoň n prvočíselných dělitelů tvaru $8k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$).

Úloha 30. Najděte všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $2^n - 1 \mid 3^n - 1$.

Úloha 31. Nechť p je prvočíslo a $a, b \in \mathbb{N}$ splňují $p^2 = 4a^2 + b^2$. Dokažte, že b je kvadratický zbytek modulo p.

Úloha 32. V přirozených číslech řešte rovnici $x^5 - y^2 = 52$.

Úloha 33. Předpokládejme, že pro $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1$. Dokažte, že pak $(m, n) > 1$.

Úloha 34. Nalezněte všechna prvočísla p taková, že $p! + p$ je čtverec.

Návody

1. Vezměte primitivní prvek a umocňujte.

2. Uvedený součet je součet mocnin primitivního prvku.

3. Dokažte, že 2 je primitivní prvek modulo p a adekvátně interpretujte exponenty u ω.

4. Kvadratické zbytky jsou přesně ty prvky $\mathbb{Z}_p^*$, u kterých má primitivní prvek sudý exponent.

5. Doplňte sumaci až do $p - 1$, převeďte sumu na součet mocnin primitivního prvku a rozeberte případy $p - 1 \nmid 120$, $p - 1 \mid 120$.

6. Položte $a_i = g^{\alpha_i}$, kde g je primitivní prvek, a uvažujte polynom $x^{\alpha_1} + \cdots + x^{\alpha_n} \in \mathbb{Z}_p[x]$.

7. Inverzní prvek k primitivnímu prvku je opět primitivní.

8. Indukcí podle n – musí platit $\varphi(3^n) \mid \mathrm{ord}_{3^{n+1}}(2) \mid \varphi(3^{n+1})$. Další indukcí vyloučete případ $\mathrm{ord}_{3^{n+1}}(2) = 2 \cdot 3^{n-1}$.

9. Kvadratické zbytky nemohou být primitivními prvky. Kolik má p primitivních prvků?

10. Stačí, aby čísla $1, 2, \ldots, n$ byly kvadratické zbytky modulo p. Čínská zbytková & Dirichletova věta.

11. Položte $x = g^i$, kde g je primitivní prvek a $i \in \mathbb{N}$, a zaměřte se na exponenty. V obecnějším případě navíc položte $a = g^j$.

12. Rozdělte na kongruenci modulo 100 a modulo 101, využijte $2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ a nakonec skutečnost, že 2 je primitivní prvek modulo 101.

13. Ukažte, že posloupnost může nabývat pouze hodnot 0, 1 a -1 a že je kompletně zadána hodnotou v 2011 a hodnotou v nějakém primitivním prvku modulo 2011.

14. Uvažujte prvočísla p tvaru $8k+1$ a ukažte, že $p \mid g^{4k}+1$, kde g je primitivní prvek modulo p.

15. Uvažte prvočíslo $p \mid n$ a nějaký jeho primitivní prvek g, ten dosaďte za k. Dourozebírejte.

16. Umocněte na 2^s kongruenci $g^k \equiv mn^{-1} \pmod p$ (g prim. prvek).

17. Musí být $A \cap B = \emptyset$. Do které množiny padne primitivní prvek?

18. Jasné pokud je 2 kvadratický zbytek. Pokud jsou -1 i 2 nezbytky, je -2 zbytek. Je-li -1 zbytek, ale 2 ne, pak i splňující $i^2 \equiv -1 \pmod p$ je nezbytek – napište ho jako mocninu primitivního prvku.

19. Je-li a nejmenší kvadratický nezbytek, položte $b = \left\lfloor \frac{p}{a} \right\rfloor + 1$ a ukažte, že i b je nezbytek.

20. Rozložte „nečtvercovou část“ a na prvočísla a vyberte z ní nějaké liché prvočíslo p. Čínskou zbytkovou větou + Dirichletovou větou najděte prvočíslo, které bude kvadratický nezbytek modulo p a zbytek pro ostatní prvočísla v rozkladu. Použijte multiplikativitu Legendrova symbolu a reciprocitu.

21. Postup podobný předchozí úloze; hledaná prvočísla se budou vyrábět tak, že v čínské zbytkové větě budeme požadovat různost od již zkonstruovaných.

22. Podobně jako v předchozích úlohách vynuťte Čínskou zbytkovou a Dirichletovou větou existenci takového prvočísla p a $n \in \mathbb{N}$, že $p \mid a+n^2$ a současně $p \equiv 3 \pmod 4$.

23. Je zapotřebí ukázat, že diskriminant je čtverec. K tomu stačí (viz předchozí úlohy), že je to kvadratický zbytek modulo všechna prvočísla.

24. Za n dosazujte $p-1$, kde p je dostatečně velké prvočíslo, a nahlížejte modulo p.

25. Všimněte si, že n musí být sudé, použijte Eulerovo kritérium a reciprocitu pro p a 3.

26. Je-li n sudé, pak $-2 \equiv 3^n \pmod p$, pokud je liché, tak $-6 \equiv 3^{n+1} \pmod p$. V druhém případě lze výhodně aplikovat reciprocitu.

27. Reciprocitou pro 5 vylučte případné prvočíselné dělitele $\equiv \pm 2 \pmod 5$ a posléze i složené.

28. Je-li n sudé, pak $-1 \equiv \left(2^{n/2}\right)^2 \pmod p$, pokud je liché, tak $-2 \equiv \left(2^{(n+1)/2}\right)^2 \pmod p$.

29. Stejně jako v předchozí úloze vyloučete dělitele $\equiv 7 \pmod 8$ a navíc i $\equiv 5 \pmod 8$. Rozložte zadaný výraz jako

$$2^{3^n}+1 = (2+1)\left(2^2-2+1\right)\left(2^{2\cdot 3}-2^3+1\right)\cdots\left(2^{2\cdot 3^{n-1}}-2^{3^{n-1}}+1\right)$$

a ukažte, že vyjma první závorky je největší společný dělitel každých dvou na pravé straně roven 3. Zbývá dokázat, že každá tato závorka má i dělitele $\equiv 8 \pmod 3$ různého od 3.

30. Ukažte, že n musí být liché a 2^n-1 musí mít prvočíselného dělitele p tvaru $12k \pm 5$. Aplikujte reciprocitu na p a 3.

31. Musí být $p \equiv 1 \pmod 4$. Pro každý prvočíselný dělitel $q \mid b$ je $p \equiv 4a^2 \pmod q$, použijte reciprocitu a multiplikativitu.

32. Přepište na $x^5 - 32 = y^2 + 20$ a charakterizujte (reciprocitou) všechny možné prvočíselné dělitele pravé strany (modulo 20). Uzbytkujte levou stranu.

33. Za předpokladu $(m,n)=1$ je $(5^m-1, 5^n-1)=4$, lichá prvočísla $p_1,\dots,p_k$ v rozkladu 5^m-1 tedy musí být v první mocnině. Jelikož m musí být liché, je 5 kvadratický zbytek modulo všechna p_i, z reciprocity je p_i zbytek modulo 5. Nemůže nastat $p_i \equiv 1 \pmod 5$ pro nějaké i.

34. Mezi čísly $1, 3, \dots, p-2$ musí být kvadratický nezbytek modulo p. Nějaký jeho prvočíselný dělitel q musí být nezbytek. Pro případ $p \equiv 3 \pmod 4$ použijte reciprocitu pro p, q.

Zdroje

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*, XYZ Press 2008
[2] *Mathematical Excalibur*, vol. 15, no. 1
[3] Fórum Art of Problem Solving, *http://www.artofproblemsolving.com/Forum*
[4] Dušan Djukić, *Quadratic Congruences*, Olympiad Training Materials, *http://www.imomath.com/index.php?options=326* nebo *http://memo.szolda.hu/feladatok/quadcong_ddj.pdf*
[5] *Primitive Roots, Order, Quadratic Residue* *http://ohkawa.cc.it-hiroshima.ac.jp/AoPS.pdf/pr,qr,order.pdf*

Obsah