

Zadání 4. série

Termín odeslání: 3. listopadu 2014
Adresa pro odeslání: *Korespondenční seminář iKS
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech Republic*

Úloha C4. Patrik si nakreslil obdélníkovou mřížku a na ní vyznačil nějakou cestu, která začíná vlevo nahoře, končí vpravo dole a každým vrcholem projde právě jednou. Posléze Patrik vybarvil ty oblasti (oddělené onou cestou), které přiléhají k levé nebo spodní hraně tabulky. Dokažte, že vybarvených políček je stejně jako nevybarvených.

Úloha G4. Osa úhlu u vrcholu A trojúhelníka ABC protíná stranu BC v bodě D . Označme M střed úsečky AD . Úsečky MB , MC protnou kružnice s průměry AC , AB postupně v bodech X , Y . Dokažte, že body D , M , X , Y leží na jedné kružnici.

Úloha N4. Je dáno liché prvočíslo p a posloupnost splňující $a_n = a_{n-1} + a_{n-p}$ pro $n \geq p$ a $a_n = n$ pro $n = 0, \dots, p-1$. Kolik z čísel a_0, a_1, \dots, a_{p^3} je dělitelných p ?

Úloha A4. Nalezněte všechny funkce splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - 2x^2 f(y) + f(y^2).$$