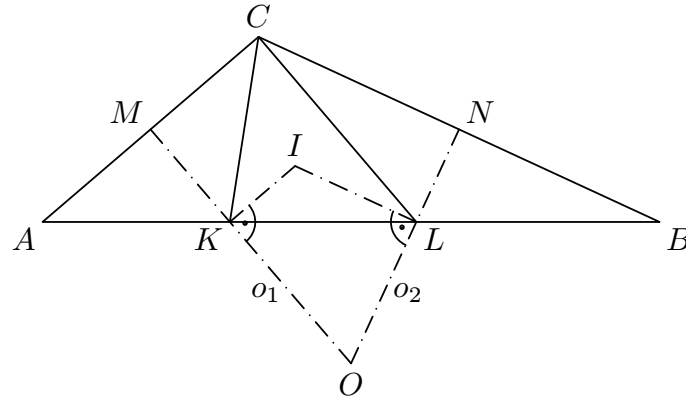


64. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Středy stran AC , BC označme postupně M , N . Střed kružnice vepsané trojúhelníku KLC označme I . Úvodem poznamenejme, že body K , L leží na straně AB vždy v takovém pořadí jako na obr. 1, protože podle zadání má trojúhelník ABC tupý úhel při vrcholu C , a proto střed O jeho opsané kružnice leží v polorovině opačné k polorovině ABC .



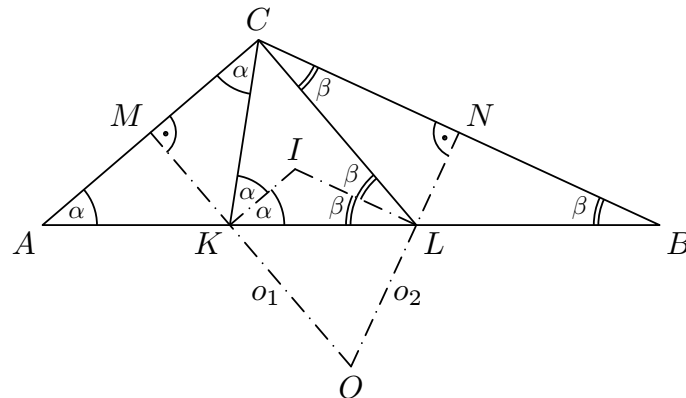
Obr. 1

Bod K leží na ose strany AC , proto je KM osou úhlu AKC . Přímka KI je osou úhlu LKC . Přímky KI a KM jsou osami navzájem sousedních úhlů, a proto jsou na sebe kolmé. Analogicky $LI \perp LN$. Body K , L tedy leží na Thaletově kružnici nad průměrem OI , z čehož již triviálně plyne dokazované tvrzení.

Jiné řešení. Označme úhly trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α , β , γ a body M , N , I stejně jako v prvním řešení. Stejně jako tam vysvětlíme, že zatímco bod I leží v polorovině ABC , bod O leží v polorovině k ní opačné (díky tupému úhlu ACB).

Čtyřúhelník $MONC$ je tětiový, protože má pravé úhly při vrcholech M a N . Odtud $|\sphericalangle KOL| = 180^\circ - |\sphericalangle MCN| = 180^\circ - \gamma$.

Protože bod K leží na ose strany AC , je trojúhelník AKC rovnoramenný se základnou AC (obr. 2). Při ní mají jeho vnitřní úhly velikost α . Proto $|\sphericalangle LKC| = 180^\circ - |\sphericalangle AKC| = 2\alpha$, a tedy $|\sphericalangle LKI| = \frac{1}{2}|\sphericalangle LKC| = \alpha$. Podobně $|\sphericalangle KLI| = \beta$. Z trojúhelníku KLI tak máme $|\sphericalangle KIL| = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma$.



Obr. 2

Z uvedeného plyne $|\sphericalangle KOL| + |\sphericalangle KIL| = 180^\circ$, takže čtyřúhelník $KOLI$ je tětiový, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu za pozorování, že KM je osou úhlu AKC , dejte 2 body, další 2 body dejte za odvození $KI \perp MO$ a 2 body za dokončení řešení. Při druhém postupu dejte 1 bod za využití rovnoramennosti trojúhelníku AKC , 2 body za vyjádření velikosti úhlu LKI , 1 bod za vyjádření velikosti úhlu KIL , 1 bod za vyjádření velikosti úhlu KOL a 1 bod za dokončení řešení. Naopak jeden bod strhněte, pokud řešitel nezmíní polohu bodu O vůči polorovině ABC (zejména, když v celém svém řešení „přejde“ mlčením podmínku, že úhel ACB je tupý).

2. Předpokládejme, že prvočísla p, q a kladné celé číslo k splňují rovnost $p^2 + 5pq + 4q^2 = k^2$. Tu ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} k^2 - (p^2 + 4pq + 4q^2) &= pq, \\ k^2 - (p + 2q)^2 &= pq, \\ (k - p - 2q)(k + p + 2q) &= pq. \end{aligned} \quad (1)$$

Pravá strana i druhý činitel součinu na levé straně jsou kladné, takže i první činitel musí být kladný. Jelikož p, q jsou prvočísla, číslo pq se dá rozložit na součin dvou kladných čísel jen čtyřmi způsoby: $pq = 1 \cdot pq = p \cdot q = q \cdot p = pq \cdot 1$. Vzhledem k tomu, že číslo $k + p + 2q$ je větší než kterýkoliv prvek množiny $\{1, p, q\}$, v úvahu přichází jen první z rozkladů, takže

$$k - p - 2q = 1 \quad \text{a} \quad k + p + 2q = pq. \quad (2)$$

Eliminací proměnné k (např. odečtením první rovnice od druhé) dostaneme

$$2p + 4q = pq - 1 \quad \text{neboli} \quad (p - 4)(q - 2) = 9. \quad (3)$$

Činitel $q - 2$ je nezáporný, protože q je prvočíslo. Nezáporný tedy musí být i činitel $p - 4$. Jsou právě tři možnosti, jak číslo 9 rozložit na součin dvou nezáporných čísel:

$$9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 = 9 \cdot 1.$$

Z nich dostáváme tři řešení $(p, q) \in \{(5, 11), (7, 5), (13, 3)\}$, přičemž všechny nalezené hodnoty p, q jsou skutečně prvočísla. Zkouška není nutná, protože pokud p, q splňují rovnici (3), můžeme k nim z (2) dopočítat celé číslo k tak, aby platila rovnost (1), která je ekvivalentní s původní rovností.

Jiné řešení. Po dosazení $q = p$ do zadaného výrazu vyjde $10p^2$, což není druhá mocnina žádného celého čísla. Musí proto být $p \neq q$.

Daný výraz lze rozložit na součin:

$$p^2 + 5pq + 4q^2 = (p + q)(p + 4q). \quad (4)$$

Prvočísla p a q jsou různá, proto je každé z nich nesoudělné i s $p + q$. Označme d největšího společného dělitele čísel $p + q$ a $p + 4q$. Pak $d \mid (p + 4q) - (p + q) = 3q$, a jelikož d je nesoudělné s q , nutně $d \in \{1, 3\}$. Oba případy rozebereme.

Pokud $d = 1$, musejí být oba činitelé ve (4) druhými mocninami, čili existují přirozená čísla r, s taková, že platí

$$\begin{aligned} p + q &= r^2, \\ p + 4q &= s^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Navíc zřejmě platí $2 < r < s$, protože $p + 4q > p + q \geq 2 + 3$. Kombinacemi obou rovnic soustavy (5) dostaneme

$$\begin{aligned} 3q &= (p + 4q) - (p + q) = s^2 - r^2 = (s - r)(s + r), \\ 3p &= 4(p + q) - (p + 4q) = 4r^2 - s^2 = (2r - s)(2r + s). \end{aligned}$$

Z první rovnosti vychází $s - r \mid 3q$, tj. $s - r \in \{1, 3, q, 3q\}$. Případy $s - r = q$ a $s - r = 3q$ však můžeme vyloučit, protože jim odpovídají rovnosti $s + r = 3$ a $s + r = 1$, které jsou v rozporu s podmínkou $2 < r < s$. Zbývající dva případy prověříme:

- ▷ Z $s - r = 1$ vyplývá $2r + s = 3r + 1 > 3$ a $2r - s = r - 1 > 1$. Z druhé rovnosti pak plyne $2r + s = p$ a $2r - s = 3$, takže $r = 4$, $s = 5$, $p = 13$, $q = 3$.
- ▷ Z $s - r = 3$ vyplývá $2r + s = 3r + 3 = 3(r + 1) > 3$, takže podle druhé rovnosti platí $2r - s < p$ čili $2r - s \in \{1, 3\}$. Kdyby však bylo $2r - s = 3$, vyšlo by $r = 6$, $s = 9$ a $p = 2r + s = 21$, což není prvočíslo. Musí tedy být $2r - s = 1$ a $2r + s = 3p$, takže $r = 4$, $s = 7$, $p = 5$, $q = 11$.

Pokud $d = 3$, musejí být oba činitele v (4) trojnásobkem čtverců, existují tedy přirozená čísla $1 < r < s$ taková, že platí

$$\begin{aligned} p + q &= 3r^2, \\ p + 4q &= 3s^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Odtud

$$\begin{aligned} 3q &= (p + 4q) - (p + q) = 3(s - r)(s + r), \\ 3p &= 4(p + q) - (p + 4q) = 3(2r - s)(2r + s). \end{aligned}$$

Proto $s - r = 1$ a $2r - s = 1$, tedy $r = 2$, $s = 3$ a $p = 7$, $q = 5$.

Ve všech případech nalezené hodnoty p , q a příslušné hodnoty r , s splňují rovnosti (5), resp. (6), výraz (4) je tedy opravdu čtverec.

Úloha má tři řešení (p, q) , a to $(13, 3)$, $(5, 11)$, $(7, 5)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu dejte 2 body za rozklad (1), další 2 body za odvození rozkladu (3) a 2 body za dokončení řešení. Při druhém postupu dejte 2 body za nalezení rozkladu (4), 2 body za vyšetření případu $d = 1$ a 2 body za vyšetření případu $d = 3$. Pokud řešitel úlohu nevyřeší, ale zkoušením najde alespoň dvě ze tří řešení, udělte mu 1 bod.

3. Upravujme druhou mocninu výrazu $V = 2a + b + c$, který je zřejmě kladný. Při tom výhodně využijeme daný vztah $ab + bc + ca = 16$:

$$\begin{aligned} V^2 &= (2a + b + c)^2 = 4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 2bc = \\ &= 4a^2 + b^2 - 2bc + c^2 + 4(ab + bc + ca) = 4a^2 + (b - c)^2 + 4 \cdot 16. \end{aligned}$$

Podle zadání je $a^2 \geq 9$ a zřejmě $(b - c)^2 \geq 0$, takže $V^2 \geq 4 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 100$. Proto $V \geq 10$.

Zkusme najít taková čísla a , b , c , jež vyhovují zadání a pro něž $V = 10$. Aby v odvozených nerovnostech nastala rovnost, musí být $b = c$ a $a = 3$, takže pak $ab + bc + ca = 6b + b^2$. Hledáme proto $b > 0$ takové, že $6b + b^2 = 16$. Tato kvadratická rovnice má kořeny 2 a -8 . Vyhovující trojici (a, b, c) je tedy $(3, 2, 2)$ a nejmenší možná hodnota daného výrazu je vskutku 10.

Jiné řešení. Z dané rovnosti $ab + bc + ca = 16$ vyjádříme $c = (16 - ab)/(a + b)$ a dosadíme do výrazu V , jehož nejmenší hodnotu hledáme:

$$\begin{aligned} V &= 2a + b + c = 2a + b + \frac{16 - ab}{a + b} = \\ &= a + b + \frac{16 + a^2}{a + b} \geq 2\sqrt{16 + a^2} \geq 2\sqrt{16 + 3^2} = 10. \end{aligned}$$

Při první nerovnosti jsme využili známou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvojice kladných čísel $a + b$ a $(16 + a^2)/(a + b)$.

Trojici, pro niž platí $V = 10$, najdeme stejně snadno jako v prvním řešení; rovnost obou průměrovaných čísel nastane, právě když $a + b = \sqrt{16 + a^2}$, což pro $a = 3$ ihned vede k hodnotě $b = 2$, takže ze vzorce $c = (16 - ab)/(a + b)$ dostaneme i $c = 3$.

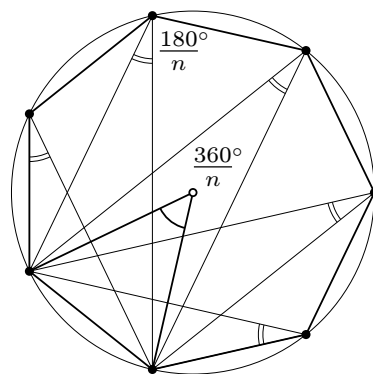
Poznámka. Klíčovou nerovnost $V \geq 10$ získáme i následující úpravou:

$$\begin{aligned} V &= 2a + b + c = (a + b) + (a + c) \geq \\ &\geq 2\sqrt{(a + b)(a + c)} = 2\sqrt{a^2 + (ab + bc + ca)} \geq 2\sqrt{3^2 + 16} = 10, \end{aligned}$$

v níž jsme využili nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou kladných čísel $a + b$ a $a + c$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za důkaz, že $V \geq 10$, a 2 body za nalezení odpovídající trojice čísel a, b, c (třeba i uhodnutím – nebylo úkolem všechny takové trojice najít), jež vyhovuje zadání a pro níž $V = 10$.

4. Ukážeme, že největší možné φ dostaneme, rozmístíme-li body ve vrcholech pravidelného n -úhelníku (obr. 3). V takovém případě má každý uvažovaný trojúhelník opsanou kružnici totožnou s kružnicí opsanou zvolenému n -úhelníku, takže všechny uvažované vnitřní úhly jsou obvodovými úhly příslušnými některé tětivě této kružnice. Nejmenší úhel bude ten ostrý úhel, který přísluší nejkratší tětivě, tj. kterékoli z n shodných stran zvoleného n -úhelníku (všechny ostatní tětivy jsou úhlopříčkami, jsou tedy delší). Jelikož středový úhel příslušný takové straně má velikost $360^\circ/n$, má odpovídající nejmenší úhel v tomto případě velikost $\varphi = 180^\circ/n$.

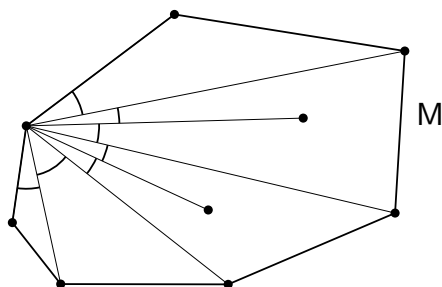


Obr. 3

Zbývá ukázat, že pro libovolné rozmístění n bodů platí $\varphi \leq 180^\circ/n$. Tvrzení dokážeme sporem. Pripusťme, že n daných bodů je rozmístěno tak, že všechny uvažované

úhly jsou větší než $180^\circ/n$. Sestrojme konvexní obal této množiny bodů, tj. nejmenší konvexní mnohoúhelník M , který obsahuje všechny dané body (jež podle zadání neleží v přímce). Označme m počet bodů, které se nacházejí na hranici mnohoúhelníku M . Zřejmě $m \leq n$ (vrcholy konvexního obalu tvoří podmnožinu dané množiny n bodů).

Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníku M je roven $(m-2) \cdot 180^\circ$.¹ Sestrojme úsečku mezi každými dvěma z daných n bodů. Z každého vrcholu mnohoúhelníku M vychází $n-1$ takových úseček. Dvě z nich jsou stranami M a zbývající „dělí“ vnitřní úhel při tomto vrcholu na $n-2$ menších úhlů (obr. 4). Podle předpokladu má každý z těchto



Obr. 4

úhlů velikost větší než $180^\circ/n$, tedy každý vnitřní úhel mnohoúhelníku M je větší než $(n-2) \cdot 180^\circ/n$. Vrcholů je m , takže celkový součet vnitřních úhlů v M je větší než $m(n-2) \cdot 180^\circ/n$. Platí proto následující nerovnost, kterou dále upravíme:

$$\begin{aligned}(m-2) \cdot 180^\circ &> m(n-2) \cdot \frac{180^\circ}{n}, \\ n(m-2) &> m(n-2), \\ mn - 2n &> mn - 2m, \\ m &> n.\end{aligned}$$

To ovšem odporuje nerovnosti $m \leq n$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za důkaz, že pokud jsou body vrcholy pravidelného n -úhelníku, je $\varphi = 180^\circ/n$, a 4 body za důkaz, že vždy platí $\varphi \leq 180^\circ/n$. Pokud žák odvodí vztah $\varphi \leq 180^\circ/n$ pouze pro případ, kdy $m = n$ (tedy pro takové konfigurace, v nichž všechny body leží na hranici konvexního obalu), udělte ze 4 bodů pouze 2.

¹ Toto známé tvrzení lze snadno dokázat tak, že m -úhelník rozdělíme na $m-2$ trojúhelníků majících vrcholy v jeho vrcholech, anebo si všimneme, že součet vedlejších úhlů při všech m vrcholech je právě 360° , takže součet vnitřních úhlů m -úhelníku je $m \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ$.