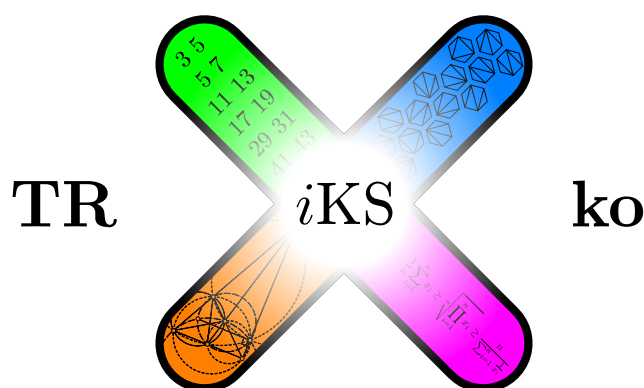




Úloha 1. Najděte všechna přirozená čísla n , pro která je $2^n + 7^n$ druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

Úloha 2. Najděte všechna $a \in \mathbb{R}$, pro která existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x)) = f(x) + x,$$

$$f(f(x) - x) = f(x) + ax.$$

Úloha 3. Mějme šachovnici $n \times n$. Na začátku je v každém políčku 999 kamínků. Dva hráči, Radek a Lenka, postupně každý ve svém tahu zvolí 1 sloupec, nebo 1 řádek, a odeberou z každého políčka v tomto sloupci/řádku jeden kamínek. Začíná Lenka a hráči se v tazích pravidelně střídají. První hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Najděte všechna n , pro která má Lenka vítěznou strategii.

Úloha 4. Nechť je každý bod roviny obarven jednou ze 4 barev. Dokažte, že existují dva body se vzdáleností 1 nebo $\sqrt{3}$, které mají stejnou barvu.

Úloha 5. Buď ABC trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C . Buď D střed AC , E pata výšky z bodu C na BD . Dokažte, že tečna ke kružnici opsané trojúhelníku AEC v bodě C je kolmá na AB .