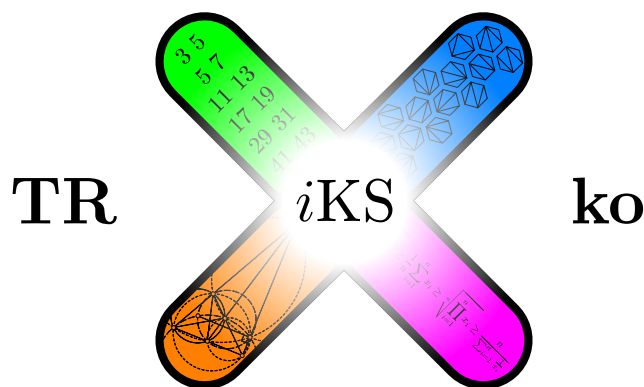




Úloha 1. Sú dané polynómy $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ a $Q(x) = x^2 + x + 2001$. Vieme, že polynóm $P(x)$ má tri rôzne reálne korene a polynóm $P(Q(x))$ nemá žiadne reálne korene. Dokážte, že $64P(2001) > 1$.

Riešenie. Prepíšme $P(x)$ do tvaru $(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)$ a $Q(x)$ do tvaru $(x - 1/2)^2 + 2001 - 1/4$. Vidíme, že Q môže nadobúdať všetky hodnoty $\geq 2001 - 1/4$, teda $k_{1,2,3}$ musia byť menšie ako $2001 - 1/4$. Každý z činiteľov v $P(2001)$ je teda väčší ako $1/4$ a ich súčin $> 1/4^3 = 1/64$. QED. $\square$

Úloha 2. Dokážte, že rovnica $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ nemá celočíselné riešenia.

Riešenie. Využijeme vzorec $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy)$ a prepíšeme danú rovnicu do tvaru

$$(x + y)(x^2 + y^2 - 5xy) = 4.$$

Oba výrazy v zátvorkách musia byť rovné 1, -1, 2, -2, 4 alebo -4. Prepíšme ešte druhú zátvorku ako $(x+y)^2 - 7xy$ a môžeme vyskúšať všetky možnosti pre $x+y$ a dopočítať, akú hodnotu musí mať $7xy$. Tá nikdy nevyjde deliteľná 7, žiadne celočíselné riešenie teda neexistuje. $\square$

Úloha 3. Je daný tetivový štvoruholník $ABCD$ s opísanou kružnicou k . Dotyčnice ku k v bodoch A resp. B pretínajú priamky BC resp. AD v bodoch K a M tak, že bod A leží na úsečke DM a bod B na úsečke CK . Dokážte, že ak $|AM| = |AD|$ a $|BK| = |BC|$, potom je $ABCD$ lichobežník.

Riešenie. Mocnosť bodu M ku k hovorí, že $|MB| = \sqrt{|MA||MD|} = \sqrt{2}|AD|$. Podobne $|KA| = \sqrt{2}|BC|$. Uhly MBA a KAB sú rovnaké zo symetrie. Aplikovaním sínusovej vety na trojuholníky ABM , ABK dostaneme $\sin |\angle MAB| = \sin |\angle KBA|$. Keďže oba uhly musia byť medzi 0° a 180° , máme dve možnosti.

Ak $|\angle MAB| = 180^\circ - |\angle KBA|$, je $|\angle BAD| + |\angle ABC| = 180^\circ$, $AD \parallel BC$ a teda $ABCD$ je lichobežník.

Ak $|\angle MAB| = |\angle KBA|$, je $|\angle ADC| = 180^\circ - |\angle ABC| = 180^\circ - |\angle BAD|$, $AB \parallel CD$ a teda $ABCD$ je zasa lichobežník. $\square$

Úloha 4. V kruhu stojí $2n$ ľudí ($n \geq 2$) očíslovaných zaradom od 1 do $2n$, kde každý človek pozná práve jedného iného (známosti sú vzájomné). Rozhodnite, či je možné rozdeliť ich do dvoch skupín tak, že žiadni dvaja ľudia v jednej skupine sa nepoznajú a každý človek má aspoň jedného suseda, s ktorým nie je v skupine.

Riešenie. Najprv rozdelíme ľudí do dvojíc, kde v každej dvojici sú ľudia číslo $2k$ a $2k - 1$ ($1 \leq k \leq n$). Priradzujeme teraz ľudí do skupín tak, aby obaja ľudia v dvojici patrili do rôznych skupín.

To urobíme pažravým algoritmom: nájdeme nepriradeného človeka, dáme ho do skupiny 1, jeho známeho aj suseda z dvojice dáme do skupiny 2, ich známych a susedov z dvojíc do skupiny 1 atď. V prípade, že sa takto nedostaneme k sporu - nepriradzujeme nikoho do oboch skupín, máme na konci platné rozdelenie.

Ostáva dokázať, že skutočne nikoho nepriradíme do oboch skupín. Najelegantnejšie to ide z pohľadu teórie grafov. Máme graf, ktorého vrcholy sú ľudia, každej známosti zodpovedá hrana a pridali sme hrany medzi susedmi v každej dvojici; potom potrebujeme ukázať, že je graf bipartitný - potom sa dá rozdeliť na dve časti rovnakej veľkosti. Bipartitnosť je ekvivalentná neexistencii cyklu nepárnej dĺžky. Graf je ale skonštruovaný tak, že každý vrchol má stupeň 2 - každý súvislý komponent je teda cyklus a keďže vrcholy sú rozdelené do disjunktných dvojíc tak, že každá dvojica patrí do jedného komponentu, každý cyklus má párnú dĺžku. $\square$

Úloha 5. *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 1. Dokážte nerovnosť*

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Riešenie. Z nerovnosti medzi aritmetickým a harmonickým priemerom plynie pre $a + b + c = 1$

$$\frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c} = \frac{4}{1+b}.$$

Cyklickou zámenou premenných a, b, c a sčítaním výsledných troch nerovností dostaneme (po vydelení 2) dokazovanú nerovnosť. $\square$