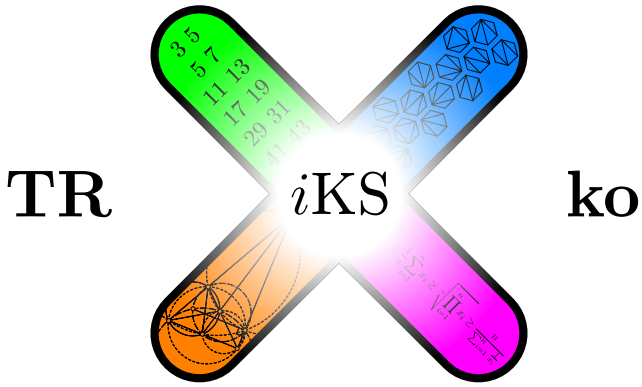


Úloha 1. *Pro po dvou různá, nezáporná, reálná a, b, c dokaž*

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(b-a)^2} > 2.$$

Řešení. BÚNO je a nejmenší z nich. Pak můžeme najít kladná x, y taková, že $b = a + x$, $c = a + y$ a můžeme udělat následující úpravy

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2}{(x-y)^2} + \frac{(a+x)^2}{y^2} + \frac{(a+y)^2}{x^2} \geq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} > 2,$$

kde poslední nerovnost je ekvivalentní s $(x^2 - y^2)^2 > 0$ a jsme hotovi. □

Úloha 2. *Mějme množinu $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ a její podmnožinu $S \subseteq A$ takovou, že žádné dva součty $a + b$ pro $a \neq b$, $a, b \in S$ nejsou stejné. Kolik nejvíce prvků může S mít?*

Řešení. Nejvýše 5. Množina $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ splňuje podmínky. Kdyby $|S| \geq 6$, potom by bylo alespoň 15 součtů $a + b, a, b \in S$ a zároveň $3 \leq a + b \leq 17$. Musel by tedy být dosažen každý součet z tohoto intervalu, tedy i 3 a 17, proto $1, 2, 8, 9 \in S$, jenže $1 + 9 = 2 + 8$, což je spor. □

Úloha 3. *Mějme přirozené m. Dokažte, že počet párů přirozených čísel (x, y) splňujících:*

- $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$
- $2y \leq x - 1$

je sudé číslo.

Řešení. Na první rovnici se podíváme modulo 4:

$$x^2 - 3y^2 + 2 \equiv 16m \pmod 4,$$

$$x^2 - 3y^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

$$x^2 - 3y^2 + 4y^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

$$x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

z čehož plyne, že x i y jsou lichá čísla. Existují proto přirozená čísla a, b taková, že $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$. Dosazením do druhé podmínky ze zadání dostaneme

$$4b - 2 \leq 2a - 2,$$

$$2b \leq a,$$

Můžeme proto psát $a = 2b+c-1$ a $x = 4b+2c-3$ pro nějaké přirozené c. Dosazením do první podmínky v zadání dostaneme

$$16b^2 + 4c^2 + 9 + 16bc - 12c - 24b - 12b^2 - 3 + 12b + 2 = 16m,$$

$$4b^2 + 4c^2 + 16bc - 12c - 12b + 8 = 16m,$$

$$b^2 + c^2 + 4bc - 3b - 3c + 2 = 4m.$$

Rovnice je symetrická v b, c, takže je-li dvojice (b, c) řešením, tak bude řešením i (c, b). Zároveň neexistuje řešení, ve kterém by platilo $b = c$, protože by to znamenalo:

$$6b^2 - 6b + 2 = 4m,$$

$$2b(b - 3) \equiv 2 \pmod 4,$$

$$0 \equiv 2 \pmod 4$$

což je spor. Proto můžeme pomocí výše zmíněné symetrii popárovat všechna řešení. Jelikož dvojice (b, c) jednoznačně určuje dvojici (x, y) a nová rovnice je ekvivalentní původní, tak můžeme takto popárovat i dvojice řešení (x, y). Je-li tedy počet řešení konečný, tak musí být sudý.

Zbývá tedy pouze ukázat, že pro žádné m nemá rovnice nekonečně mnoho řešení. Umocněním nerovnice ze zadání na druhou (obě strany jsou nezáporné) dostaneme:

$$4y^2 \leq x^2 - 2x + 1,$$

$$x^2 - 3y^2 \geq 2x - 1 + y^2$$

z první podmínky zadání

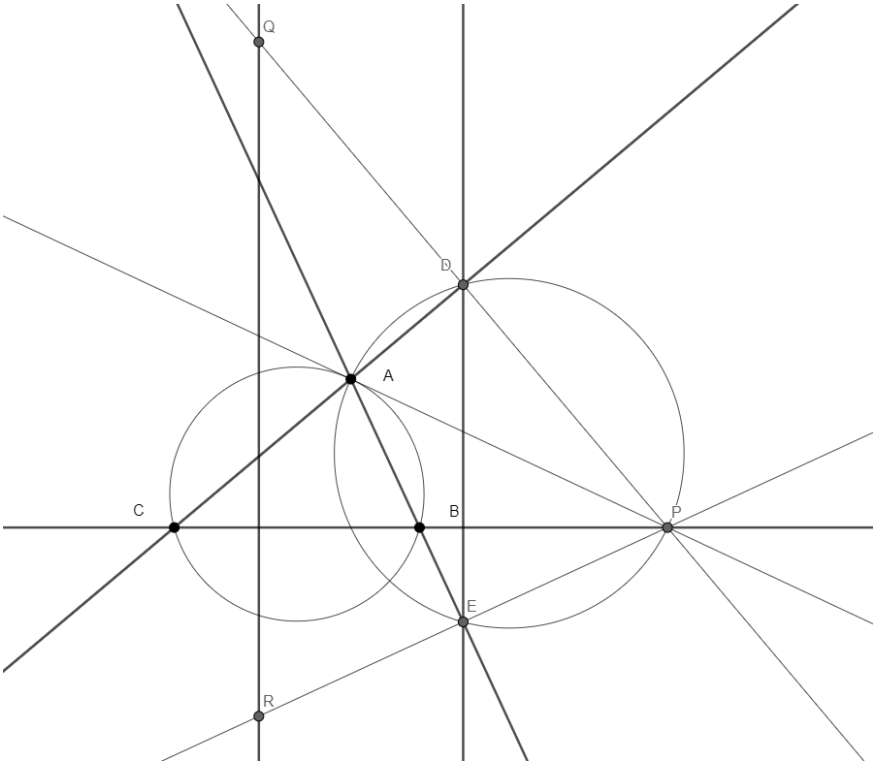
$$x^2 - 3y^2 = 16m - 2,$$

$$16m - 2 \geq 2x - 1 + y^2$$

z čehož plyne, že x i y jsou menší než $16m$, takže jich je vskutku konečně mnoho. □

Úloha 4. *Je dán $\triangle ABC$. Tečna v A ke kružnici opsané tomuto trojúhelníku protne přímku BC v bodě P. Body Q a R jsou obrazy bodu P v symetrii podle přímek AC a AB respektive. Ukaž, že přímka BC je kolmá na přímku QR.*

Řešení. Průnik přímek PQ a AC označíme D a průnik přímek PR, AB bude E. přímka ED je rovnoběžná s přímkou RQ (DE je střední příčka trojúhelníka PQR), tak stačí dokázat, že DE je kolmé na BC.



BÚNO P leží blíže k B, než k C, pak kvůli rovnosti úsekového a obvodového úhlu platí $|\angle PAB| = |\angle BCA| = |\angle PCD|$. Navíc zřejmě AE je kolmá na PE a AD je kolmá na PD, tak $PDAE$ je tětivový čtyřúhelník. Proto platí $|\angle PDE| = |\angle PAE| = |\angle PAB| = |\angle PCD|$. Troúhelník CDP je pravoúhlý, takže $|\angle DPC| = 90 - |\angle PDE|$ a máme hotovo. □