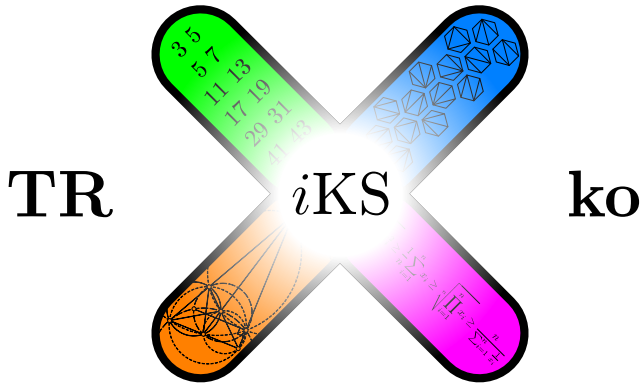


Úloha 1. *Máme velkou klasicky obarvenou šachovnici* 10×14 *a na každém políčku může ležet tuleň. Zrovna platí, že v každém řádku i sloupci je lichý počet tuleňů. Dokaž, že na černých políčkách je dohromady sudý počet tuleňů.*

Řešení. Postupně si očíslujeme řádky a sloupce a budeme BÚNO předpokládat, že políčko $(1, 1)$ je bílé. Políčko (i, j) je pak černé právě když $i + j$ je liché. Celkový počet tuleňů v lichých sloupcích je díky podmínce ze zadání lichý. Obdobně počet tuleňů v lichých řádcích. Součet těchto dvou čísel je sudý a rovněž je to počet tuleňů na všech černých políčkách plus dvojnásobek počtu tuleňů na bílých políčkách (i, j), kde i a j jsou lichá. Takže i celkový počet tuleňů na černých políčkách musí být sudé číslo. □

Úloha 2. *Mějme zadaný bod* A *a dvě polopřímky, které z něj vycházejí a svírají ostrý úhel. Nechť je na jedné polopřímce bod* B *a na druhé bod* C *s tím, že součet* $AB + AC$ *je konstantní. Dokaž, že existuje pevný bod* $D \neq A$ *takový, že kružnice opsaná* ABC *prochází bodem* D *pro všechny možné volby bodů* B *a* C*.*

Řešení. Hledaný bod D je průsečík osy zadaného úhlu s kružnicí opsanou ABC, neboli Švrčkův bod. Už víme, že leží na ose úhlu, takže stačí dokázat, že je vzdálenost AD stejná pro všechny volby bodů B a C. Je známé, že osa úhlu v trojúhelníku půlí protější oblouk, takže $CD = BD$. Když se napíšou kosinové věty v trojúhelnících ACD a ABD pro shodné úhly ϕ u vrcholu A, a ty se odečtou, tak vyjde $0 = CD^2 - BD^2 = AC^2 - AB^2 - 2AD(AC - AB)\cos\phi$. Neboli $AD = \frac{AC^2-AB^2}{2(AC-AB)\cos\phi} = \frac{AC+AB}{2\cos\phi}$, což tedy vychází stejně pro všechny volby bodů B a C. Pokud náhodou $AC = AB$, tak střed kružnice opsané leží na ose úhlu, úhel DBA je pravý, napíše se v trojúhelníku DBA vztah pro $\cos\phi$ a vyjde to stejné. □

Úloha 3. *Máme kulatý stůl a kolem něho sedí 2018 mladých lidí, z toho je nejvýše 672 chlapců. Řekneme, že dívka* D *je v silné pozici, pokud když od ní postupně počítáme okolo stolu libovolným směrem a libovolně daleko, vždy je počet dívek ostře větší než počet chlapců (*D *do toho započítává i sama sebe). Dokaž, že v libovolném uspořádání lidí okolo stolu vždy existuje dívka, která je v silné pozici.*

Řešení. Mějme d dívek a c chlapců. Nazveme pozici pravotočivě silnou, pokud když od ní počítáme ve směru hodinových ručiček, počet dívek vždy převyšuje počet chlapců. Žádná dívka, která je hned následovaná chlapcem není v pravotočivě silné pozici. Nicméně takový sousedící pár dívka-chlapec nemá žádný vliv na pravotočivou

sílu všech ostatních pozic. Takže všechny takovéto páry můžeme postupně odstranit, dokud u stolu nezbude pouze $d-c$ dívek. Ty jsou pak všechny už jistě v pravotočivě silné pozici. Analogicky můžeme definovat levotočivě silnou pozici a zbude nám opět nějakých $d-c$ dívek. Nicméně tyto dvě množiny dívek mají neprázdný průnik, protože $2(d-c) > d$. Takže existuje dívka, která je v silné pozici. □

Úloha 4. *Nechť a, b, c jsou reálná čísla, taková že $|a| > 2$ a zároveň*

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$$

Dokažte, že existují taková reálná x a y, pro než platí:

$$a = x + \frac{1}{x}, b = y + \frac{1}{y}, c = xy + \frac{1}{xy}$$

Řešení.

$$(a^2-4)(b^2-4) = a^2b^2 - 4(a^2+b^2-4) = (ab)^2 - 4(abc - c^2) = (ab-2c)^2 \geq 0 \quad (1)$$

Z podmínky $|a| > 2$ a z rovnice (1) plyne $|b| \geq 2$. Rovnice $a = x + \frac{1}{x}$ je ekvivalentní s rovnící $x^2 - ax + 1 = 0$. Diskriminant této rovnice je $a^2 - 4 > 0$ (víme, že je vetší ze zadání). Tudíž umíme nalézt takové x. Analogicky umíme najít y, které splňuje podmínku $b = y + \frac{1}{y}$.

$$(x + \frac{1}{x})^2 = a^2$$

$$(x - \frac{1}{x})^2 = a^2 - 4$$

Analogicky pro y a b. Potom

$$(ab-2c)^2 = (a^2-4)(b^2-4) = (x - \frac{1}{x})^2(y - \frac{1}{y})^2.$$

Při změně x za $\frac{1}{x}$ se nezmění hodnota a. Na druhou stranu se změní hodnota znaménka $x - \frac{1}{x}$. Analogicky znovu pro y a b.

$$(ab-2c) = \pm(x - \frac{1}{x})(y - \frac{1}{y})$$

$$ab = (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$$

Pokud je znaménko v první rovnici +, tak prohodíme x za $\frac{1}{x}$ a dostaneme znaménko -. Z předchozích dvou rovnic dostáváme:

$$c = \frac{1}{2}(xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + xy - \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{1}{xy}) = xy + \frac{1}{xy}$$

Což je přesně to, co jsme chtěli dokázat. □

Úloha 5. *Najděte všechna přirozená a a b, taková že*

$$ab + a + b | a^2 + b^2 + 1$$

Řešení. BÚNO $a > b$ (pokud $a = b$, pak $a = b = 1$)

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{a + b + ab} = k$$
$$a^2 + a(-kb - k) + b^2 - kb + 1 = 0$$

Nyní využijme Vieta jumping. Musí existovat a_1, které také splňuje rovnici stejně jako a (kvadratická rovnice s fixním b).

$$a + a_1 = kb + k \tag{2}$$
$$aa_1 = b^2 + 1 - kb \tag{3}$$

a_1 je určité celé číslo z rovnice (2).

$$a_1 = \frac{b^2 - kb + 1}{a} < \frac{b^2 - kb + 1}{b} = b - k + \frac{1}{b} < b$$

Poslední krok platí, protože $b > 1$ (pokud $b = 1$, pak $a = 4$) a zároveň $k \geq 1$. Nový prvek je tedy vždy menší než předešlé dva(přesněji $a > b > a_1$). Takhle tedy můžeme tvořit nové dvojice řešení se stále menším součtem tím, že vždy zmenšíme to větší číslo z dvojice. Ve chvíli, kdy začínáme se dvěmi čísly většími než 1, tak můžou po určité době nastat tři případy. Zatímco jedno číslo - BÚNO a - bude větší než 1, tak druhé číslo b se buď zmenší na 1, 0, nebo se stane rovnou záporným.

Pokud $b = 1$, pak lze jednoduše dopočítat $a = 4$. Jelikož k se nemění přes všechny kroky, tak $k = 2$. Dalším zmenšením čísla a dostaneme dvojici $(a_1, b) = (0, 1)$, která nás už nezajímá. Takto jsme dostali jednu větev řešení a všechny dvojice řešení v této větvi můžeme opět obdobně zpětně dotvořit. Začneme u dvojice $(a_1, b) = (1, 4)$ a indukcí ukážeme, že pokud $a_1 = n^2$, $b = (n + 1)^2$ a $k = 2$, tak $a = (n + 2)^2$. (Pro první tři prvky to platí $1, 4, 9$)

$$a = 2b + 2 - a_1 = 2n^2 + 4n + 2 + 2 - n^2 = (n + 2)^2$$

Což je přesně, to, co jsme chtěli dokázat. Takže tady dostáváme řešení tvaru $(n^2, (n+1)^2)$ a $((n + 1)^2, n^2)$, kde n je přirozené.

Pokud $b = 0$, tak jde dosazením do zadání dopočítat, že $a = \pm 1$, což je ve sporu s předpokladem, že $a > 1$.

Pokud rovnou $b < 0$ (a zároveň $a > 1$), tak když se podíváme na zlomek v zadání, tak čitatel je očividně kladný a jmenovatel záporný, tudíž k je záporné. Číslo k se ovšem v průběhu Vieta jumpingu nemění a pokud jsme začínali u kladných a, b, tak musí nutně kladné, což je spor.

Pokud tedy existuje kladné řešení, tak je buď triviální $(1, 1)$ nebo je součástí větve, která obsahuje i dvojici $(1, 4)$. Takže řešením jsou dvojice $(1, 1)$,$(n^2, (n + 1)^2)$ a $((n + 1)^2, n^2)$, kde n je přirozené.

□