TRiKSko

Úloha 1. *Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v dvoch bodoch P, Q. Priamka l pretína kružnicu k_1 v bodoch A, C a kružnicu k_2 v bodoch B, D tak, že body ležia na priamke v poradí A, B, C, D, bod B leží vnútri kružnice k_1 a bod C vnútri kružnice k_2. Dokážte, že $|\angle APB| = |\angle CQD|$.*

Úloha 2. *Nájdite všetky reálne riešenia rovnice $\left\{(x+1)^3\right\} = x^3$, kde $\{z\}$ označuje desatinnú časť čísla z, teda číslo, ktoré vznikne keď od z odčítame najväčšie celé číslo $\leq z$.*

Úloha 3. *Dokážte, že je možné prirodzené čísla roztriediť do 100 neprázdnych disjunktných množín tak, aby pre ľubovoľnú trojicu a, b, c takú, že $a + 99b = c$, patrili aspoň dve z čísel a, b, c do tej istej množiny.*

Úloha 4. *Je daný štvorsten $ABCD$ s vpísanou sférou s. Bod dotyku s so stenou ABC označme T. Pripísaná sféra k stene ABC sa tejto steny dotýka v bode U. Dokážte, že priamka AU je obrazom priamky AT v osovej súmernosti podľa osi uhla $\angle BAC$.*

Úloha 5. *Je daná postupnosť nezáporných čísel $\{a_i\}_{i=1}^n$. Pre $1 \leq k \leq n$ definujme*

$$m_k = \max_{(l)} \frac{a_{k-l+1} + \cdots + a_k}{l} \quad \forall\ 1 \leq l \leq k\,.$$

Dokážte, že pre ľubovoľné $\alpha > 0$ je počet indexov k takých, že $m_k > \alpha$, menší ako $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{\alpha}$.