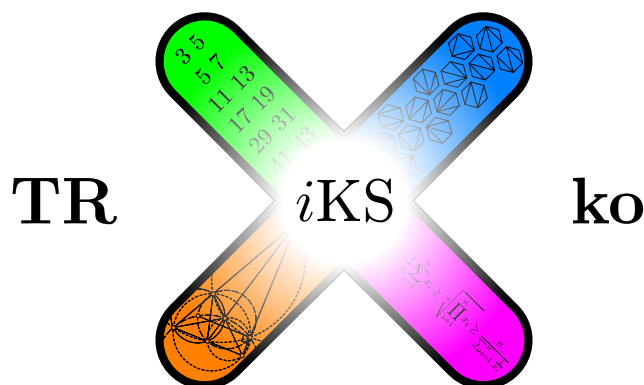




Úloha 1. Na stole leží v nějakém pořadí 100 karet s čísly $1, 2, \dots, 100$ tak, že čísla nejsou vidět. Karta s vyšším číslem porazí kartu s nižším, kromě jediné výjimky, kdy karta s číslem 1 porazí kartu s číslem 100.

Pavel ví jaká karta má jaké číslo. Ukažte, že umí Radovi dát 100 zpráv typu "tato karta porazí tamtu" a Rado potom dokáže jednoznačně určit čísla na každé kartě.

Řešení. Kdyby Pavel uměl Radovi říci, kde je karta 1 a kde karta 100, tak by mu stačilo 97 zpráv na to, aby Rado uměl určit zbylá čísla. Konkrétně jde o zprávy $2 < 3, 3 < 4, \dots, 98 < 99$, kde zpráva $i < j$ znamená, že ukáže na kartu s i a řekne, že ji porazí karta j .

Kdyby Pavel chtěl dát těchto 97 zpráv, potřeboval by na poslední tři zprávy ukázat kde je 1 a 100. Pokud dá zprávy $a < b, b < c$ a $c < a$, pak je jasné, že mezi a, b, c je 1 a 100. Zároveň 1 porazí právě jednu kartu a 100 je poražena právě jednou kartou, takže pokud zvolí $2 < c < 99$, tak mezi dříve zmíněnými 97 zprávami už dal informaci o tom, že c porazilo a bylo poraženo jinou kartou, než a, b . Pak je jasné, že c není 1 ani 100 a musí být $a = 100$ a $b = 1$.

Spojení těchto úvah nám dává konstrukci na tyto zprávy, takže jsme hotovi. $\square$

Úloha 2. Pro kladná reálná a, b, c taková, že $abc = 1$, dokažte

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Řešení. S využitím podmínky $abc = 1$ a CS zlomkobijce odhadneme levou stranu takto:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} = \sum_{cyc} \frac{(bc)^2}{ab+ac} \stackrel{(CS)}{\geq} \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2},$$

kde (CS) značí použití CS zlomkobijce.

Z nerovnosti mezi harmonickým a geometrickým průměrem platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$$

a máme hotovo.

□

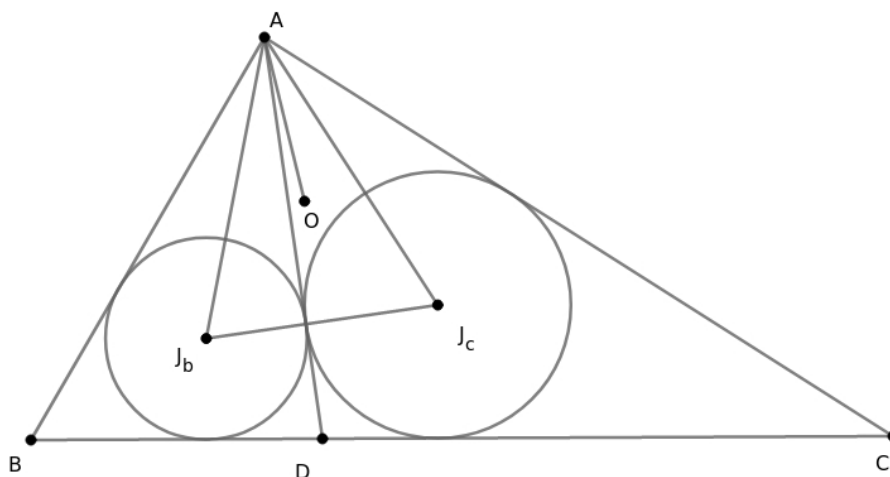
Úloha 3. Je dán trojúhelník ABC . Necht D je bod, ve kterém se kružnice vepsaná $\triangle ABC$ dotkne úsečky BC . Středů kružnic vepsaných trojúhelníkům ABD a ADC nazveme postupně J_b a J_c .

Dokažte že střed kružnice opsané $\triangle AJ_bJ_c$ leží na ose úhlu $\angle BAC$

Řešení. Nejprve si všimneme, že body dotyku kružnice vepsané dělí strany trojúhelníka na šest úseček, které jsou po dvou stejně dlouhé, proto

$$|AB| + |CD| = |AC| + |BD|.$$

Bod dotyku kružnice se středem J_b a J_c a úsečkou AD nazveme postupně X a Y . Pak můžeme využít stejný argument jako dříve a psát následující rovnosti:



$$|AC| + |DY| = |DC| + |AY|,$$

$$|BD| + |AX| = |AB| + |DX|.$$

Po součtu a úpravě:

$$|DY| + |AX| = |AY| + |DX|.$$

Z toho usoudíme, že $X = Y$ a kolmice z J_b a J_c na AD protnou AD ve stejném bodě, takže J_bJ_c je kolmé na AD a přímka AD je tedy výška $\triangle AJ_bJ_c$. Střed kružnice opsané $\triangle AJ_bJ_c$ nazveme O . Víme, že opsiště a kolmiště jsou isogonální kamarádi, proto $\angle DAJ_c = \angle J_bAO$, pak

$$\angle BAO = \angle BAJ_b + \angle J_bAO = \angle BAJ_b + \angle DAJ_c = \frac{1}{2}\angle BAC,$$

tedy O leží na ose úhlu $\angle BAC$.

□