

## Zadání 5. série

**Termín odeslání:** 18. prosinec 2017

**Adresa:** Korespondenční seminář iKS  
KAM MFF UK  
Malostranské náměstí 25  
118 00 Praha 1  
Czech republic

**Úloha A5.** Verča našla v ledničce  $2n$  reálných čísel, která nejsou všechna stejná. Povšimla si, že kdykoliv jednu polovinu z těchto čísel dá do mrazáku a druhou do trouby, tak je součet čísel v troubě roven součinu čísel v mrazáku. Pro jaká  $n$  se jí to mohlo stát?

**Úloha C5.** Štěpán poslal Filipovi a Radovi dva provázky, spolu s informací, jak jsou dlouhé. Poté se odehrála následující mailová konverzace:

Š: „Poslal jsem vám dva různě dlouhé provázky, jejichž délka v centimetrech je

$$a - \frac{1}{3^b} - \frac{1}{3^{b+c+1}},$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou přirozená čísla.“

F: „To je zajímavé. Ale neumím říct, který z nich je delší.“

R: „Já taky ne.“

F: „Já taky ne.“

R: „Já taky ne.“

Š: „Je jedno, kolikrát si tohle řeknete, stejně nebudete vědět, či je delší.“

F: „To je fakt zajímavá informace. Ale pořád nevím, kdo má větší délku.“

R: „Já taky ne.“

F: „Já taky ne.“

Š: „Opět, je jedno, kolikrát si tohle řeknete, stejně nebudete vědět, který z provázků je delší.“

F: „Ha. No, furt nevím, kdo má ten delší.“

R: „Já taky ne.“

F: „Já taky ne.“

R: „Já taky ne.“

Š: „Ve skutečnosti, je jedno, kolikrát uděláme tento malý rozhovůrek, kde budete cik-cak tvrdit, že nevíte, kdo má delší provázek a já vám řeknu, že je jedno, kolikrát si to řeknete a že to stejně nezjistíte, protože to ani z tohoto prohlášení nezjistíte. Navíc, pokud bych zopakoval předchozí větu ještě jednou, byla by stále pravdivá. A to dokonce i kdybych ji zopakoval ne jednou, ale i dvakrát, třikrát, ba i tisíckrát.“

F: „To je fakt super informace. Ale pořád neumím říct, který z nich je delší.“

R: „Já taky ne.“

F: „Já taky ne.“

Š: „Jo, pořád je jedno, kolikrát si teď navzájem řeknete, že to furt nevíte, pořád to nebudete vědět. A i když vám teď tuhle větu řeknu dvatisícesedmnáctkrát, pořád to vědět nebudete.“

F: „Zajímavé. Ale pořád nevím, kdo má větší kus.“

R: „Já taky ne.“

F: „Já taky ne.“

R: „Já taky ne.“

F: „Ahá! Tak už vím, či provázek je delší!“

Jak dlouhý byl Filipův provázek?

**Úloha N5.** Davidova oblíbená prvočísla  $p$  a  $q$  splňují rovnici

$$p^3 + 107 = 2q(17q + 24).$$

Najděte všechny možné takové dvojice prvočísel  $p, q$ .

**Úloha G5.** Malý Jakub si nakreslil rovnostranný trojúhelník  $PQR$  a obrázek schoval na půdu. Když Jakub vyrostl a obrázek náhodou objevil, dokreslil si do něj kružnici opsanou a vepsanou se společným středem  $A$ , středový obraz bodu  $R$  podle bodu  $Q$ , který označil  $S$ , a dále body dotyku tečen z bodu  $S$  ke kružnici opsané trojúhelníku  $PQR$ , které označil  $X$  a  $Y$ . Ten z průsečíků přímky  $XY$  s kružnicí vepsanou, který leží blíž k bodu  $Q$ , označil  $K$ . Bod dotyku tečny z bodu  $S$  ke kružnici vepsané, který neleží na úsečce  $QR$ , označil  $B$  a průsečík úsečky  $SB$  s kružnicí opsanou označil  $U$ . Dokažte, že čtyřúhelník  $KUBA$  je tětivový.