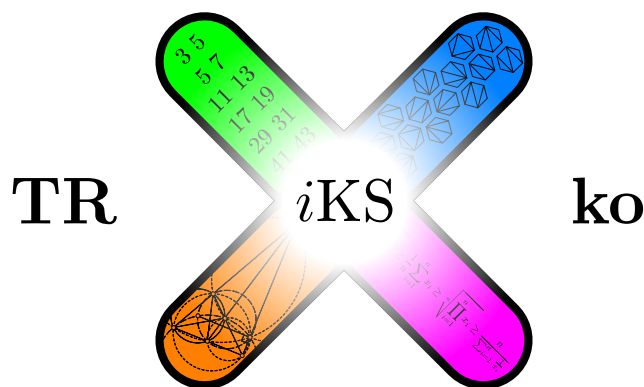




**Úloha 1.** Ať  $n \in \mathbb{N}$ , dále mějme celá čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  splňující  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Na stole na sobě leží dva soustředné kruhy. Na obvodu menšího jsou postupně po směru hodinových ručiček v pravidelných intervalech napsaná čísla  $1, 2, \dots, n$ , na obvodu většího jsou naopak napsaná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Kruhy lze proti sobě natočit do  $n$  různých poloh – v každé poloze jsou čísla na jejich obvodech spárovaná do dvojic. Pro danou polohu kruhů vždy vynásobme tyto lícující dvojice a všech  $n$  součinů sečtěme. Dokažte, pro každé dvě různé polohy obdržíme různá čísla.

*Řešení.* Ukážeme, že vzniklá čísla dávají různé zbytky. Búno ať jsou nejprve proti sobě dvojčky čísel  $i, a_i$ , jejich vynásobením a sečtením výsledků máme  $\sum_{i=1}^n i \cdot a_i$ . Pokud kruhy otočíme o  $k$  pozic, modulo  $n$  dostáváme výsledek  $\sum_{i=1}^n (i + k) \cdot a_i$ . Rozdíl výsledků je proto (modulo  $n$ ) roven

$$\sum_{i=1}^n (i + k) \cdot a_i - \sum_{i=1}^n i \cdot a_i \equiv \sum_{i=1}^n k \cdot a_i \equiv k \cdot \sum_{i=1}^n a_i \equiv k \pmod{n}$$

ze zadání. Pro různá natočení  $0 \leq k \leq n - 1$  proto nutně dostáváme různé zbytky modulo  $n$ , získaná čísla tedy musí být po dvou různá. □

**Úloha 2.** Jsou dána tři různá nenulová reálná čísla  $a, b, c$  splňující

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Součin  $abc$  je navíc v absolutní hodnotě různý od 1. Dokažte, že  $a = b = c$ .

*Řešení.* Ekvivalentní úpravou první rovnosti dostáváme

$$a - b = \frac{b - c}{bc}.$$

Cyklickým přejmenováním proměnných máme další dvě takové rovnosti. Pro spor ať se některá dvě čísla nerovnájí, búno  $a \neq b$ . Potom využitím tří získaných rovností dostáváme

$$a - b = \frac{b - c}{bc} = \frac{c - a}{bc \cdot ca} = \frac{a - b}{bc \cdot ca \cdot ab}.$$

Vydělením nenulovým  $a - b$  a úpravou dostáváme  $(abc)^2 = 1$ , což je ve sporu s  $|abc| \neq 1$  ze zadání. □

**Úloha 3.** Číslo  $0 < a < 1$  vznikne tak, že za jeho desetinnou čárku napíšeme desítkové zápisy čísel  $n!$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  v námi zvoleném pořadí (a každé z nich použijeme právě jednou). Může být  $a$  racionální?

*Řešení.* Nemůže. Pokud by  $a$  bylo racionální, musel by se jeho desetinný zápis od nějakého místa periodicky opakovat. Předpokládejme tedy, že by od nějakého místa měl periodu délky  $k \in \mathbb{N}$ . Protože desítkové zápisy používaných čísel vždy začínají nenulovou cifrou, tato perioda nemůže obsahovat samé nuly. Z čísel tvaru  $m!$  pro  $m > 10^k$  je však v předperiodě použito pouze konečně mnoho, některé z nich se tedy musí vyskytovat v periodické části zápisu  $a$ . To ale není možné, neboť všechna taková čísla obsahují úsek alespoň  $k$  nul.  $\square$

**Úloha 4.** V některém políčku čtvercového bitevního pole  $101 \times 101$  stojí tank. Letadlo tank nevidí, ale může vždy vystřelit na jedno libovolné políčko. Pokud je tank zasažen, přejede na políčko sousedící stranou s tím výchozím, v opačném případě zůstává na místě. Tank bude zničen, jakmile ho letadlo zasáhne alespoň dvakrát. Kolikrát nejméně musí letadlo vystřelit, aby tank určitě zničilo?

*Řešení.* Letadlo zničí tank právě tehdy, když splní následující podmínky

- (1) vystřelí do každého políčka alespoň jednou,
- (2) pokud vystřelilo do políčka  $A$  a přitom do některého sousedícího políčka ještě nikdy nevystřelilo, musí do  $A$  někdy vystřelit znovu.

Pokud by letadlo jednu z těchto podmínek nesplnilo, tak by zřejmým způsobem mohl přežít, splnění podmínky (1) přitom zaručuje první trefení tanku a splnění podmínky (2) zaručuje druhou trefu.

Hledejme tedy optimální strategii letadla. Políčka, do kterých vystřelí pouze jednou obarveme černě (jejich počet označme  $c$ ), ostatní obarveme bíle (jejich počet označme  $b = 101^2 - c$ ). Díky podmínce (2) žádná dvě černá políčka nesmí sousedit. Navíc bůno můžeme předpokládat, že letadlo nejprve vystřelí na všechna bílá políčka, poté na všechna černá a pak znovu na všechna bílá (pokud žádná dvě černá políčka nesousedí, je to fungující strategie, která pro dané obarvení políček spotřebovává minimální počet střel). Celkový počet střel je potom roven  $c + 2b = 2 \cdot 101^2 - c$ .

Dle předchozího tedy stačí maximalizovat  $c$ , tj. určit, kolik nejvýše políček šachovnice lze obarvit černě, aniž by se některá dvě černá políčka dotýkala stranou. Očividnou odpovědí je šachovnicové obarvení s černými políčky v rozích, které dává  $\frac{101^2+1}{2}$  černých políček. Jeho optimalitu snadno dokážeme indukcí přes lichá  $n$  popisující velikost strany šachovnice: pro šachovnici  $1 \times 1$  má optimální obarvení  $\frac{1^2+1}{2} = 1$  černé políčko. Předpokládejme, že pro šachovnici  $n \times n$  má optimální obarvení  $\frac{n^2+1}{2}$  černých políček. Šachovnice  $(n+2) \times (n+2)$  obsahuje navíc pouze oblast, kterou lze pokrýt  $n+1$  čtverci  $2 \times 2$ , v každém takovém čtverci  $2 \times 2$  ale může být nejvýše jedno černé políčko, což celkem dává nejvýše  $\frac{n^2+1}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)^2+1}{2}$  černých políček, jak jsme chtěli.

Celkem jsme tedy dokázali, že  $c \geq \frac{101^2+1}{2}$  a rovnost skutečně nastává pro šachovnicové obarvení, letadlo tedy potřebuje  $2 \cdot 101^2 - \frac{101^2+1}{2} = \frac{3 \cdot 101^2 - 1}{2}$  střel.  $\square$

**Úloha 5.** Střed kružnice  $\omega_2$  leží na kružnici  $\omega_1$ . Dále  $X$  leží na kružnici  $\omega_1$  a vně kružnice  $\omega_2$ . Dva body  $P, Q$  jsou zvoleny na  $\omega_2$  tak, aby  $XP$  a  $XQ$  byly tečny k  $\omega_2$

*z bodu  $X$ . Přímky  $XP$  a  $XQ$  se podruhé protínají kružnici  $\omega_1$  po řadě v bodech  $R$  a  $S$ . Dokažte, že přímka  $PQ$  půlí úsečku  $RS$ .*

*Řešení.* Střed kružnice  $\omega_2$  označme  $Y$ . Kružnice  $\omega_1$  je opsaná trojúhelníku  $XRS$ . Protože jsou přímky  $XR$  a  $XQ$  tečny kružnice  $\omega_2$ , leží její střed  $Y$  na ose úhlu  $\sphericalangle RXS$ . Bod  $Y$  je proto Švrčkův bod trojúhelníku  $XRS$  vůči vrcholu  $X$ . Kolmice z  $Y$  na  $RS$  tedy prochází středem  $M$  úsečky  $RS$ . Body  $P, Q$  jsou ale ze zadání po řadě paty kolmic z  $T$  na  $XR$  a  $XS$ . Body  $P, M, Q$  potom leží na Simsonově přímce odpovídající bodu  $D$  a trojúhelníku  $XRS$ , čímž jsme hotovi.  $\square$