TR *i*KS ko

Úloha 1. *Najděte všechny funkce $f : R \to R$ takové, že*

$$f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y).$$

Řešení. Nejprve dosadíme $x = 0$ a získáme $yf(f(0) + y) = 0$, pak si řekneme, že $y = -f(0)$ a vyjde $-f(0) \cdot f(0) = 0$, tedy $f(0) = 0$. Tohle po dosazení do prvního výsledku udělá $yf(y) = 0$, což pro nenulová y řekne $f(y) = 0$ a pro nulu to už známe, takže skutečně $f(y) = 0$. □

Úloha 2. *Najdi všechny trojice nezáporných celých čísel (x, y, z), $x \leq y$ takových, že $x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$.*

Řešení. Užijeme známé lemma, že pokud $p \equiv 3 \pmod 4$ je prvočíslo a $p|a^2 + b^2$, pak $p|a$ a $p|b$. (dokážu na konci tohoto důkazu).

$2016 = 7 \cdot 288$, takže pravá strana je dělitelná 7, když $z > 0$ a pak můžeme rovnici přepsat na $7(a^2 + b^2) = 3 \cdot 288 \cdot 2016^{z-1} + 11$. Protože je levá strana dělitelná 7, musí být $z = 1$ a dopočítáme $a^2 + b^2 = 125$ a najdeme 2 řešení $a = 2$, $b = 11$ a $a = 5$, $b = 10$, tedy trojice $(14, 77, 1)$ a $(35, 70, 1)$.

Pro $z = 0$ získáme $x^2 + y^2 = 80$. Řešení jsou tedy celkem 3. $(14, 77, 1)$, $(35, 70, 1)$ a $(4, 8, 0)$.

důkaz lemmatu: pro spor uvažujme, že p nedělí a, tedy nedělí ani b, ale z předpokladu víme, že pro nějaké celé k platí $k \cdot p = a^2 + b^2$, když se na to podíváme modulo p a upravíme, získáme $-1 \equiv (\frac{a}{b})^2 \pmod p$, jenže -1 není kvadratický zbytek po dělení prvočísla ve tvaru $4k + 3$ □

Úloha 3. *Nechť M je střed strany BC v trojúhelníku ABC. Kružnice opsaná ABM protne AC v různých bodech A a B_1. Kružnice opsaná AMC protne AB v různých bodech A a C_1. O je střed kružnice opsané AC_1B_1. Dokaž, že $OB = OC$*

Řešení. Z mocnosti bodu C ke kružnici opsané ABM máme $|CA| \cdot |CB_1| = |CM| \cdot |CB|$, kde levá strana rovnosti je zároveň mocnost C ke kružnici opsané AC_1B_1 obdobně pro bod B a kružnici procházející body ACM získáme $|BA| \cdot |BC_1| = |BM| \cdot |BC|$ a opět levá strana rovnosti je zároveň mocnost B ke kružnici opsané AC_1B_1 protože M je střed strany BC, tak víme, že $BM = CM$ a body B a C mají shodnou mocnost ke kružnici se středem v O a jsou tedy od něj shodně vzdáleny. □

Úloha 4. *dáno přirozené n, že 2^n a 5^n mají stejnou první cifru, najdi ji.*

Řešení. Zřejmě existují celá kladná k, l, že

$$10^k d < 2^n < 10^k(d+1)$$

$$10^l d < 5^n < 10^l(d+1)$$

kde d je ona první cifra. Vynásobením nerovností získáme

$$10^{k+l}d^2 < 10^n < 10^{k+l}(d+1)^2 \Leftrightarrow d^2 < 10^{n-k-l} < (d+1)^2 \Rightarrow d = 3$$

□

Úloha 5. *V rozmezí* 1 *až* 37 *včetně vybereme* 13 *různých čísel. Ukaž, že z nich umíme vybrat* 4 *tak, že součet* 2 *z nich je roven součtu zbylých* 2

Řešení. Použijeme Dirichletův princip (Pigeonhole principle).

Nejmenší možný součet je $1+2 = 3$, nejvyšší je $36+37 = 73$. Je tedy přípustných 71 součtů. Jenže $\binom{13}{2} = 78$, takže je více dvojic, než možných součtů, proto existují alespoň 2 různé dvojice se stejným součtem. Snadno rozmyslíme, proč tyto 2 různé dvojice nemají společné číslo. □