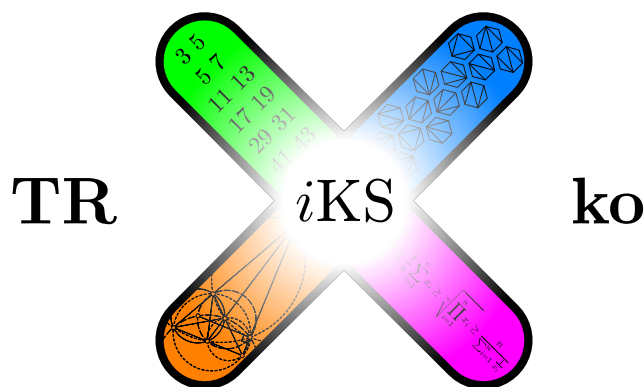




Úloha 1. Ať $n \in \mathbb{N}$, dále mějme celá čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ splňující $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Na stole na sobě leží dva soustředné kruhy. Na obvodu menšího jsou postupně po směru hodinových ručiček v pravidelných intervalech napsaná čísla $1, 2, \dots, n$, na obvodu většího jsou naopak napsaná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$. Kruhy lze proti sobě natočit do n různých poloh – v každé poloze jsou čísla na jejich obvodech spárována do dvojic. Pro danou polohu kruhů vždy vynásobme tyto lícující dvojice a všech n součinů sečtěme. Dokažte, pro každé dvě různé polohy obdržíme různá čísla.

Úloha 2. Jsou dána tři různá nenulová reálná čísla a, b, c splňující

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Součin abc je navíc v absolutní hodnotě různý od 1. Dokažte, že $a = b = c$.

Úloha 3. Číslo $0 < a < 1$ vznikne tak, že za jeho desetinnou čárku napíšeme desítkové zápisy čísel $n!$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ v námi zvoleném pořadí (a každé z nich použijeme právě jednou). Může být a racionální?

Úloha 4. V některém políčku čtvercového bitevního pole 101×101 stojí tank. Letadlo tank nevidí, ale může vždy vystřelit na jedno libovolné políčko. Pokud je tank zasažen, přejede na políčko sousedící stranou s tím výchozím, v opačném případě zůstává na místě. Tank bude zničen, jakmile ho letadlo zasáhne alespoň dvakrát. Kolikrát nejméně musí letadlo vystřelit, aby tank určitě zničilo?

Úloha 5. Střed kružnice ω_2 leží na kružnici ω_1 . Dále X leží na kružnici ω_1 a vně kružnice ω_2 . Dva body P, Q jsou zvoleny na ω_2 tak, aby XP a XQ byly tečny k ω_2 z bodu X . Přímky XP a XQ se podruhé protínají kružnici ω_1 po řadě v bodech R a S . Dokažte, že přímka PQ půlí úsečku RS .