TR iKS ko

Úloha 1. *Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v dvoch bodoch P, Q. Priamka l pretína kružnicu k_1 v bodoch A, C a kružnicu k_2 v bodoch B, D tak, že body ležia na priamke v poradí A, B, C, D, bod B leží vnútri kružnice k_1 a bod C vnútri kružnice k_2. Dokážte, že $|\angle APB| = |\angle CQD|$.*

Riešenie. Sledujme obvodové uhly: $|\angle PAB| = |\angle PAC| = |\angle PQC|$, $|\angle CDQ| = |\angle BPQ|$, $|\angle PBD| = |\angle PQD|$, $|\angle APQ| = |\angle ACQ|$. Z toho

$$\begin{aligned} |\angle APB| = 180^\circ - |\angle PAB| - |\angle PBA| = |\angle PBD| - |\angle PAB = \\ = |\angle PQD| - |\angle PQC| = |\angle CQD| \,. \end{aligned}$$

$\square$

Úloha 2. *Nájdite všetky reálne riešenia rovnice $\{(x+1)^3\} = x^3$, kde $\{z\}$ označuje desatinnú časť čísla z, teda číslo, ktoré vznikne keď od z odčítame najväčšie celé číslo $\leq z$.*

Riešenie. Je zjavné, že $x^3 \in [0, 1)$, teda $x \in [0, 1)$. Ďalej vidíme že $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ musí byť celé; riešime teda rovnicu $3(x^2 + x) = z$ pre $z \in \mathbb{Z}$. Pre daný rozsah x je možné len $0 \leq z \leq 5$, môžeme teda pre každú z možností dopočítať $x = \frac{\sqrt{1+4z/3}-1}{2}$ (koreň s mínusom nevyhovuje).

Pritom $3(x^2 + x) \in \mathbb{Z}$ a $x^3 \in [0, 1)$ sú aj postačujúce podmienky – všetkých 6 možností dáva platné riešenia danej rovnice. $\square$

Úloha 3. *Dokážte, že je možné prirodzené čísla roztriediť do 100 neprázdnych disjunktných množín tak, aby pre ľubovoľnú trojicu a, b, c takú, že $a + 99b = c$, patrili aspoň dve z čísel a, b, c do tej istej množiny.*

Riešenie. Očíslujme množiny od 0 po 99. Pre $0 \leq i < 99$ dajme do množiny i všetky párne čísla so zvyškom i modulo 99; do množiny 99 dajme nepárne čísla.

V rovnosti $a + 99b = c$ vidíme, že a, c musia dávať rovnaké zvyšky modulo 99, ak sú teda párne, sú obe v jednej množine. Ak su obe nepárne, sú tiež v jednej množine. Ak majú a, c rôznu paritu, ich rozdiel je nepárny a teda aj b musí byť nepárne – zasa máme dve nepárne čísla, ktoré už musia byť v jednej množine. $\square$

Úloha 4. *Je daný štvorsten $ABCD$ s vpísanou sférou s. Bod dotyku s so stenou ABC označme T. Pripísaná sféra k stene ABC sa tejto steny dotýka v bode U. Dokážte, že priamka AU je obrazom priamky AT v osovej súmernosti podľa osi uhla $\angle BAC$.*

Riešenie. Označme pripísanú sféru r, body dotyku sfér s, r s rovinou ABD ako M, N a body ich dotyku s rovinou ACD ako P, Q. Body dotyku sféry k stranám, ktoré majú spoločný vrchol, sú rovnako vzdialené od tohto vrcholu (zo symetrie), teda $|DM| = |DP|$, $|AM| = |AP| = |AT|$, $|AN| = |AQ| = |AU|$, $|BM| = |BT|$, $|BN| = |BU|$, $|CP| = |CT|$, $|CQ| = |CU|$.

Teraz z podobnosti (zhodnosti) trojuholníkov máme $|\angle BAT| = |\angle BAM|$, $|\angle BAU| = |\angle BAN|$, teda $|\angle BAT| + |\angle BAU| = |\angle NAM|$ a podobne $|\angle CAT| + |\angle CAU| = |\angle PAQ|$. Trojuholníky AMN, APQ musia byť tiež zhodné zo symetrie (nezávisia na polohe bodov B, C a bod D musí ležať na spojnici ich stredov), teda $|\angle NAM| = |\angle PAQ|$. Dostávame $|\angle BAT| - |\angle CAT| = \angle CAU| - |\angle BAU|$, pričom $2|\angle BAT| - |\angle CAB| = |\angle BAT| - |\angle CAT|$ a podobne $2|\angle CAU| - |\angle CAB| = |\angle CAU| - |\angle BAU|$; z rovnosti $|\angle CAU| = |\angle BAT|$ plynie dokazovaná osová symetria. $\square$

Úloha 5. *Je daná postupnosť nezáporných čísel $\{a_i\}_{i=1}^n$. Pre $1 \leq k \leq n$ definujme*

$$m_k = \max{}_{(l)} \frac{a_{k-l+1} + \cdots + a_k}{l} \quad \forall\ 1 \leq l \leq k\,.$$

Dokážte, že pre ľubovoľné $\alpha > 0$ je počet indexov k takých, že $m_k > \alpha$, menší ako $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{\alpha}$.

Riešenie. Označme súčet podpostupností $a_i, \ldots, a_j$ ako $S(i, j)$ a jej aritmetický priemer ako $A(i, j) = S(i, j)/(j - i + 1)$.

Vyberme z intervalu $[1, n]$ niekoľko disjunktných intervalov nasledujúcim pažravým algoritmom: ak sme zatiaľ vybrali i intervalov, začiatok intervalu $i + 1$ je najmenšie číslo $l : a_l > \alpha$, ktoré sa nenachádza v predchádzajúcich intervaloch a jeho koniec je najväčšie r také, ze $A(l, j) \geq \alpha\ \forall\ l \leq j \leq r$. Zjavne platí $l_i \leq r_i < l_{i+1}$.

Dokážme, že pre všetky $m_k > \alpha$ leží k v jednom z týchto intervalov – sporom, zoberme si najmenšie k ktoré leží mimo a posledný interval $[l, r]$ s $r < k$. Potom musí existovať h také, že $A(h, k) > \alpha$, ale $a_{r+1..k} \leq \alpha$, teda $h \leq r$.

- Ak $k \geq r + 2$, dostávame $S(r + 2, k) + S(h, r + 1) = S(h, k) > (k + 1 - h)\alpha$, ale $A(r + 2, k) \leq \alpha$, takže aby to platilo, musí byť $A(h, r + 1) > \alpha$, teda $m_{r+1} > \alpha$, čo je spor s minimalitou k.
- Ak $k = r + 1$ a $h \geq l$, potom je $S(l, k) = S(l, h - 1) + S(h, k) > (h - l)\alpha + (k - h + 1)\alpha$, teda $A(l, r + 1) > \alpha$, čo je spor s maximalitou r.
- Ak $k = r + 1$ a $h < l$, je $S(h, l - 1) + S(l, k) = S(h, k) > (k - h + 1)\alpha$, ale $S(l, k) \leq (k - l + 1)\alpha$, teda $A(h, l - 1) = \frac{S(h, l-1)}{l-h} > \alpha$; pritom $l - 1$ nemôže byť koncom iného z vybraných intervalov, lebo $a_l > \alpha$ a potom by aj l patrilo do tohto intervalu, dostávame teda ďalší spor s minimalitou k.

Z toho už plynie dôkaz hľadaného tvrdenia: počet všetkých takých m_k je $\leq$ súčtu dĺžok všetkých intervalov L, súčet čísel zo všetkých intervalov je $> \alpha L$ a zároveň $\leq a_1 + \cdots + a_n$, teda $L < \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\alpha}$. QED $\square$