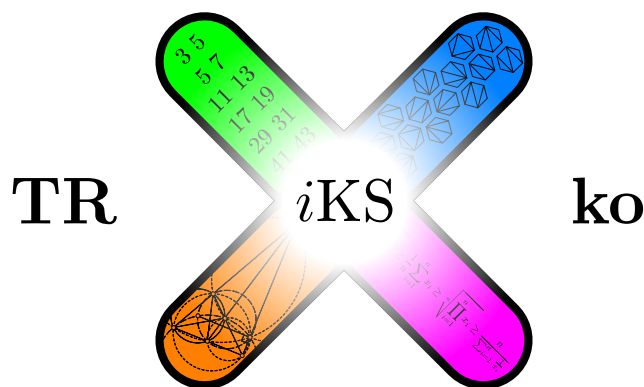




Úloha 1. Máme velkou klasicky obarvenou šachovnici 10×14 a na každém políčku může ležet tuleň. Zrovna platí, že v každém řádku i sloupci je lichý počet tuleňů. Dokaž, že na černých políčkách je dohromady sudý počet tuleňů.

Úloha 2. Mějme zadaný bod A a dvě polopřímky, které z něj vycházejí a svírají ostrý úhel. Nechť je na jedné polopřímce bod B a na druhé bod C s tím, že součet $AB + AC$ je konstantní. Dokaž, že existuje pevný bod $D \neq A$ takový, že kružnice opsaná ABC prochází bodem D pro všechny možné volby bodů B a C .

Úloha 3. Máme kulatý stůl a kolem něho sedí 2018 mladých lidí, z toho je nejvýše 672 chlapců. Řekneme, že dívka D je v silné pozici, pokud když od ní postupně počítáme okolo stolu libovolným směrem a libovolně daleko, vždy je počet dívek ostře větší než počet chlapců (D do toho započítává i sama sebe). Dokaž, že v libovolném uspořádání lidí okolo stolu vždy existuje dívka, která je v silné pozici.

Úloha 4. Nechť a, b, c jsou reálná čísla, taková že $|a| > 2$ a zároveň

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$$

Dokažte, že existují taková reálná x a y , pro než platí:

$$a = x + \frac{1}{x}, b = y + \frac{1}{y}, c = xy + \frac{1}{xy}$$

Úloha 5. Najděte všechna přirozená a a b , taková že

$$ab + a + b \mid a^2 + b^2 + 1$$