

Zadanie 4. série

Termín odoslania: 16. november 2020

Adresa submitka: www.iksko.org/submit

Úloha A4. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí nerovnosť

$$a\sqrt{b^2 - bc + c^2} + c\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq b\sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

a určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha G4. Vo vnútri trojuholníka ABC leží bod P spĺňajúci $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle BAC|$. Priamky BP, CP pretnú strany AC, AB postupne v bodoch M, N . Dokážte, že stredy úsečiek AB, AC, BM, CN ležia na jednej kružnici.

Úloha N4. Je daný nekonštantný polynóm P s celočíselnými koeficientami a celé číslo n . Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je daná predpisom $a_1 = n$ a $a_{i+1} = P(a_i)$ pre každé prirodzené číslo i . Navyše platí, že pre každé prirodzené $b \geq 2$ existujú prirodzené čísla i a $x > 1$ spĺňajúce $a_i = x^b$. Dokážte, že polynóm P je lineárny.

Úloha C4. Danilovi sa na záhrade pasie stádo niekoľkých roztomilých tuleňov, medzi ktorými sa niektoré dvojice kamarátia (kamarátstvo je vzájomné). Danil by chcel tulene rozdeliť na dve menšie stáda tak, aby každý tuleň mal vo svojom novom stáde párny počet kamarátov. Dokážte, že počet spôsobov, ako to môže urobiť, je mocnina dvojky.