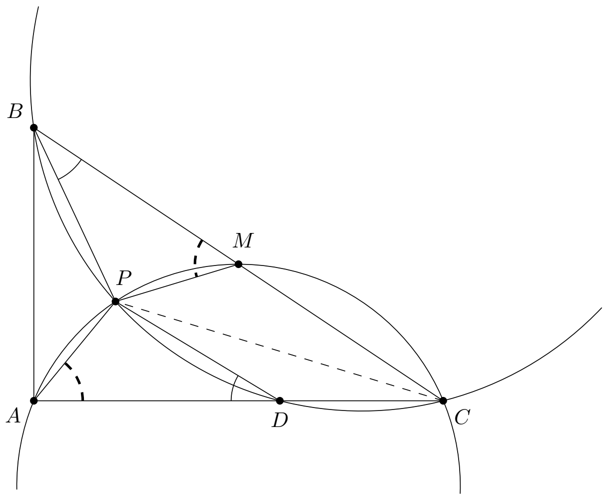
Řešení 1. série

Úloha G1. *Buď ABC pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u A. Označme střed strany BC jako M. Na straně AC najdeme bod D takový, že $|AM| = |AD|$. Kružnice opsané trojúhelníkům AMC a BDC se podruhé protnou v bodě P. Ukažte, že přímka CP půlí úhel ACB.*

Řešení. Čtyřúhelník $BPDC$ je tětivový, a proto $\angle PDA = \angle PBM$. Čtyřúhelník $APMC$ je tětivový, a proto $\angle BMP = \angle PAD$. Celkově tedy platí, že trojúhelníky APD a MPB jsou si podobné. Navíc trojúhelník ABC je pravoúhlý, tudíž střed M přepony BC je zároveň opsiště, a proto $BM = AM = AD$. Z toho vidíme, že trojúhelníky APD a MPB jsou dokonce i shodné, což nám dává $PD = BP$. Úhly BCP a ACP přísluší tedy stejným tětivám kružnice opsané čtyřúhelníku $BPDC$, a proto se jedná o stejný úhel a důkaz je hotov.



Poznámky opravujícího. Úloha byla jednoduchá, a proto si s ní skoro všichni řešitelé poradili. Přirozený způsob, jak na řešení přijít, by mohl být postupovat zezadu. Předpokládáme-li, že platí závěr, pak v tětivových čtyřúhelnících $BPDC$ a $APMC$ najdeme stejně dlouhé tětivy. Spolu s rovností délek AD a BM dávají shodnost trojúhelníků APD a MPB. Na tuto shodnost můžeme ale snadno přijít jednoduchým úhlením, poté stačí celý postup obrátit. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha A1. *Marian na tabuli napsal čísla* $1000, 1001, \ldots, 2999$. *Posléze opakoval následující kroky: vybral si dvě čísla, která jsou na tabuli napsaná, obě smazal a místo nich napsal polovinu toho menšího. Toto opakoval tak dlouho, až na tabuli zbylo jen jedno číslo. Ukažte, že toto číslo je menší než 1.*

Řešení. Nechť V značí hodnotu součtu převrácených čísel na tabuli. Nejdříve ukážeme, že po každém kroku se hodnota V nezmenší. Vybere-li Marian čísla x a y, kde $x \geq y$, tak místo nich na tabuli napíše $\frac{y}{2}$. Tedy v součtu převrácených hodnot nahradíme $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ zlomkem $\frac{2}{y}$. A protože $x \geq y$, tak $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{y}$. Tedy V se nezmenší.

Dále ukážeme, že počáteční hodnota V je větší než 1. Z nerovnosti mezi aritmetickým a harmonickým průměrem pro 2000 čísel $1000, 1001, \ldots, 2999$ platí $\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{2999} \geq \frac{2000^2}{1000+1001+\cdots+2999} = \frac{2000^2}{\frac{2000\cdot 3999}{2}} = \frac{4000}{3999} > 1$.

Protože na začátku je V větší než jedna a po každém kroku se bud hodnota V nezmění nebo zvětší, tak na konci bude pořád větší než jedna. Tedy převrácená hodnota poslední čísla na tabuli je větší než jedna, tedy toto číslo je menší než jedna.

Poznámky opravujícího. Správných řešení došlo mnoho, ale pouze dvě se podobala vzorovému. Hlavní myšlenkou bylo uvědomit si, že u úloh, kde se provádí nějaké kroky, se často hodí najít nějaký vhodný invariant nebo monovariant a po jeho nalezení šlo již jednoduše různými nerovnostmi dokázat, že na začátku je V větší než 1. *(Pavel Turek a Vašek Voráček)*

Úloha C1. *V PraSestánu leží $n+1$ měst očíslovaných čísly 1 až $n+1$ (každé jiným). Tato země má propracovaný systém obousměrných leteckých linek, ve kterém platí, že mezi každými dvěma městy se dá dostat právě jedním způsobem (bez toho, abychom po letu z X do Y nastoupili na let z Y do X). V sousední iKSii se nachází 2^n měst kódovaných čísly 0 až 2^n-1 (každé jiným). Vláda iKSie se snaží zřídit svůj vlastní systém obousměrných leteckých linek. Protože PraSestánský systém zjevně funguje, rozhodla se jím iKSijská vláda inspirovat. Najala tedy několik aerolinek tak, aby platilo:*

- *Mezi každými dvěma městy existuje nanejvýš jeden (obousměrný) přímý let. Speciálně tedy dvě různé aerolinky nespojují přímým letem stejnou dvojici měst.*
- *Aby dvojice měst mohla být spojena přímým letem, musí se kódy těchto měst napsané v číselné soustavě o základu 2 pomocí n cifer (s možnými nulami na začátku) lišit právě v jedné cifře.*
- *Libovolná aerolinka A operuje v právě $n+1$ městech. Navíc se těchto $n+1$ měst musí dát označit čísly 1 až $n+1$ tak, že města s čísly a a b jsou spojena přímým letem zřizovaným aerolinkou A právě tehdy, pokud jsou v PraSestánu města s čísly a a b spojena přímým letem.*

Poraďte iKSijské vládě, kolik nejvíce aerolinek je za splnění těchto pravidel určitě schopna najmout, nezávisle na rozdělení letů v PraSestánu.

Neopohádkovaná verze: *Mějme strom S na $n+1$ vrcholech. Kolika nejvíce stromy izomorfními s S jsme určitě schopni polepit hrany n-dimenzionální hyperkrychle tak, aby žádné dva nesdílely hranu (přičemž mohou sdílet vrcholy)?*

Řešení. Ukážeme, že maximální počet takových stromů je 2^{n-1}. Hyperkrychle má $n2^{n-1}$ hran (z každého z 2^n vrcholů vede n hran, protože můžeme změnit právě jednu souřadnici, a každou hranu započítáme pro dva vrcholy). Strom o $n+1$ vrcholech zabere n hran, takže více než 2^{n-1} stromů, tak aby se žádné dva nepřekrývaly hranou, na hyperkrychli umístit jistě nemůžeme.

Stačí nám již jen ukázat, že kopiemi libovolného stromu dokážeme celou hyperkrychli pokrýt. Obarvěme si nejdříve v každé hyperkrychli vrcholy, které mají sudý součet souřadnic (souřadnice bereme rovny nule nebo jedné), bíle a zbylé černě. Každá hrana poté vede mezi bílým a černým vrcholem, neboť změnou právě jedné souřadnice jistě změníme součet ze sudého na lichý nebo naopak. Ukážeme indukcí, že libovolný strom s $n+1$ vrcholy umíme naskládat v 2^{n-1} kopiích na n-rozměrnou hyperkrychli tak, aby žádné dva stromy nesdílely hranu, a navíc aby navzájem si odpovídající vrcholy v různých kopiích stromu měly vždy stejnou barvu a každému vrcholu této barvy v hyperkrychli odpovídal tento vrchol právě v jedné kopie stromu.

Pro $n=1$ máme pouze dva vrcholy spojené hranou (jeden bílý a jeden černý), každý strom na dvou vrcholech vypadá stejně (a to přesně takto), takže jím můžeme hyperkrychli pokrýt.

Předpokládejme nyní, že máme dokázané tvrzení pro $n \geq 1$ a libovolný strom na $n+1$ vrcholech a dokažme ho pro $n+1$ a libovolný strom na $n+2$ vrcholech. Zvolme libovolný strom S s $n+2$ vrcholy. Tento strom bude mít jistě nějaký list l, který když společně s hranou odebereme, tak dostaneme strom S_0 s $n+1$ vrcholy, který podle indukčního předpokladu umíme naskládat ve 2^{n-1} kopiích na n-rozměrnou hyperkrychli tak, aby seděly barvy vrcholů. Spojme nyní dvě takové hyperkrychle v jednu $n+1$-rozměrnou hyperkrychli tak, že ke všech vrcholům jedné z nich přidáme $n+1$ souřadnici rovnou nule a ke všem vrcholům druhé z nich rovnou jedné. Pokud ale u té první přejmenujeme všechny jedničky z první složky na nuly a naopak (to můžeme udělat, protože hranu máme v námi definovaném grafu právě tehdy, když se vrcholy liší v právě jedné složce – což nezávisí na tom, zda je tam nula nebo jednička), pak u první hyperkrychle se parita součtu souřadnic nezmění, u druhé díky přejmenování první složky také ne.

Pro každý vrchol $v \in S_0$ jsou jeho obrazy v kopiích S_0 v obou hyperkrychlích obarvené stejnou barvou, a navíc máme jednoznačně bijektivně pospojované všechny vrcholy této barvy v $n+1$-rozměrné hyperkrychli a všechny kopie stromu. Speciálně toto platí pro vrchol sousedící s listem l v S. Mezi dvěma uvažovanými hyperkrychlemi vede 2^n hran – vždy mezi jedním bílým a jedním černým vrcholem v té druhé (přičemž z každého vrcholu vede právě jedna hrana). Pro každý bílý vrchol tedy můžeme doplnit strom S_0 k němu příslušející touto hranou a udělat z něj kopii stromu S. List l se potom zobrazí na příslušející černý vrchol – tedy znovu dostaneme bijekci mezi vrcholy jedné barvy v hyperkrychli (tentokrát mezi černými) a listy l v jednotlivých kopiích.

Takto jsme pokryli $n+1$-rozměrnou hyperkrychli pomocí 2^n kopií stromu S. A v našich úvahách jsme zdůvodnili, že i druhý předpoklad, který jsme v indukci použili, zůstal zachován. Takže jsme indukční krok dokončili a ukázali, že n-rozměrnou hyperkrychli můžeme pokrýt alespoň 2^{n-1} kopiemi libovolného stromu na $n+1$ vrcholech. A díky opačné nerovnosti dokázané na začátku vidíme, že toto je i maximální počet.

Poznámky opravujícího. Vzorové řešení je napsané pouze pro neopohádkovanou verzi. Doufáme, že je takto přehlednější. Pro překlad do druhé verze stačí vědět, že grafy definované v zadání se nazývají „strom“ a „hyperkrychle“.

Úlohu bohužel neodevzdalo moc lidí, asi odradila svým dlouhým a složitě znějícím zadáním. Nijak extrémně těžká ale není. Triviální indukce sice nefunguje, ale po chvilce hraní se dá přijít na to, že bychom chtěli nějak odlišit sousedící vrcholy. Poté, co obarvíme vrcholy dvěma barvami už máme skoro hotovo. *(Filip Bialas)*

Úloha N1. *Ukažte, že pro každé přirozené číslo t existuje přirozené číslo $n > 1$ nesoudělné s t takové, že žádné z čísel $n+t$, n^2+t, n^3+t, … není mocnina přirozeného čísla (s exponentem vyšším než jedna).*

Řešení. Nechť p je prvočíslo dělící $t+1$ a α je takové číslo, že $p^\alpha \mid t+1$, ale $p^{\alpha+1} \nmid t+1$. Ukážeme, že $n = (t(t+1)^2+1)^\alpha$ vyhovuje.

Zaprvé si povšimněme, že $(t+1)^2 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}}$, takže $n \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}$, tedy pro libovolné k je $n^k + t \equiv t+1 \pmod{p^{\alpha+1}}$. Proto $p^\alpha \mid n^k+t$, ale $p^{\alpha+1} \nmid n^k+t$, takže pokud je $n^k+t = m^\beta$, pak $\beta \mid \alpha$.

Protože $n = (t(t+1)^2+1)^\alpha$ a $\beta \mid \alpha$, je $h = \sqrt[\beta]{n^k}$ celé číslo. Povšimněme si, že z binomické věty pro $\beta > 1$ je $(h+1)^\beta - h^\beta \geq \beta h + 1 \geq t(t+1)^2 + 2 > t$, tedy $(h+1)^\beta > n^k + t > h^\beta$, takže $n^k + t$ nemůže být mocnina s exponentem větším než 1, protože leží mezi dvěma za sebou jdoucími takovými mocninami.

Poznámky opravujícího. Několik řešení se správným postupem se sešlo. A jak se na to dalo přijít? Slovy Danila Koževnikova:

„Tak jakože jak umím rozumně říct, že něco není mocnina?“

„Obvykle se to dělá tak, že řekneš, že je to ňákým prvočíslem dělitelný jenom jednou, ale to tady nějak nefunguje.“

„Jo, to jsem ze začátku taky zkoušel, pak se to trošku zobecní na to, že ti stačí, aby to bylo rozepsatelné na součin dvou nesoudělných věcí, z nichž jedno není mocnina. Takže by bylo fajn, kdyby něco, co není mocnina, dělilo všechny členy posloupnosti. (Ono se ukáže, že ani tohle samo o sobě spíš nestačí, ale to je jedno :D) No a když na to člověk jde z opačné strany, tak o kterých číslech umíš pro každé t říct, že jsou nesoudělná s t? Tak cokoliv z aritmetické posloupnosti $kt \pm 1$. Tak to, že by fungovalo nějaké konstantní k pro všechna t, by byla fakt megahaluz, takže to ani nebudu moc zkoušet, tak třeba zkusit tipnout nějakou závislost k na t. Tak nejjednodušší by bylo, kdyby to bylo lineární. Tak chvíli zkouším lineární funkce a jako jednu z prvních si tipnu $t+1$. Pro kterou tak nějak vyjde, že jsou všechny ty členy dělitelné $t+1$, což je cool a nějak to zpětně poukazuje na ten první nápad. Ale nějak úplně nefunguje to, že by druhá závorka byla nutně nesoudělná s $t+1$, když člověk vidí, jak vypadá ten druhý činitel, tak by nějak stačilo roznásobit to ještě jednou $t+1$, abys nějak dobře uměl říct tu nesoudělnost. Takže vyzkoušíš $t(t+1)^2+1$ a ono to vyjde, když $t+1$ není mocnina. No a teď máš v podstatě obecně způsob, jak udělat, abys každý ten člen uměl rozložit na lineární člen krát něco, co s ním není soudělné, takže ti vlastně to, jaká mocnina je ten lineární člen, omezí to, jaká mocnina může být ten součin. Takže ty víš, že třeba kdyby nějaký člen té posloupnosti byl n-tá mocnina, tak n dělí šestku. Takže by bylo dost dobrý, kdybys třeba nebral všechny členy s n^i, ale třeba akorát členy $n^6 i$, potom je to prostě všechno nějak hrozně blízko 2.,3. i 6. mocnin a nemůže to fungovat. No a to se udělá prostě tak, že ten kubický polynom, který fungoval pro nemocniny, umocníš na něco správného.“ *(Rado Švarc)*