TR *i*KS ko

Úloha 1. *Je daný polynóm* $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$*. Vieme, že rovnice* $p(x) = 1$, $p(x) = 2$ *majú obe 4 rôzne reálne korene. Dokážte, že ak korene prvej rovnice spĺňajú* $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ *(v nejakom poradí), tak korene druhej rovnice spĺňajú tú istú rovnosť.*

Řešení. Označme $s = (x_1+x_2)/2 = (x_3+x_4)/2$. Potom $x_1 = s-a$, $x_2 = s+a$, $x_3 = s-b$, $x_4 = s+b$ pre vhodné a, b. Vieme, že x_1, x_2, x_3, x_4 sú korene polynómu $p(x)-1$, takže

$$\begin{aligned} p(x) - 1 &= (x-s+a)(x-s-a)(x-s+b)(x-s-b), \\ p(x) - 2 &= (x-s+a)(x-s-a)(x-s+b)(x-s-b) - 1. \end{aligned}$$

Dosadením vidíme, že ak $s+c$ je koreň polynómu $p(x)-2$ tak aj $s-c$ je koreň. Nech tretí koreň je $s+d$, $d \neq \pm c$, potom aj $s-d$ je koreň, rôzny od predchádzajúcich. Takže všetky korene rovnice $p(x) = 2$ sú $s+c$, $s-c$, $s+d$, $s-d$, ktoré spĺňajú požadovanú rovnosť.

□

Úloha 2. *Ákos chce vytvoriť nekonečnú postupnosť prirodzených čísel* $a_1, a_2, \ldots$*. Už má prvých* k *členov* $a_1, \ldots, a_k$*. Ďalšie členy pridáva tak, že* a_n *je najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá zapísať ako súčet niekoľkých (aspoň jedného) členov, ktoré sa už v postupnosti vyskytli. Dokážte, že pre všetky dostatočne veľké* [1] n *platí* $a_{n+1} = 2a_n$.

Řešení. Pomocou prvých $n-1$ členov vieme dostať všetky súčty $1, 2, \ldots a_n - 1$, takže pomocou prvých n členov vieme dostať aj súčty $a_n, a_n+1, \ldots, a_n + (a_n - 1)$ tak, že k členu a_n pripočítame predchádzajúce súčty. Preto $a_{n+1} \geq 2a_n$. Označme $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, čo je najväčšie číslo, ktoré vieme dostať pomocou prvých n čísel. Pozrime sa na rozdiel $r_n = S_n - a_{n+1}$:

$$r_n = S_n - a_{n+1} \leq S_n - 2a_n = S_{n-1} - a_n = r_{n-1}. \tag{1}$$

Rozdiel r_n sa so stúpajúcim n-kom zmenšuje. Tento rozdiel predstavuje *Najväčší dosiahnuteľný súčet mínus Najmenší nedosiahnuteľný súčet*, takže $r_n \geq -1$. Ide o celé číslo, takže len konečne veľa krát sa môže zmenšiť, od nejakého člena bude platiť $r_n + 1 = r_n$, takže nastane rovnosť v (1), teda $a_{n+1} = 2a_n$

□

[1] Formálne povedané, dokážte, že existuje také N, že pre všetky $n > N$ platí $a_{n+1} = 2a_n$.

Úloha 3. *Dokážte, že rovnica $3y^2 = x^4 + x$ nemá riešenie v kladných celých číslach.*

Řešení. Upravme rovnicu na $3y^2 = x(x^3 + 1)$. Čísla x a $x^3 + 1$ sú nesúdeliteľné a ich súčin je trojnásobok štvorca. Z toho vyplýva, že jedno z nich je štvorec a druhé je trojnásobkom štvorca.

Ak $x = s^2$ a $x^3 + 1 = 3t^2$, tak $x \equiv s^2 \equiv 0$ *alebo* $1 \pmod 3$ a zároveň $x \equiv x^3 \equiv 3t^2 - 1 \equiv 2 \pmod 3$, čo je spor.

Ostáva prípad $x = 3s^2$ a $x^3 + 1 = t^2$. Teraz môžeme vďaka Mihailescovej vete vidieť, že by muselo platiť $x = 2, t = 3$, čo je v spore s $x = 3s^2$ a tým je to dokázané. Elementárnejší prístup je rozložiť to ďalej na súčin $3y^2 = x(x+1)(x^2 - x + 1)$. Keďže $3 \mid x$, tak $x + 1$ nie je deliteľné 3 a z toho vidno, že zátvorky $(x + 1)$ a $(x^2 - x + 1)$ sú nesúdeliteľné, čiže obe sú štvorce. Všimnime si $(x-1)^2 = x^2-2x+1 < x^2-x+1 \leq x^2$. Výraz $(x^2 - x + 1)$ sa nachádza medzi dvomi po sebe idúcimi štvorcami a sám má byť štvorec. To sa stane len keď $x^2 - x + 1 = x^2$, teda len pre $x = 1$, čo je spor s $3 \mid x$. Rovnica nemá riešenie.

$\square$

Úloha 4. *Máme ostrouhlý trojuholník ABC s opísanou kružnicou k. Nech M, N sú stredy kratších oblúkov AB, AC. Na priamke BC ležia body P, B, C, Q v tomto poradí tak, že $AB = BP$ a $AC = CQ$. Dokážte, že priamky PM a QN sa pretínajú na kružnici k.*

Řešení. Nech sa PM a QN pretínajú v bode R. Predpokladajme nazačiatku, to čo chceme dokázať, teda že R leží na kružnici k, aby sme vedeli povedať čo najviac o našej úlohe. Potom, $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle MAN| = |\sphericalangle MAB| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAN| = |\sphericalangle MCB| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle NBC| = \gamma/2 + \alpha + \beta/2 = 90^\circ + \alpha/2$. Trojuholník PAB je rovnoramenný, takže $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle ABC|/2 = \beta/2$, podobne $|\sphericalangle QAC| = \gamma/2$, takže $|\sphericalangle PAQ| = \beta/2 + \alpha + \gamma/2 = 90^\circ + \alpha/2 = |\sphericalangle PRQ|$. Vidíme, že $PARQ$ je tetivový.

Začnime odznova, ale definujme si bod R ako priesečník kružnice k a kružnice opísanej PAQ. Chceme dokázať, že PM a QN prechádzajú cez R. Spočítajme uhol $|\sphericalangle PRA| = |\sphericalangle PQA| = |\sphericalangle CQA| = \gamma/2$ a uhol $|\sphericalangle MRA| = |\sphericalangle MCA| = \gamma/2$. Keďže $|\sphericalangle ARM| = |\sphericalangle ARP|$, tak body P, M, R ležia na priamke, rovnako Q, N, R ležia na priamke.

$\square$

Úloha 5. *Dokážte, že čísla $1, 2, \ldots, 2020$ sa dajú zafarbiť, každé namodro alebo načerveno tak, že každá 18-členná aritmetická postupnosť vytvorená z týchto čísel obsahuje aj červené aj modré číslo.*

Řešení. Spočítajme počet všetkých 18-členných rastúcich aritmetických postupností vytvorených z čísel $1, 2, \ldots, 2020$. Aritmetická postupnosť, ktorá má diferenciu d je jednoznačne určená prvým členom a_1. Pre posledný člen musí platiť $a_{18} = a_1 + 17d \leq 2020$, čiže $1 \leq a_1 \leq 2020 - 17d$. Počet postupností s diferenciou d je $A_d = 2020 - 17d$, lebo máme toľko možností pre voľbu prvého člena.

$$A = A_1 + \cdots + A_{118} = \sum_{d=1}^{118} A_d = \sum_{d=1}^{118} 2020 - 17d = 118 \cdot 2020 - 17 \cdot \frac{118 \cdot 119}{2} = 119003.$$

Pozrime sa, čo by sa stalo, ak by každé z 2^{2020} ofarbení našich čísel obsahovalo jednofarebnú 18-člennú aritmetickú postupnosť. Zistíme v koľkých ofarbeniach sa jedna konkrétna aritmetická postupnosť vyskyje ako jednofarebná. Máme 2 možnosti na farbu tejto postupnosti a 2^{2002} možností na farby zvyšných $2020 - 18 = 2002$ čísel. Máme A postupností a každá z nich sa vyskytuje v 2^{2003} ofarbeniach ako jednofarebná, čiže spolu môže byť najviac $2^{2003}A = 2^{2003} \cdot 119003 < 2^{2020}$ ofarbení, ktoré obsahujú jednofarebnú postupnosť, takže určite existuje nejaké ofarbenie, ktoré neobsahuje žiadnu jednofarebnú 18-člennú aritmetickú postupnosť.

$\square$